Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Sommaire

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Sommaire

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Sommaire

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

1 - COMMANDE EN CHAINE DIRECTE, COMMANDE ASSERVIE

1-1. COMMANDE DES SYSTEMES EN CHAINE DIRECTE

Intéressons-nous au système de remplissage de réservoir présente sur la figure ci-contre.
Afin de garantir une **pression d'utilisation constante**, le **niveau d'eau dans le reservoir 2** doit etre **maintenu a la hauteur h_1**.
Pour cela, le **reservoir 2 est alimenté** par un **debit d'eau $_{Q1}$** preleve dans le reservoir 1, que nous considererons ici **de capacite infinie** devant le reservoir 2.

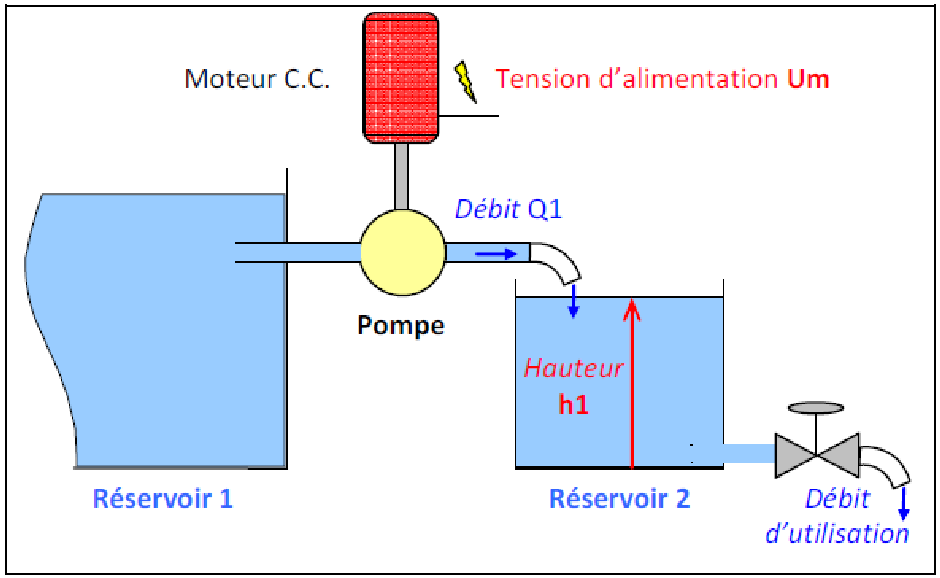


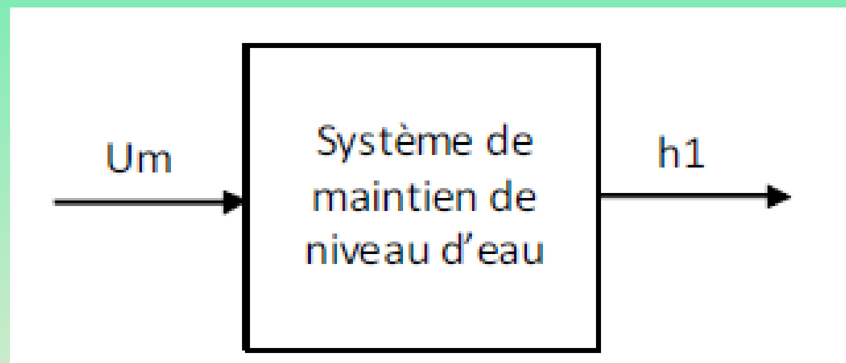
Figure 1 : Régulation du niveau d'eau dans un réservoir

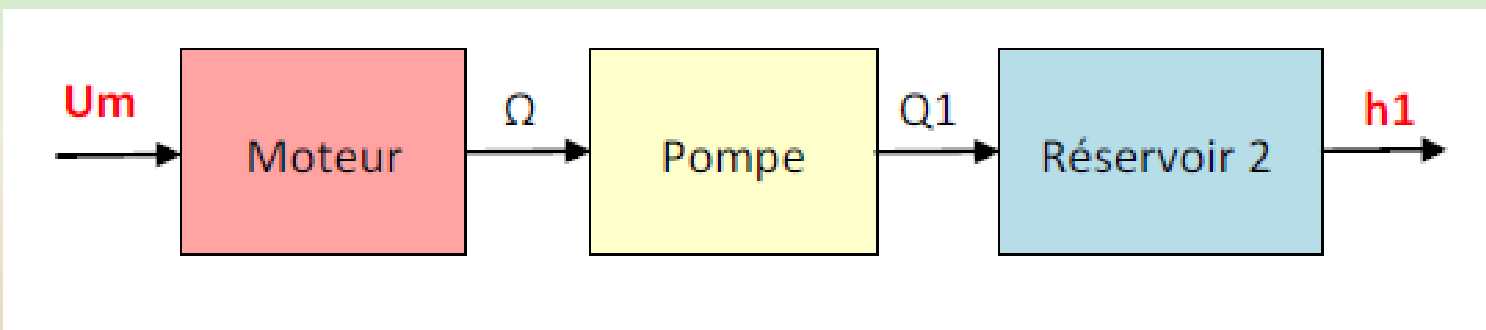
L'alimentation du réservoir 2 est assurée par une pompe actionnée par un moteur à courant continu commande par une tension d'alimentation Um.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Modélisation du système à commander en chaine directe

Objectif :
établir une relation entre la grandeur d'entree (Um ici) et la grandeur de sortie (hauteur h_1).





Les grandeurs physiques (Um, Ω, Q_1 et h_1) sont ici des fonctions du temps.

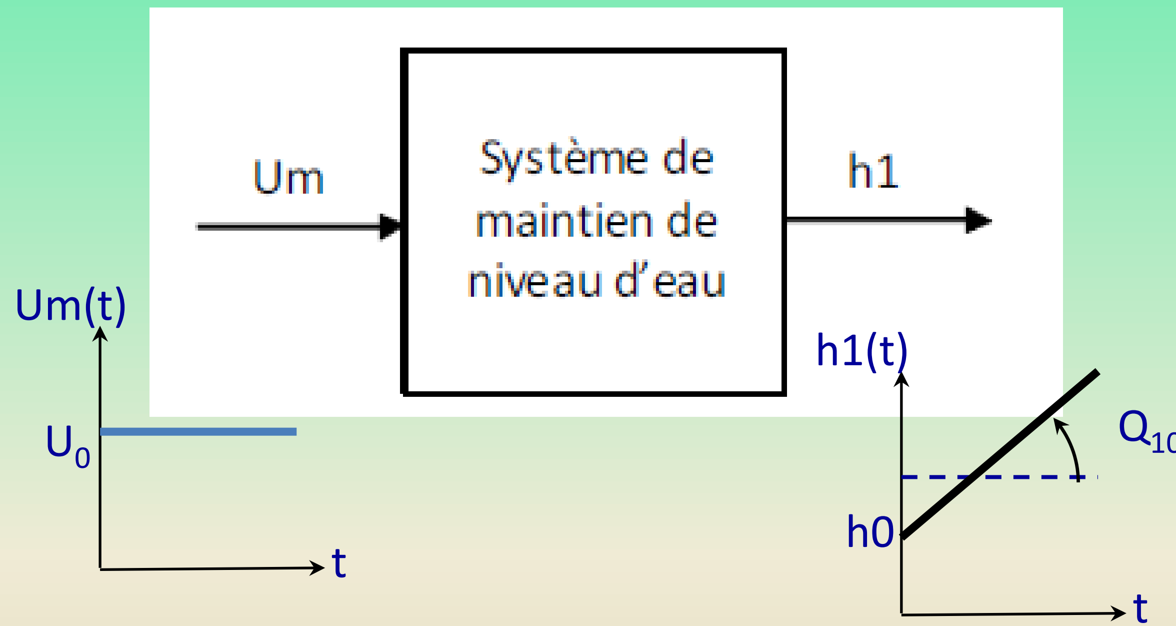
Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Comportement temporel de la chaine directe

Soit $Um(t) = U_0$ = constante et (Ω, Q_1, h_1) stabilisées (temps suffisamment long)

Alors $\Omega(t) = \Omega_0$ = constante
Puis $Q_1(t) = Q_{10}$ = constante

$h_1(t) = Q_{10}.t + h_0$



Si on alimente le réservoir **sans fuite** (vanne de sortie fermée) avec un débit fixe, le niveau monte.
Le réservoir se modélise donc comme un intégrateur

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Modélisation de la commande en chaîne directe

La garantie du niveau d'eau h1 dans le reservoir 2 nécessite donc la maitrise de la tension du moteur Um ainsi que de la durée de la rotation de ce même moteur. Pour cela, il est nécessaire de mettre en place un système de commande dans la chaine directe

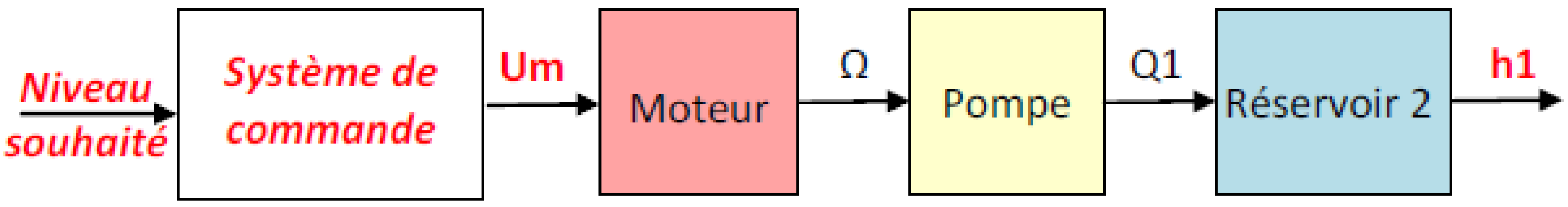


Figure 2 : Mise en place d'un système de commande

Le système de commande délivre la tension de commande Um(t) qui permet de maintenir h1 au niveau souhaite.

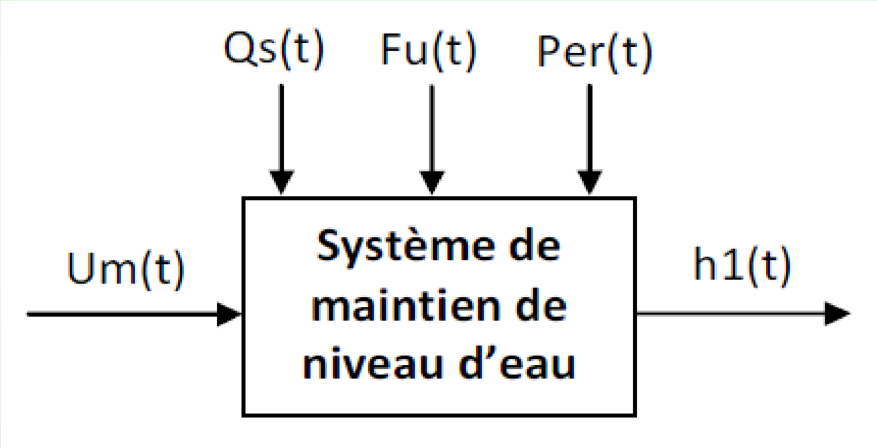
*Le système étudié fonctionne ici en **chaine directe** : le système de commande n'a **aucun moyen de contrôler la manière dont l'ordre a été executé**.*

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

1.2. PERTURBATIONS

Observons de nouveau le système précédent.
Quelles sont les grandeurs qui peuvent faire varier le niveau d'eau du réservoir ?
- **Um(t)**, qui commande directement la fréquence de rotation du moteur et de la pompe donc le débit Q1
- **Qs(t)**, le débit d'utilisation
- **Fu(t)**, les fuites diverses dans la pompe, dans le reservoir
- **Per(t)**, les autres perturbations : évaporation, etc…

Le système réel serait régi par une relation entre h1(t) et Um(t) :
h1(t) =f(Um(t),Qs(t),Fu(t),Per(t)…)



Le système de commande **n'est pas informé des variations** dues aux perturbations (impossibilité de réagier)

UNE COMMANDE EN CHAINE DIRECTE NE PEUT PRENDRE EN COMPTE LES PERTURBATIONS

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

1.3. COMMANDE ASSERVIE

Afin de tenir compte et de corriger l'effet des perturbations, le système doit être commandé en fonction de l'écart entre le ≪ Niveau souhaité ≫ (consigne d'entrée) et la valeur effective du niveau h1. Pour cela il est nécessaire de :

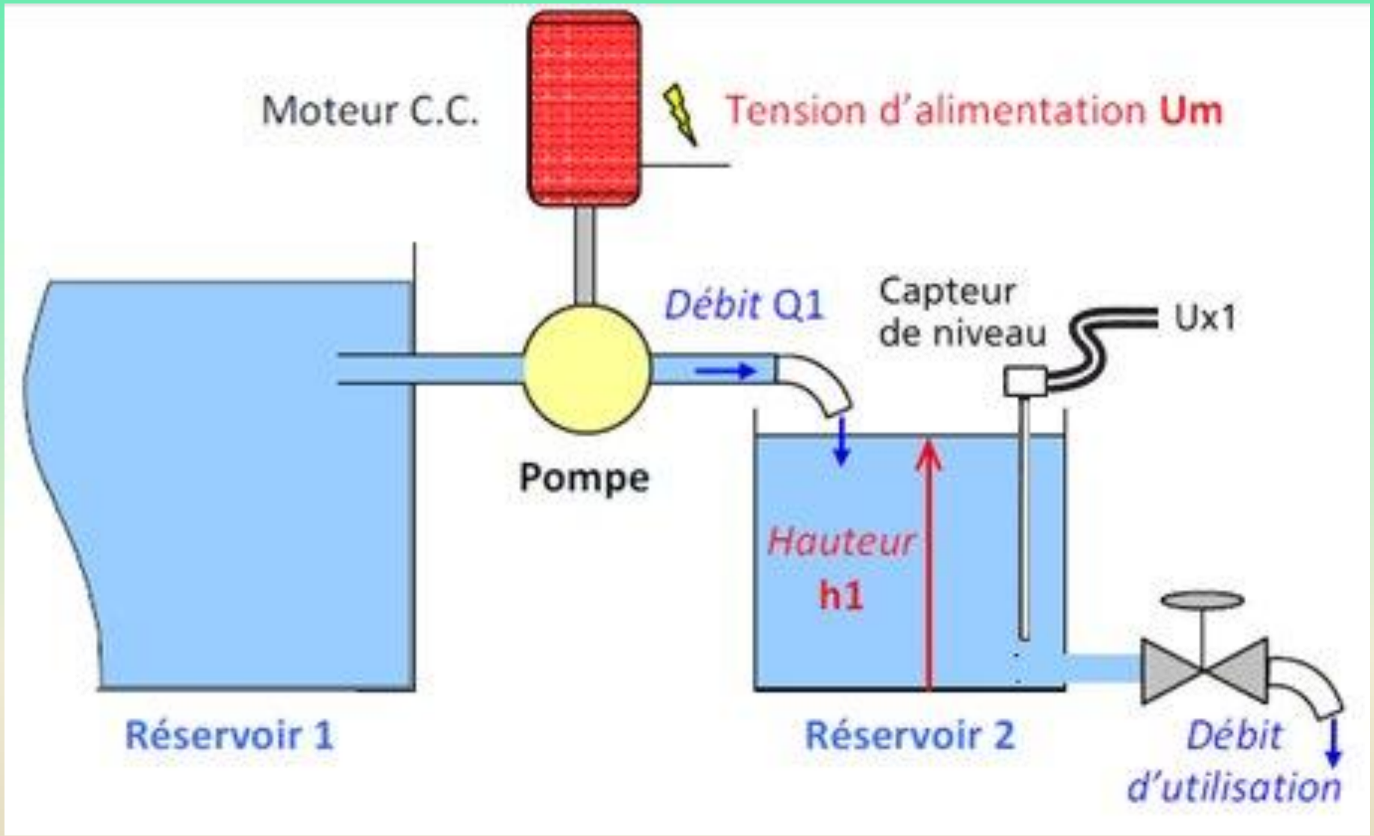
- ***MESURER*** *le niveau d'eau effectif h1(t) (capter).*
- ***COMPARER*** *le niveau d'eau effectif h1(t) avec la consigne.*
- ***MODIFIER*** *la commande du moteur en fonction de L'ECART entre le niveau actuel et la consigne*.

Nous obtiendrons ainsi une **commande asservie**, ou **commande en ≪ boucle fermée ≫**, ce qui permet d'améliorer les performances du système

UNE COMMANDE ASSERVIE S'OPPOSE AUX PERTURBATIONS

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

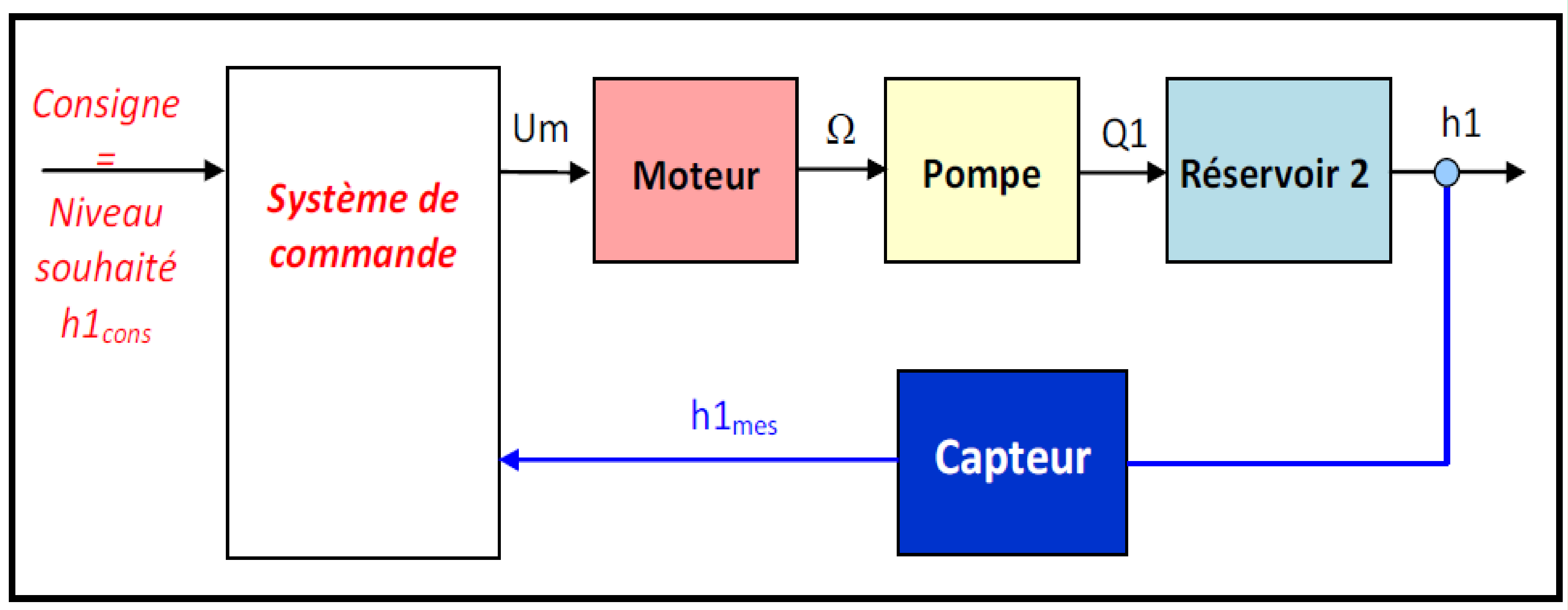
Système de remplissage de réservoir



Un capteur de mesure de la hauteur d'eau a été rajouté

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Modélisation de la commande avec mesure de la grandeur de sortie
Système de remplissage de réservoir



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

On peut definir un système asservi en trois points :

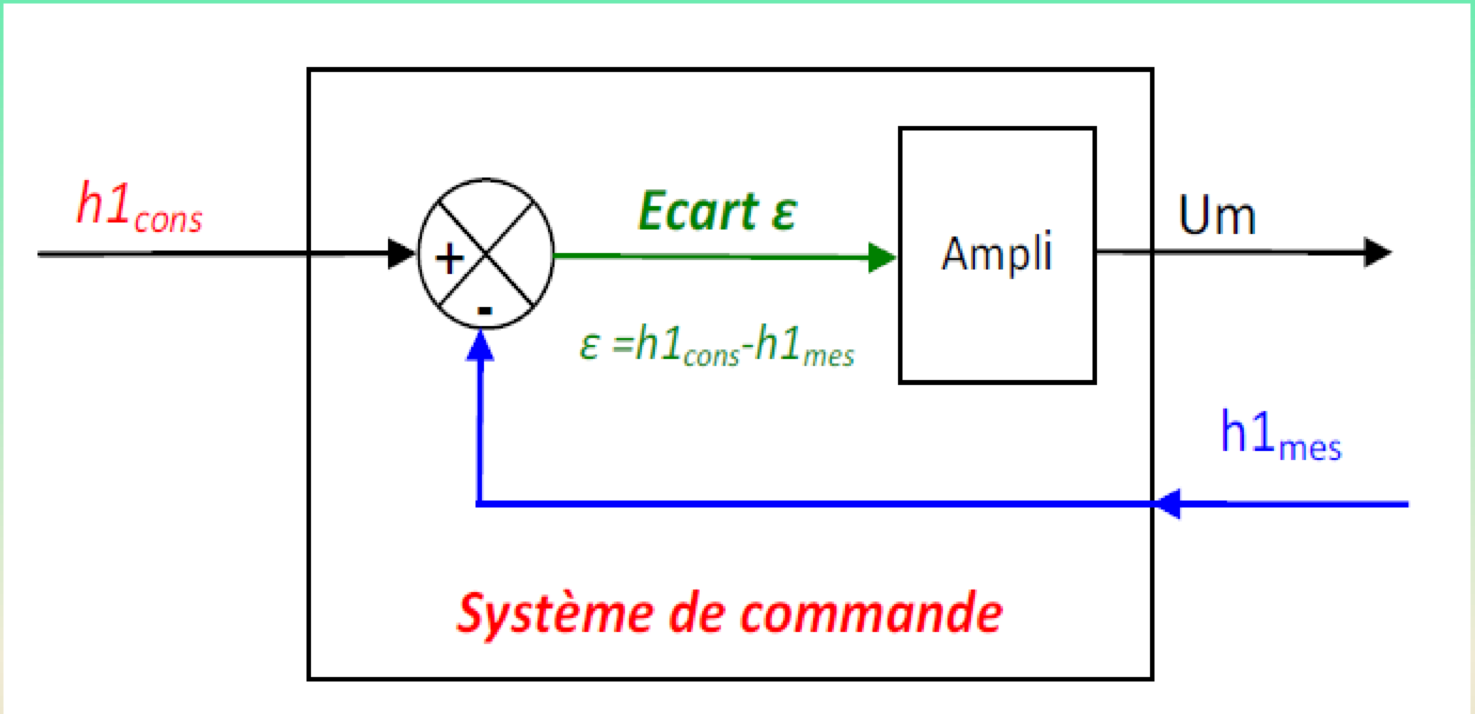
● *C'est un **système à retour** : l'évolution de la grandeur de sortie est surveillée au moyen d'un **capteur** qui la transforme en une grandeur image appelée retour*

● *C'est **un système générateur d'écart** : la grandeur de retour, image de la sortie, est comparée a la grandeur d'entrée par élaboration de la différence ou écart. On utilise pour cela un **comparateur.** Le but de l'asservissement est d'annuler en permanence cet écart, de manière a ce que la sortie suive l'entrée. La sortie est alors **asservie** a l'entrée.*

● *C'est un **système amplificateur** : l'écart est une grandeur faible et lorsqu'on se rapproche du but elle devient insuffisante pour maintenir un signal de puissance en sortie. **L'écart est donc amplifie**.*

Remarque : il faut que les grandeurs a comparer soient de même nature, et représentées avec les mêmes échelles

Représentation des systèmes linéaires continus invariants



Paradoxe de cette commande : **Amplifier un écart afin de le réduire**

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

2- STRUCTURE GENERALE D'UN SYSTÈME ASSERVI

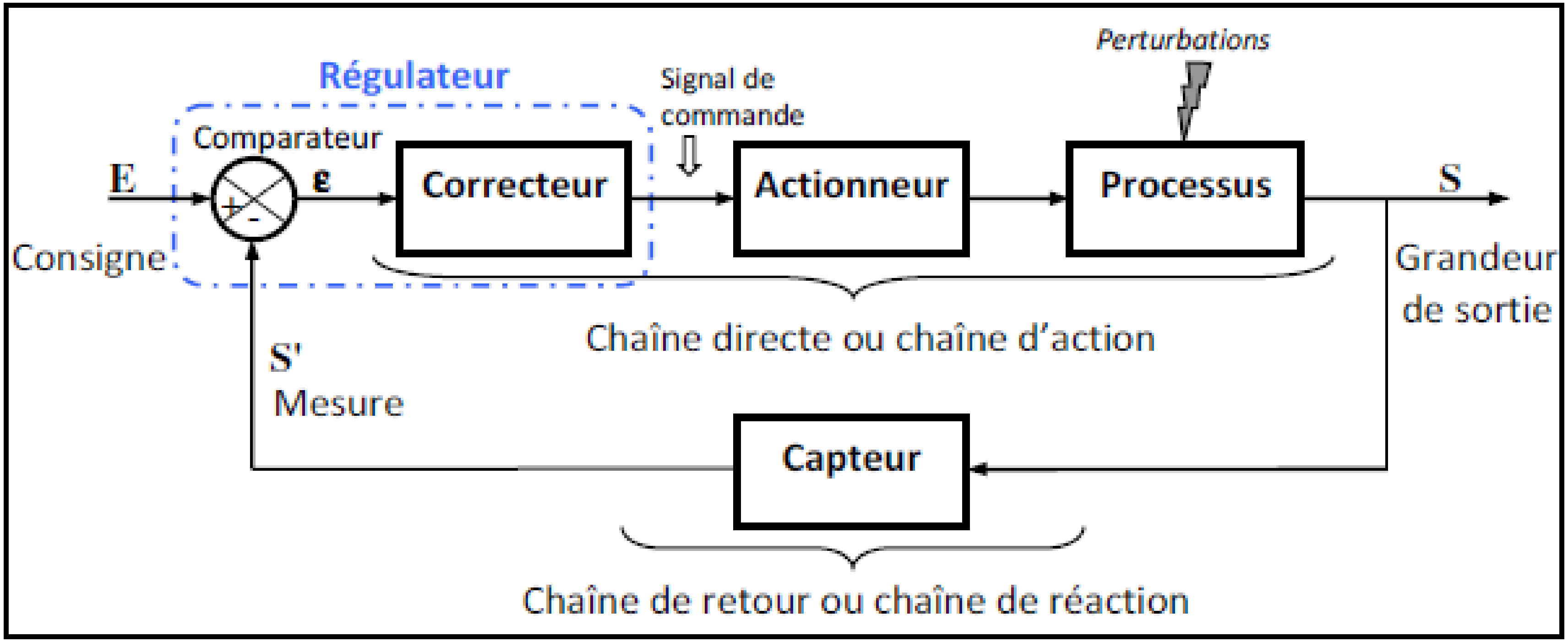


Figure 4 : Structure généraled'un système asservi

Le système asservi est caractérise par deux chaines :

- une **chaine directe ou d'action** assurant les fonctions de commande et de puissance ;
- une **chaine de retour ou de réaction** assurant la fonction de mesure.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Le **régulateur** élabore le signal de commande a partir de l'écart e (ou erreur) constate entre la consigne et la mesure issue du capteur. Il comporte :

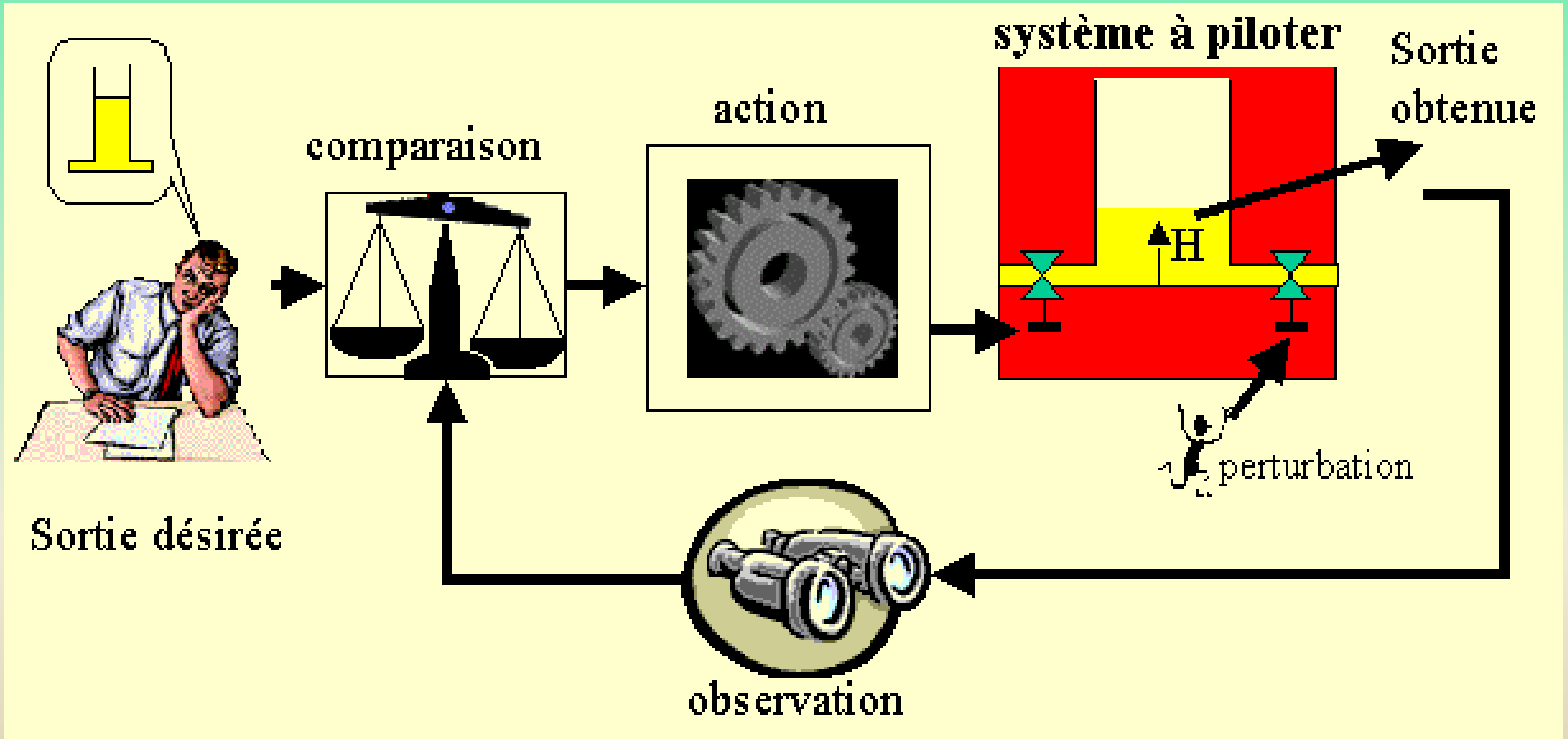
- *un **comparateur** élaborant le signal d'écart e ;*
- *un **correcteur** modifiant l'allure de la commande pour améliorer les performances du système.*

L'actionneur fournit la puissance au processus a partir du signal élabore par le régulateur.

Le processus évolue selon les lois physiques le caractérisant. Cependant, il peut subir des perturbations éxtérieures prévisibles ou non.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Schema de principe d'un asservissement



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

3. PERFORMANCES D'UN SYSTEME ASSERVI

Le cahier des charges d'un système asservi impose un certain nombre de **performances** portant sur les comportements en régime établi (**précision**) et en régime transitoire (**rapidité** et **stabilité**).

Ces trois caractéristiques sont étroitement liées. Il faut donc les rendre compatibles, ce qui passe souvent par la recherche d'un **correcteur** approprié car les exigences de précision et de stabilité imposent généralement des **réglages contradictoires**.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

3.1. LA PRECISION

Sous l'action d'un des signaux d'entrée types e(t) ci-contre, un système linéaire tend a présenter en sortie un signal s(t) du meme type (Fig.5).

*Si, en régime etabli (au bout d'un certain temps), il existe une différence entre la sortie et l'entrée, alors il y a une **erreur permanente**.*

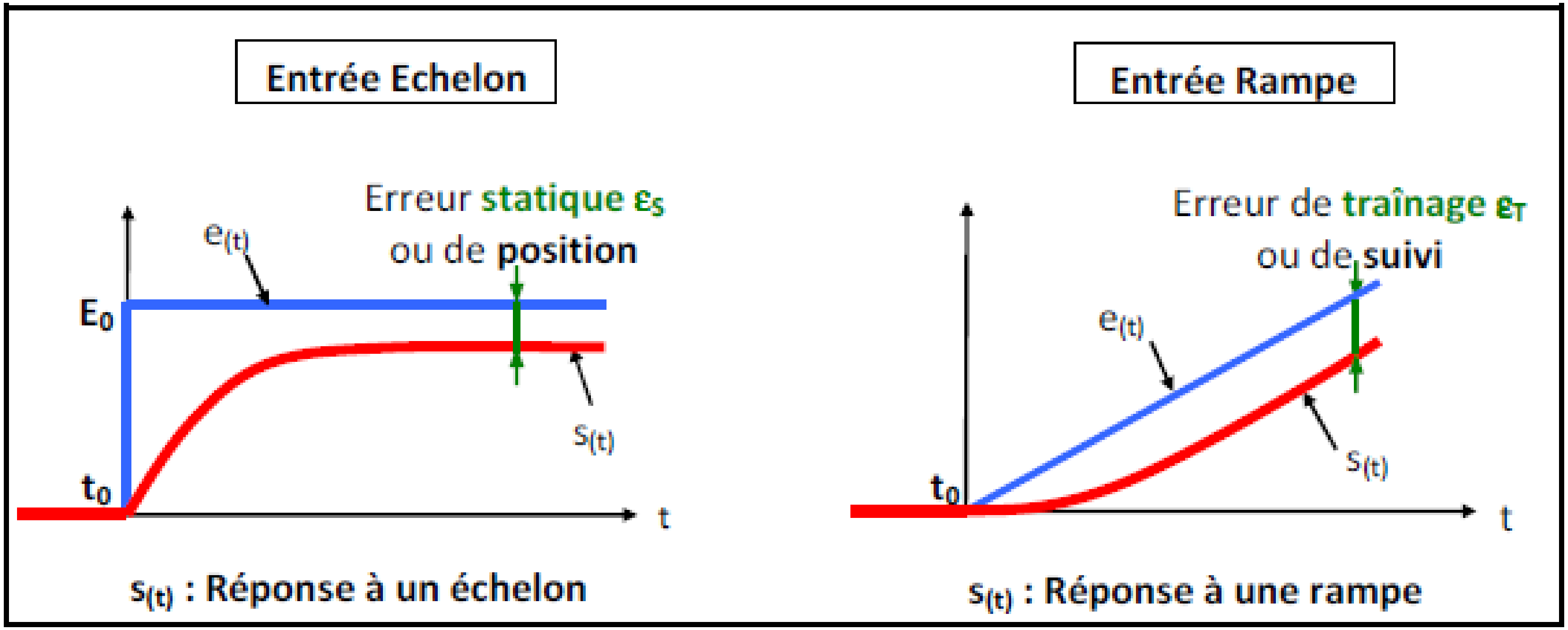


Figure 5 : Précision d'un système asservi

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

3.2. LA RAPIDITE

C'est le temps que met le système a réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (échelon). La **valeur finale S_∞** de s(t) étant souvent atteinte de manière asymptotique, la rapidité est généralement caractérisée par le **temps de réponse t_R a 5%** (Fig.6).

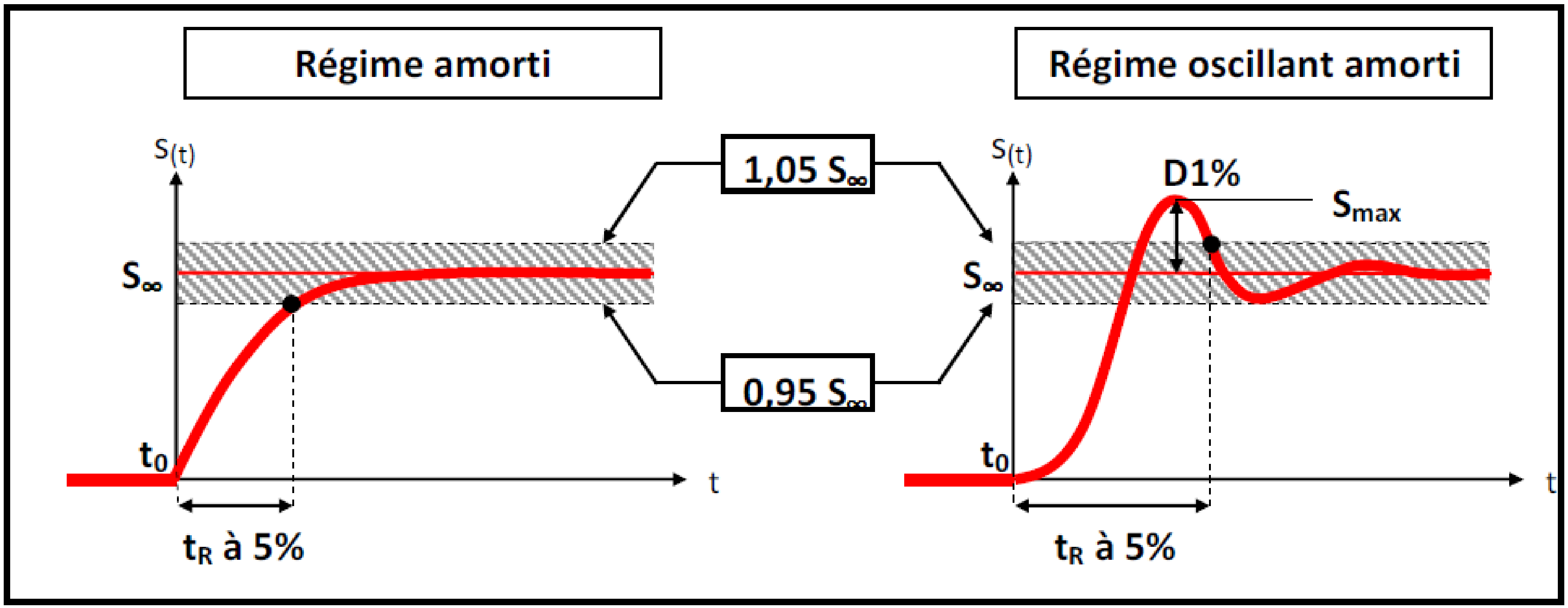


Figure 6 : Rapidité d'un système asservi

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

3.3. LA STABILITE

Pour la grande majorité des systèmes, on ne peut pas accepter, qu'à consigne constante, la grandeur de sortie ne converge pas vers une valeur constante comme présenté en figure 7

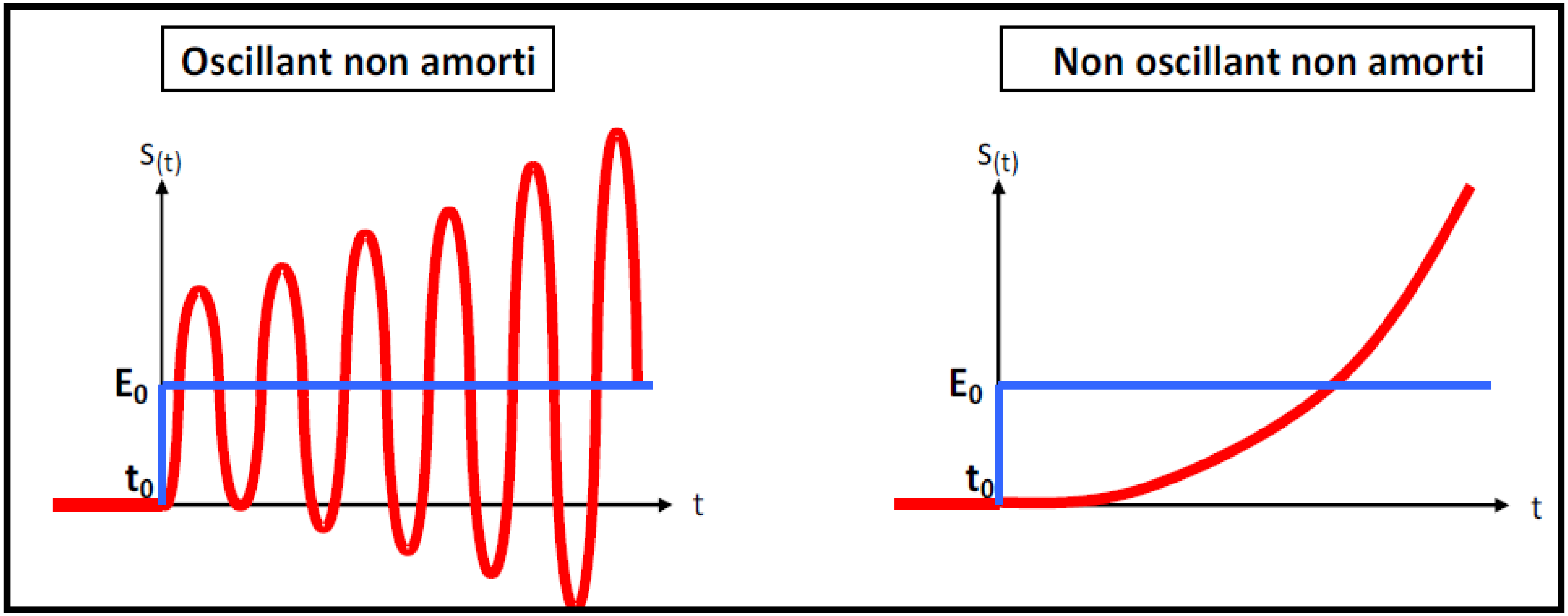


Figure 7 : Réponses caractéristiques de systèmes instables

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Le comportement que l'on souhaite normalement obtenir est semblable à ceux présentés en Figure 8.

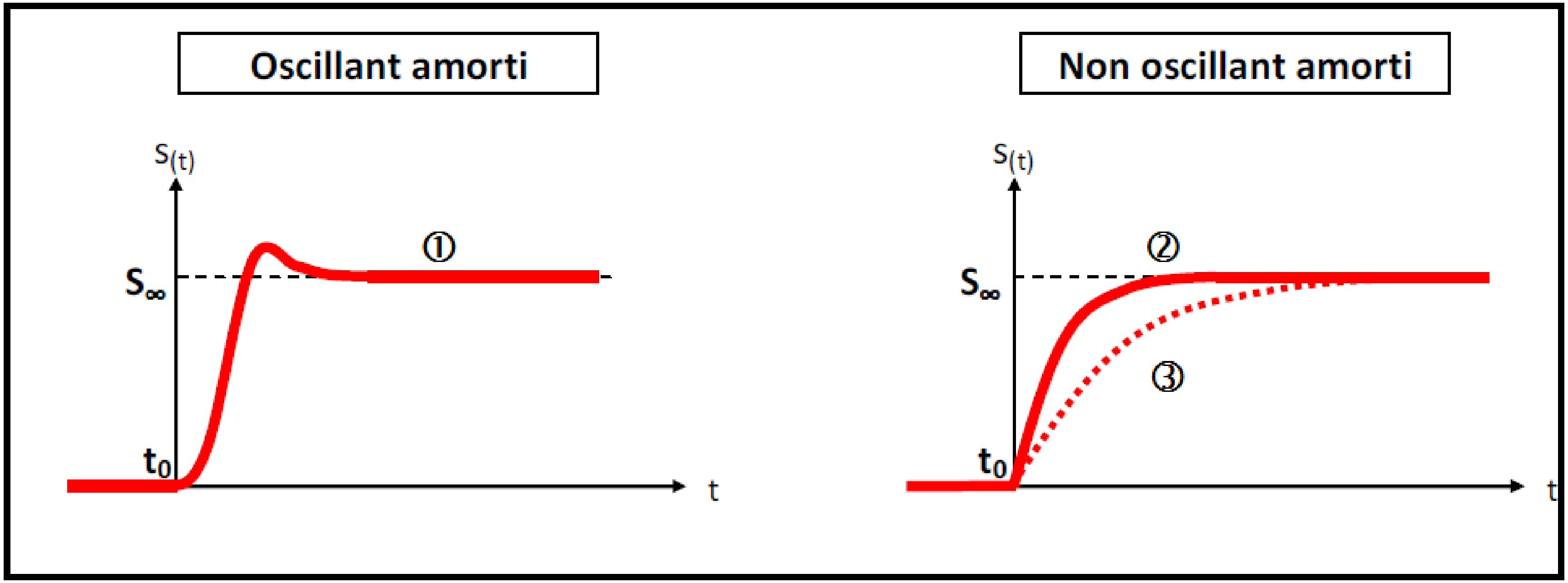


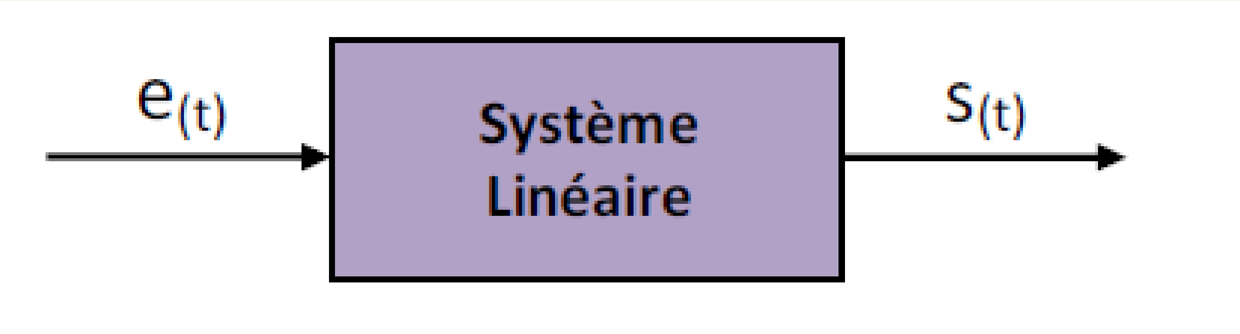
Figure 8 : Réponses caractéristiques de systèmes stables

Si l'amortissement est trop important (courbe 3), cela conduit à une perte significative de rapidité pour le système.
La réponse (1) propose un bon compromis entre **amortissement** et **rapidité** pour un système oscillant. On lui préférera la réponse (2) dans les applications ou l'amplitude des oscillations doit impérativement rester nulle.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

4. SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS

On s'intéresse aux systèmes **monovariables** à une seule entrée (la cause) et une seule sortie (effet).
Un système est dit **causal** si la cause précède l'effet, c'est le cas des systèmes physiques que nous étudierons.
On représentera le système par un schéma bloc faisant apparaitre clairement la nature de l'entrée e(t) et de la sortie s(t) (position, vitesse, température, tension...):



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

4.1. SYSTEME LINEAIRE

Un système est dit **linéaire** si la fonction qui le décrit est elle-même linéaire.

- L'effet s(t) est proportionnel à la cause e(t) (Fig. 9)
- La propriété mathématique de linéarité permet d'écrire le **théorème de superposition** (Fig. 10).

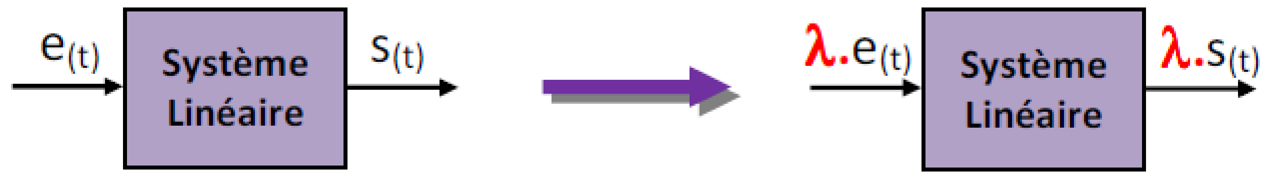


Figure 9 : L'effet est proportionnel à la cause

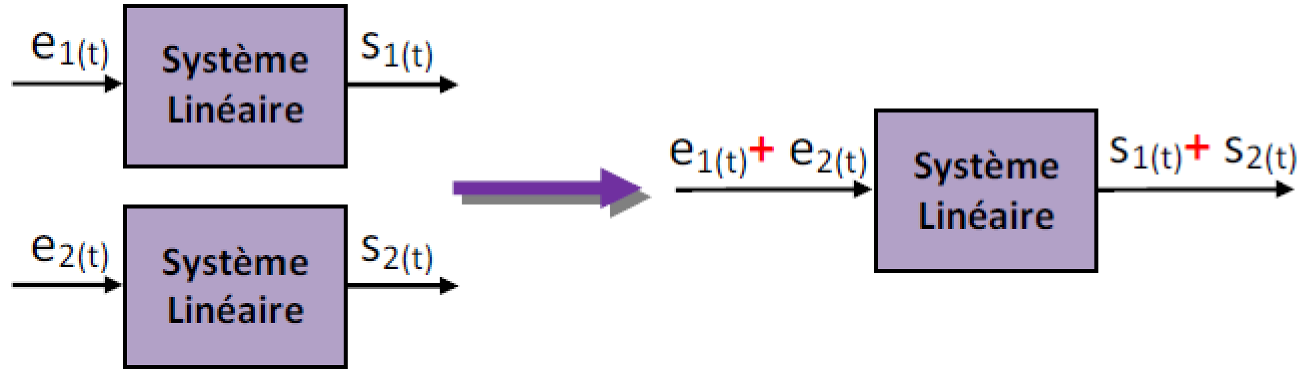


Figure 10 : Principe de superposition.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

En pratique, très peu de systèmes ont véritablement un comportement linéaire sur toute leur plage d’utilisation.

On peut toutefois la plupart du temps **linéariser le comportement (la fonction entrée-sortie) du système autour d’un point de fonctionnement** sans commettre trop d’erreur.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

4.2. SYSTEME CONTINU

Un système est dit **continu**, par opposition, à un système **discret,** lorsque les variations des grandeurs physiques le caractérisant sont des fonctions continues du temps f(t) (Figure 11).

La fonction f(t) est donc définie en toute valeur de t.

Le système continu est également souvent appelé **système analogique**.

A l'inverse, les données traitées par informatique sont toujours discontinues, on parle alors de **système échantillonné** ou **numérique.**

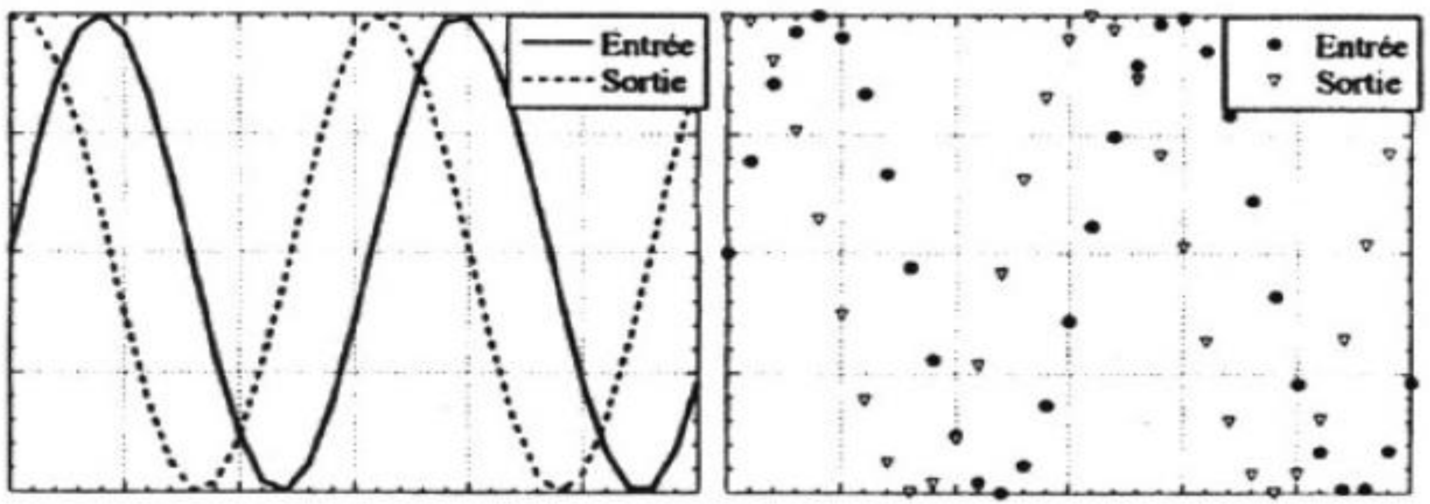


Figure 11 : Système continu (à gauche) et système discret (à droite)

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

4.3. SYSTEME INVARIANT

Si x1(t) induit y1(t) alors pour tout décalage temporel τ, x1(t- τ) induit y1(t- τ).

*Un système est **invariant** si les relations sortie-entrée ne se modifient pas au cours du temps.*
*C'est un système dont les **caractéristiques ne varient pas au cours du temps.***

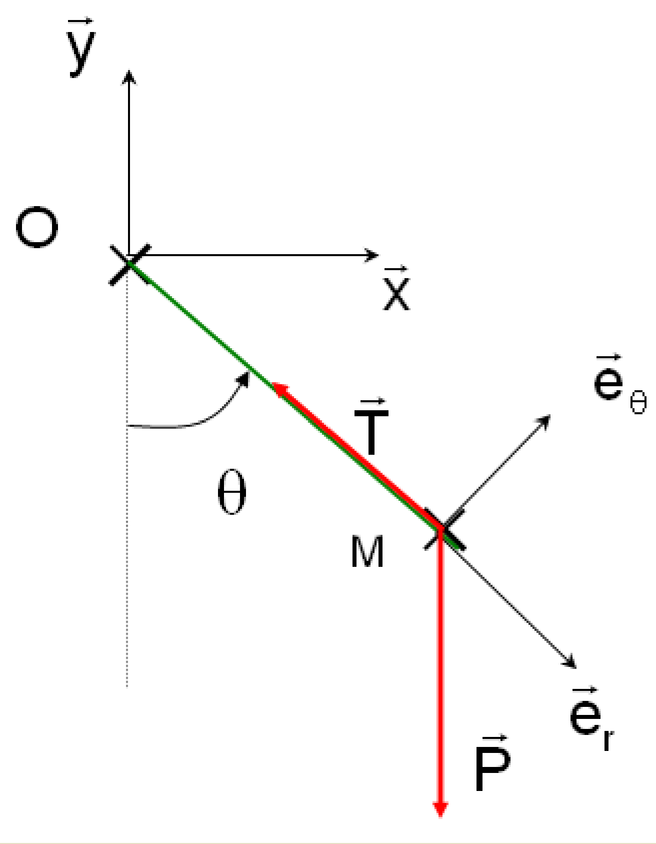
Représentation des systèmes linéaires continus invariants

4.4. EXEMPLES DE SYSTEMES LINEAIRES

● LE PENDUL E

L'application du Principe Fondamental de la Dynamique a la masse M permet d'obtenir l'équation de mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

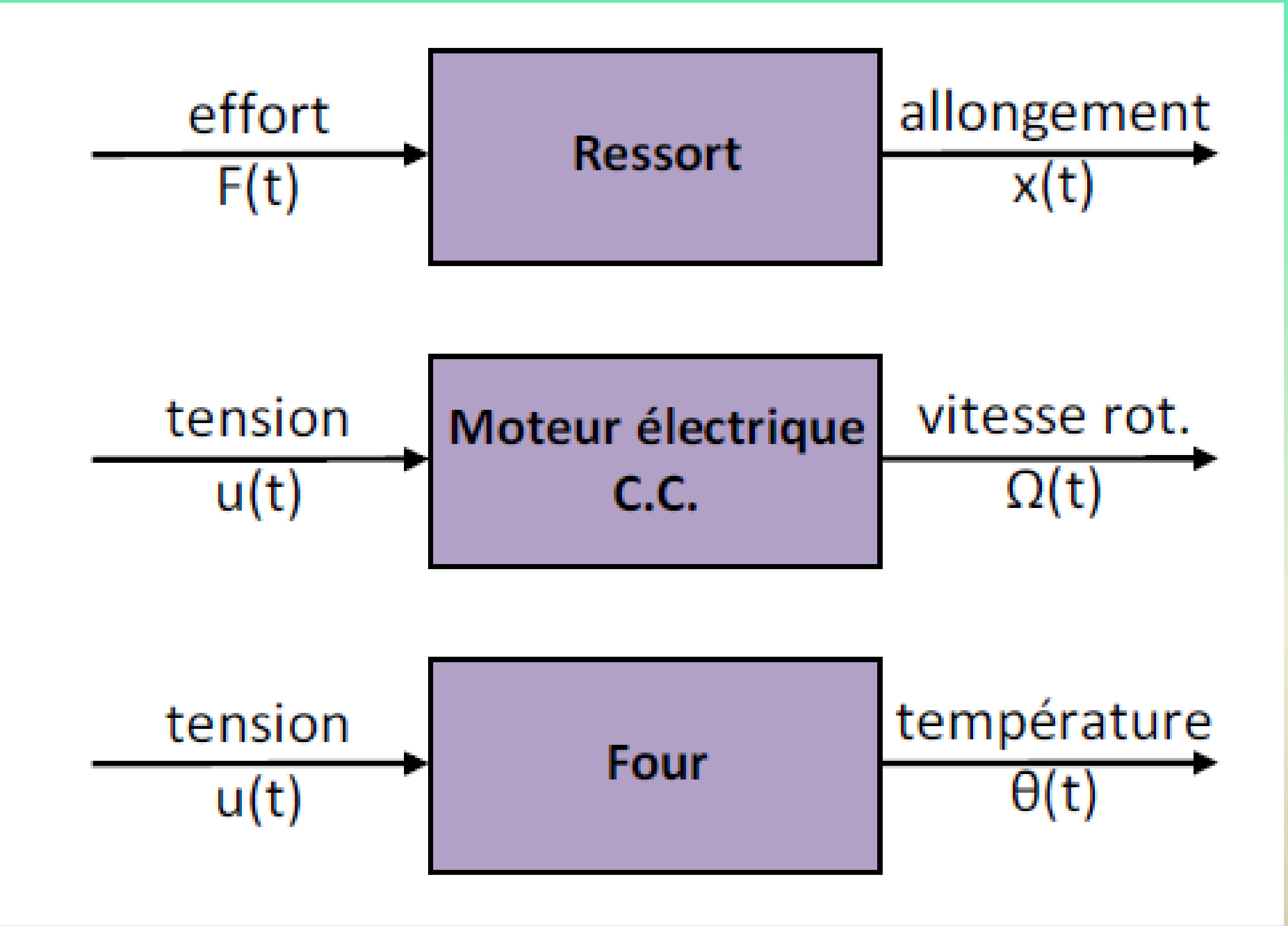


Cette équation n'est pas linéaire, mais dans l'hypothèse de petits mouvements autour de la position d'équilibre, il est possible d'approximer sin θ par θ, donc d'obtenir une équation differentielle linéaire :

$$\ddot{\theta} + \omega_0{}^2.\theta = 0 \qquad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

● AUTRES EXEMPLES



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

5 - MODELISATION DES S.L.C.I

Comme nous l'avons évoqué, la plupart des systèmes ne sont ni continus, ni invariants, ni linéaires. On se ramènera aux SLCI en faisant des hypothèses simplificatrices.
C'est le coeur du travail de l'ingénieur que d'établir des modèles pertinents collant au mieux a la réalité tout en connaissant leurs limites.
Les systèmes que nous allons étudier ont des relations entrées-sorties modélisables par **des équations différentielles linéaires a coéfficients constants.**
Nous étudierons les systèmes du **premier** et du **second ordre**.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

5-1. SYSTEME DU PREMIER ORDRE :

CIRCUIT RL

Considérons le circuit de la figure . On prend la tension e (t) comme variable d'entrée et la tension u(t) comme variable de sortie.

Les équations électriques nous donnent :

- $e(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t)$
- $u(t) = Ri(t)$

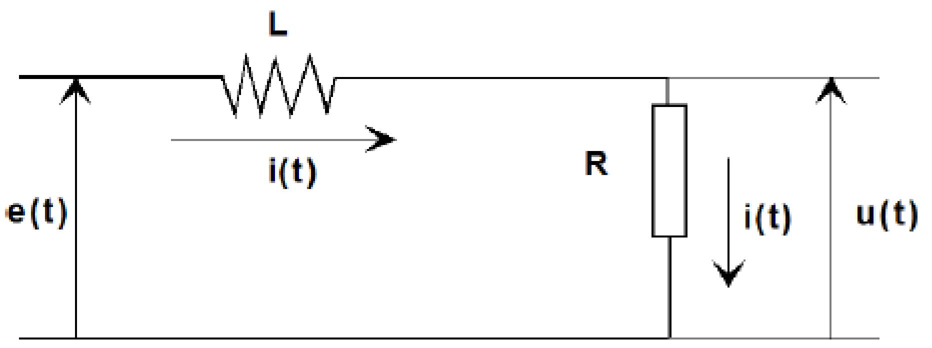


Figure 12 : Circuit RL (1er ordre)

Nous obtenons donc l'équation différentielle du premier ordre:

$$\frac{L}{R}\dot{u}(t) + u(t) = e(t)$$

*Soit, **sous forme canonique :***

$$\boxed{\tau\dot{s}(t) + s(t) = Ke(t)}$$

avec :

τ: constante de temps du système

K : gain du système

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

5-2. SYSTEME DU SECOND ORDRE : MASSE RESSORT- AMORTISSEUR

Considérons le système masse-ressort-amortisseur de la figure.
La force x(t) est prise comme variable d'entrée et l'allongement par rapport à l'equilibre y(t) comme variable de sortie.

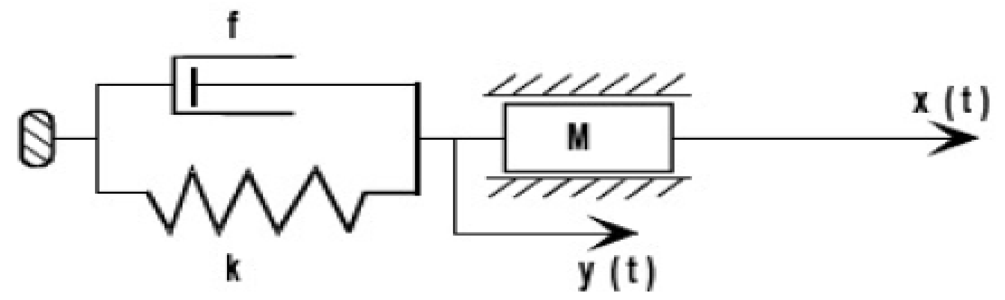


Figure 13 : Système masse ressort amortisseur (2[nd] ordre)

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique a la masse M, nous obtenons l'équation différentielle du second ordre:

$$\ddot{y}(t) + \frac{f}{M}\dot{y}(t) + \frac{k}{M}y(t) = \frac{x(t)}{M}.$$

on pose

- $\frac{k}{M} = \omega_0^2$, avec $\omega_0 (rad.s^{-1})$ pulsation propre des oscillations libres ou pulsation propre non amortie.
- $\frac{f}{M} = 2\xi\omega_0$, avec ξ (ksi) coefficient d'amortissement (sans unité). Il est aussi noté z ou m.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

L'équation précédente s'écrit donc sous ***forme canonique :***

$$\boxed{\ddot{s}(t) + 2\xi\omega_0\dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

5-3. GENERALISATION

D'une manière générale, on représente un système linéaire, continu et invariant par une équation différentielle linéaire à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée x(t) et celles de sortie y(t) :

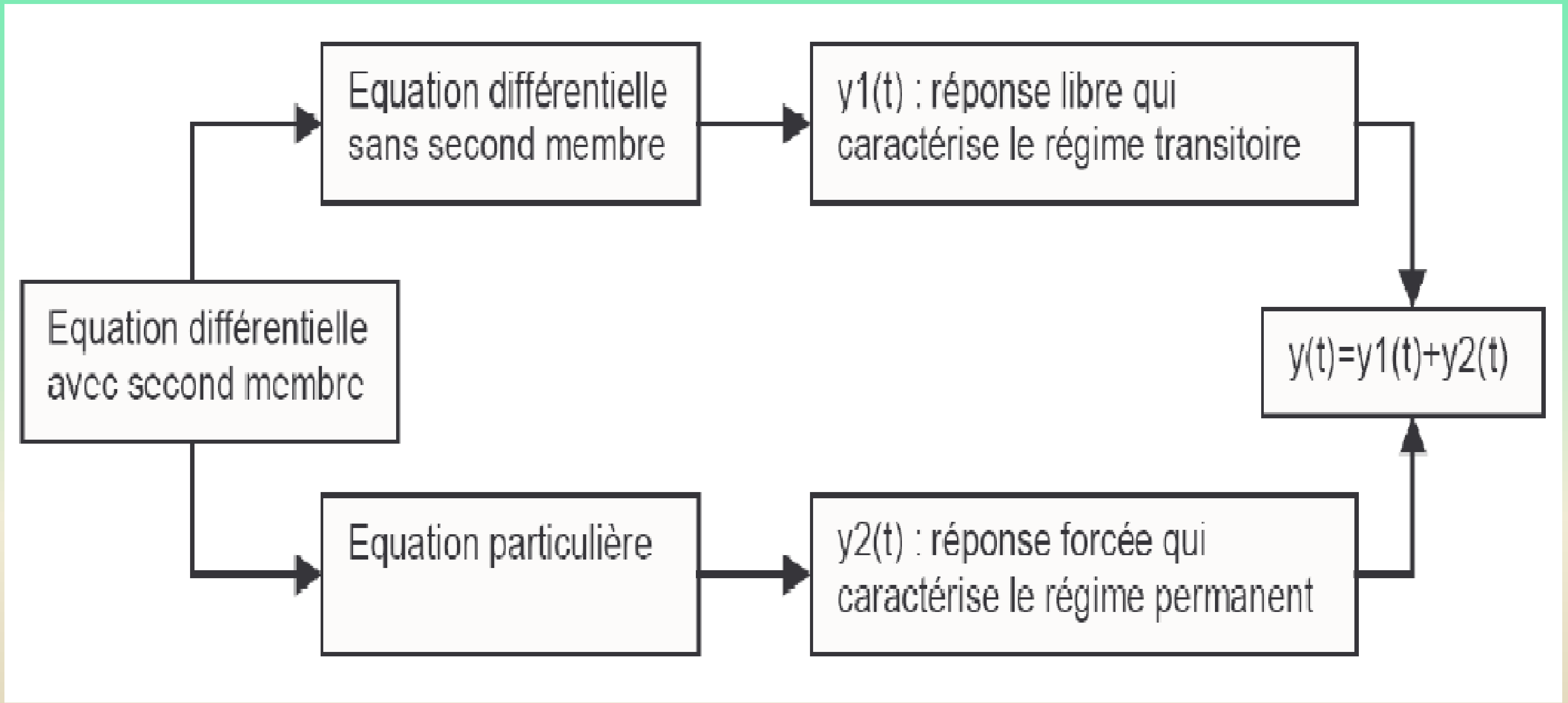
$$\boxed{a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t)}$$

La solution d'une telle équation s'obtient en ajoutant une solution particulière a la solution générale sans second membre. Pour des ordres >2, la solution y(t) est difficile à obtenir de manière analytique.

Nous utiliserons la **transformation de Laplace** qui permet d'obtenir une **relation algébrique** entre la sortie et l'entrée, sans avoir à résoudre l'équation différentielle.

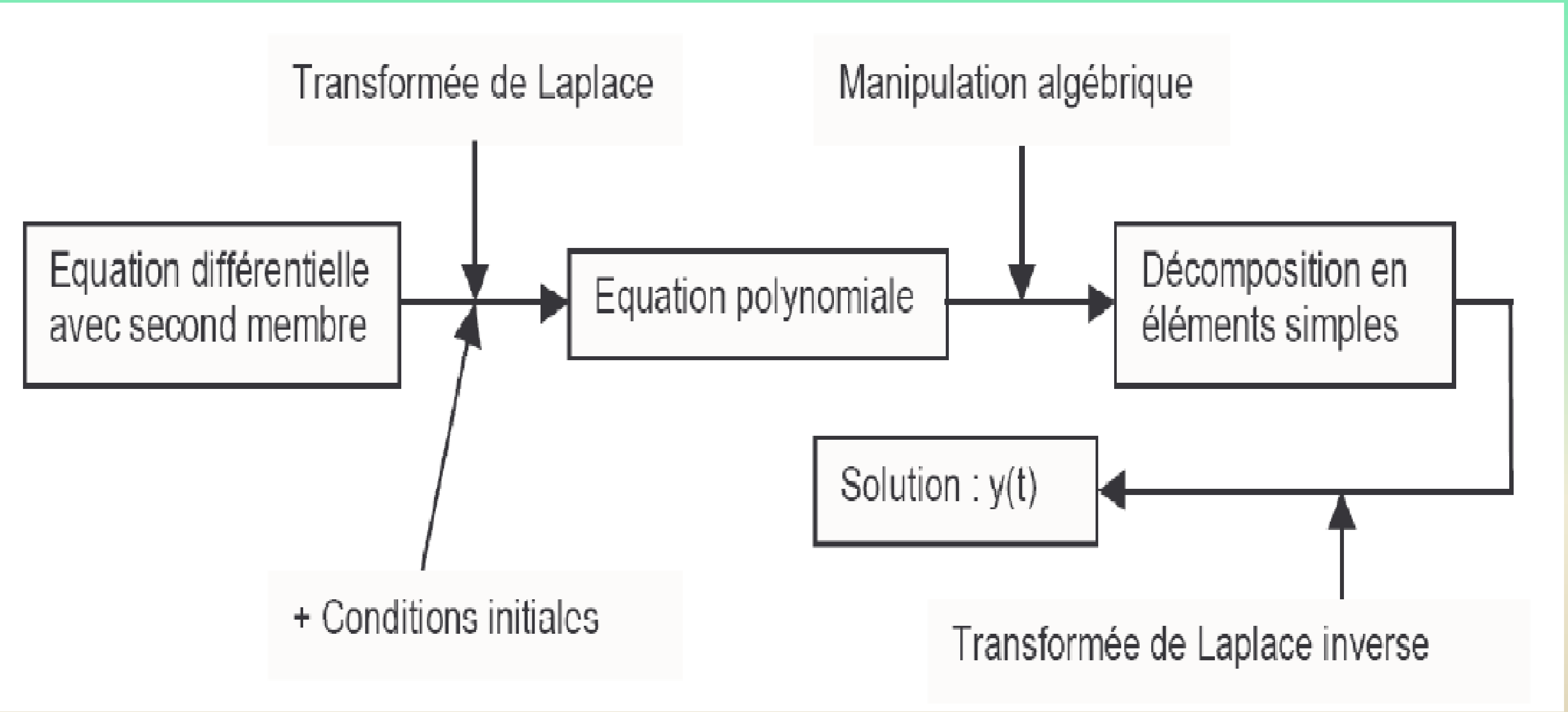
Représentation des systèmes linéaires continus invariants

RESOLUT ION CLASSIQUE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

RESOLUTION DES EQUAT IONS DIFFERENTIELLES AVEC LA TRANSFORMEE DE LAPLACE



6 - RESOLUTION DES E.D. PAR TRANSFORMEE DE LAPLACE

Nous avons pu voir au cours des Travaux Diriges que la modélisation d'un système linéaire conduit à une équation différentielle qu'il est parfois délicat de résoudre avec les méthodes ≪ classiques ≫ (ordre supérieur a 2, forme du second membre…).

La **transformation de Laplace** est l'outil mathématique qui nous **permettra de résoudre les E.D.** associées aux différents problèmes que nous serons amenés à rencontrer en Sciences Industrielles pour l'Ingénieur.

Un peu de théorie s'avère donc nécessaire…

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

6-1. DEFINITION

La **transformée de Laplace** est une **transformation mathématique** qui permet de **transformer une équation différentielle** en **équation polynomiale**.
Cela **simplifie considérablement** la résolution des équations qui s'effectue alors dans le **domaine symbolique**.

La transformée de Laplace de la fonction temporelle f(t) est notée:

$$\boxed{F(p) = \mathcal{L}[f(t)]}$$

Elle est définie par l'operateur $\mathcal{L}$, qui a une fonction f(t) dans le **domaine temporel** associe une fonction F(p) dans le **domaine symbolique**, suivant :

$$\boxed{f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}.f(t).dt}$$

Où la variable p peut être reelle ou complexe

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Dans la pratique, on ne calcule que les transformées de Laplace de fonctions causales c'est-a-dire telles que f(t) = 0 pour t < 0. Ces fonctions f représentent des grandeurs physiques: intensité, température, effort, vitesse,…

6-2. THEOREMES

- UNICITE

$\mathcal{L}$ est bijective:
a f(t) correspond F(p) unique,
a F(p) correspond f(t) unique.

- LINEARITE

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\lambda.f(t)\right] = \lambda.\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \lambda.F(p)}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f_1(t) + f_2(t)\right] = \mathcal{L}\left[f_1(t)\right] + \mathcal{L}\left[f_2(t)\right] = F_1(p) + F_2(p)}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

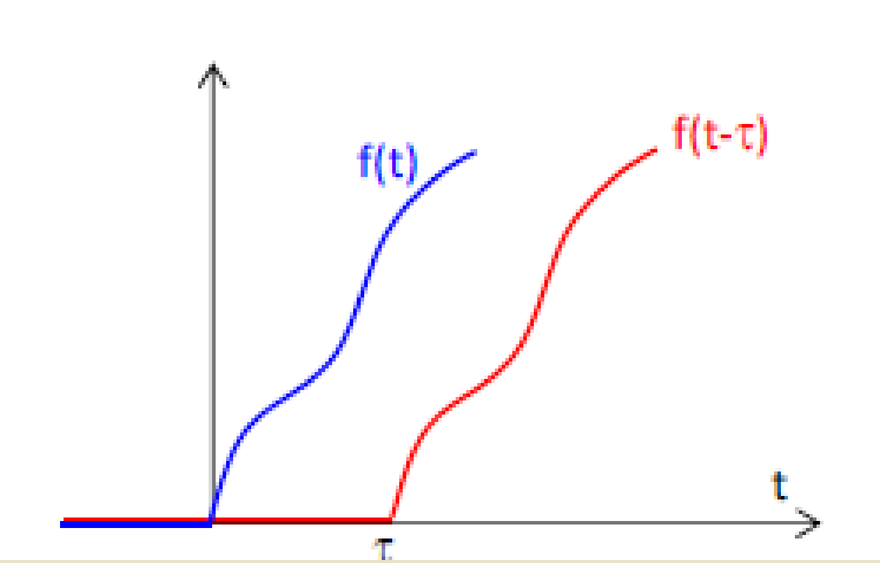
6-2. THEOREMES(suite)

● THEOREME DU RETARD

Considérons la fonction temporelle f(t) à laquelle on applique un retard t=τ

On a alors pour la fonction retardée

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p}.F(p)}$$



On fera appel a ce théorème lorsque l'on souhaitera par exemple introduire un phénomène de retard dans le comportement du système étudié.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

6-2. THEOREMES(suite)

TRANSFORMEE DE LA DERIVEE

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p.F(p) - f(0^+)}$$

et pour la dérivée seconde:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = p^2.F(p) - p.f(0^+) - f'(0^+)}$$

En ayant deja calculeéau préalable la transformée de Laplace de la fonction f(t), ce théorème nous permettra d'obtenir rapidement les transformées de ses derivées successives.

ATTENTION AUX CONDITIONS INITIALES

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

6-2. THEOREMES(suite)

● TRANSFORMEE DE L'iNT EGRALE

Soit $f(t) = \left[\dfrac{dg(t)}{dt}\right]$. On a alors pour la transformée de l'intégrale :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}}$$

Remarque fort utile par la suite… :

Si les conditions initiales sont nulles (**conditions d'Heaviside**)

• **DERIVER** par rapport a t dans le domaine temporel revient à **MULTIPLIER par p** dans le domaine symbolique

• **INTEGRER** dans le domaine temporel revient à **DIVISER par p** dans le domaine symbolique.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

6-2. THEOREMES(suite)

- THEOREME DE LA VALEUR INITIALE

$$\boxed{\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to \infty} p.F(p)}$$

Grâce a ce théorème, nous pourrons déterminer la valeur initiale d’une fonction, à partir de calculs de limites avec sa transformée

- THEOREME DE LA VALEUR FINALE

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p.F(p)}$$

Grâce a ce théorème, nous pourrons déterminer la valeur en régime permanent d’une fonction, a partir de calculs de limites avec sa transformee

Remarque: ces deux derniers résultats n'ont de sens que si les limites existent.

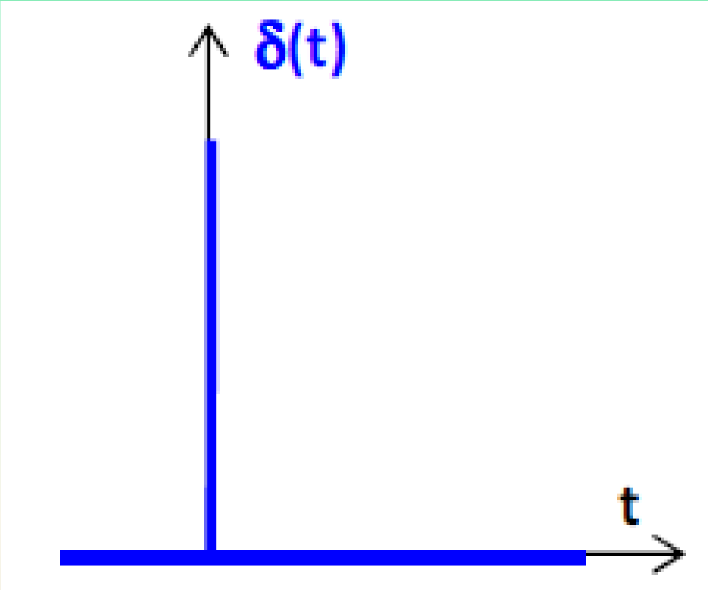
Représentation des systèmes linéaires continus invariants

6-3. TRANSFORMEE DES SIGNAUX TEST

● FONCTION DE DIRAC (OU IMPULSION UNITE) δ(T)

Il modélise une ≪ impulsion **d'amplitude infinie** pendant une durée **négligeable** ≫, par exemple : un **choc** mécanique, électrique, thermique...

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta(t)] = 1}$$

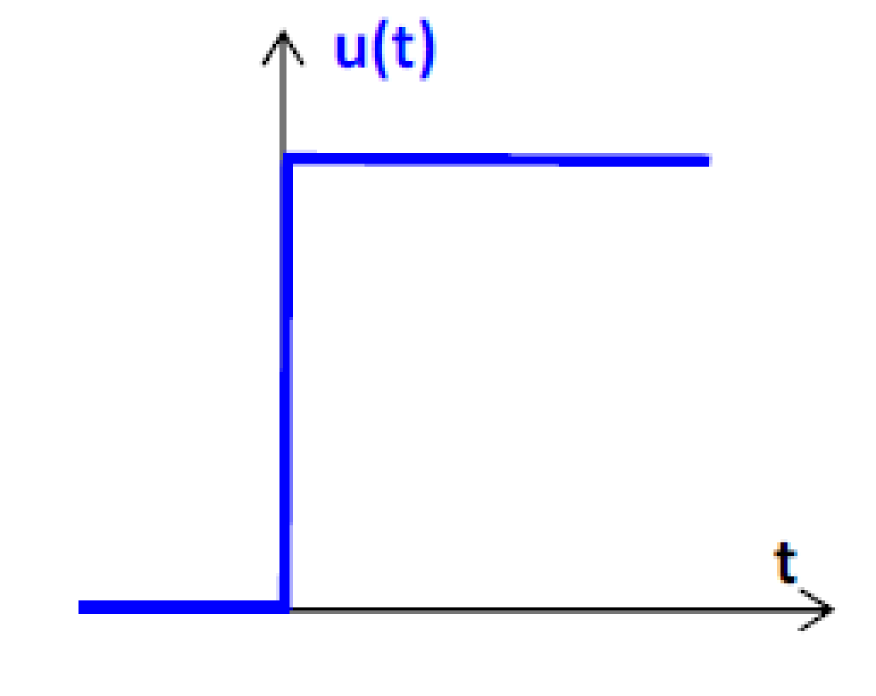


Représentation des systèmes linéaires continus invariants

6-3. TRANSFORMEE DES SIGNAUX TEST(suite)

● FONCTION ECHELON UNITE U(T)

$$\boxed{\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{p}}$$

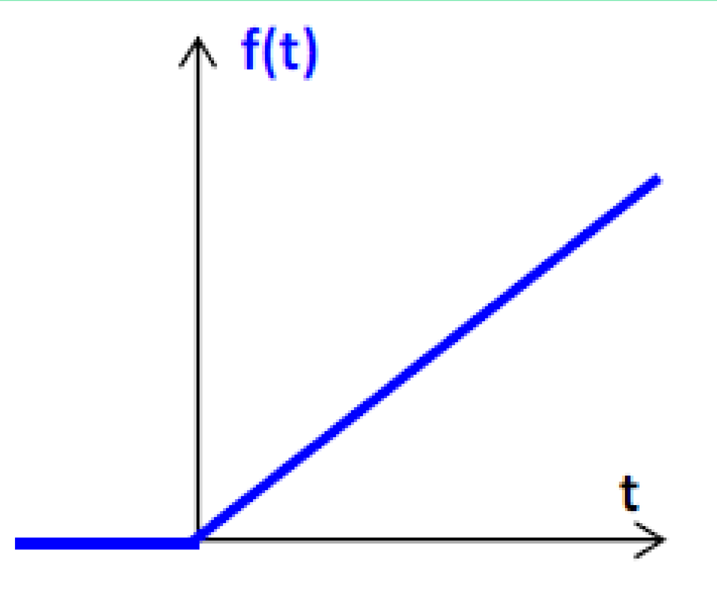


Représentation des systèmes linéaires continus invariants

6-3. TRANSFORMEE DES SIGNAUX TEST(suite)

● FONCTION RAMPE DE PENTE UNITAIRE

$$\boxed{\mathcal{L}[t.u(t)] = \frac{1}{p^2}}$$



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

6-3. TRANSFORMEE DES SIGNAUX TEST(suite)

- FONCTIONS SINUSOIDALES

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t).u(t)\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega t).u(t)\right] = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

- FONCTION EXPONENTIELLE

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}.u(t)\right] = \frac{1}{p+a}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

6-4. TABLEAU RECAPITULATIF

$f(t)u(t)$	$F(p)$	$f(t)u(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
K	$\frac{K}{p}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
Kt	$\frac{K}{p^2}$	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$1-e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$		

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

6-5. TRANSFORMEE INVERSE

Les transformées de Laplace donnent des fonctions de p qui sont des fractions rationnelles que l'on décompose en éléments simples pour revenir au domaine temporel.

Exemple: *soit un système régi par l'équation différentielle*

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 5\frac{ds(t)}{dt} + 6s(t) = e(t)$$

avec s(0) = 2, s'(0) = 2 et e(t) = 6 u(t)

On applique la transformation de Laplace a cette équation:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2s(t)}{dt^2}\right] + 5.\mathcal{L}\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] + 6.\mathcal{L}[s(t)] = \mathcal{L}[e(t)]$$

$$p^2.S(p) - p.s(0) - s'(0) + 5[p.S(p) - s(0)] + 6.S(p) = E(p)$$

$$p^2.S(p) - 2.p - 2 + 5[p.S(p) - 2] + 6.S(p) = \frac{6}{p}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

$$p^2.S(p) - p.s(0) - s'(0) + 5\left[p.S(p) - s(0)\right] + 6.S(p) = E(p)$$

$$p^2.S(p) - 2.p - 2 + 5\left[p.S(p) - 2\right] + 6.S(p) = \frac{6}{p}$$

Soit $$S(p) = \frac{2p^2 + 12p + 6}{p(p^2 + 5p + 6)}$$

On décompose cette fraction en éléments simples : $$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$$

Par identification, on trouve $$S(p) = \frac{1}{p} + \frac{5}{p+2} - \frac{4}{p+3}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

A partir de l'expression

$$S(p) = \frac{1}{p} + \frac{5}{p+2} - \frac{4}{p+3}$$

On retourne au domaine temporel en prenant dans le tableau précédent les transformées inverses, d'où:

$$\boxed{s(t) = (1 + 5\,e^{-2t} - 4\,e^{-3t}).\,u(t)}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

7 - FONCTIONS DE TRANSFERT

7-1. DEFINITION

Soit un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 e(t)$$

On se place dans le cas de **conditions initiales nulles** (conditions d'Heaviside): le niveau initial du système importe peu, c'est sa réaction a une perturbation à partir d'un état stable que l'on souhaite étudier. On peut donc toujours se ramener à des conditions initiales nulles avec un changement d'origine.

D'après le théorème de la derivée:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right] = p^n.S(p)$$

Ce qui nous permet d'appliquer la transformation de Laplace à l'équation différentielle précédente :

$$a_n.p^n.S(p) + a_{n-1}.p^{n-1}.S(p) + \dots + a_0.S(p) = b_m.p^m.E(p) + b_{m-1}.p^{m-1}.E(p) + \dots + b_0.E(p)$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

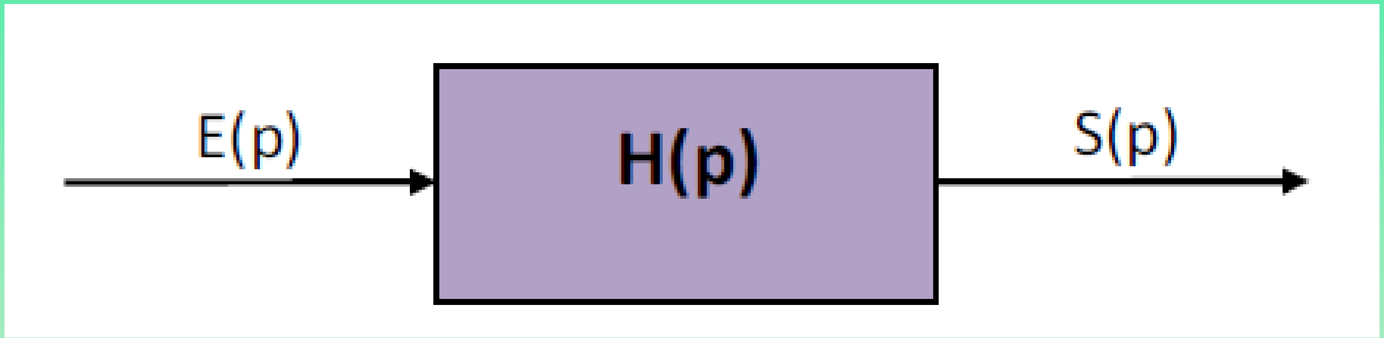
*On appelle **fonction de transfert H(p)** du système (ou transmittance), le rapport:*

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \ldots + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_0}}$$

Dans le domaine symbolique, la relation entre l'entrée et la sortie s'écrit donc

$$\boxed{S(p) = H(p).E(p)}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants



La fonction de transfert représente le comportement du système et s'exprime simplement comme le rapport de deux polynômes en p (fraction rationnelle) construits a partir des coefficients de l'équation differentielle régissant son evolution.

Remarque:
si l'entrée est une impulsion de Dirac, on a alors S(p) = H(p).1 = H(p)

La fonction de transfert représente donc la transformée de Laplace de la réponse "impulsionnelle".

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

7.2. EXEMPLE : MODELISATION D'UNE MOTORISATION PAR MOTEUR A COURANT CONTINU

On rappelle ci-dessous les équations régissant le comportement d'un moteur à courant continu.

Equation électrique *(Loi des mailles):*

$$u_{(t)} = R\, i_{(t)} + L \frac{di_{(t)}}{dt} + e_{(t)} \quad (E_1)$$

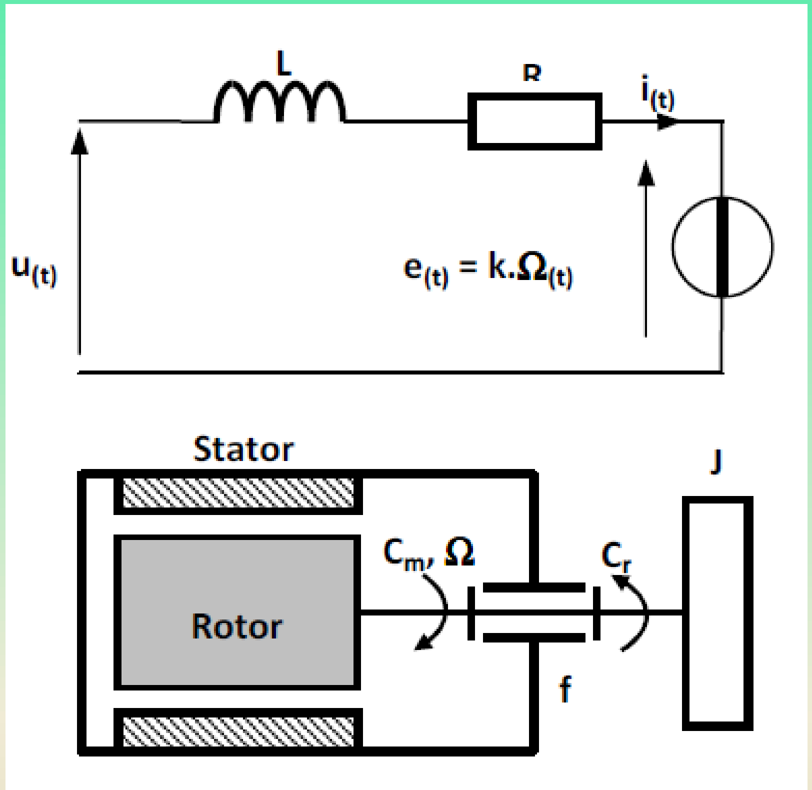
Equation mécanique *(T.M.D.):*

$$J \frac{d\Omega_{(t)}}{dt} = C_{m(t)} - C_{r(t)} - f\,\Omega_{(t)} \quad (E_2)$$

Equations de couplage électro-mécanique :

$$e_{(t)} = k\,\Omega_{(t)} \quad (E_3)$$

$$C_{m(t)} = k\, i_{(t)} \quad (E_4)$$



u(t) et **i(t)** : tension et courant d'induit
L et **R** : inductance et resistance d'induit
e(t) : tension de force contre electromotrice (fcem)
k : constante de couple ou constante de fcem.

Cm(t) : couple moteur
Cr(t) : couple résistant
Ω(t) : taux de rotation de l'induit
f : coefficient de frottement visqueux
J : moment d'inertie du rotor

On **négligera** par la suite le **couple résistant** : **Cr(t) = 0.**

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Dans ces conditions, si on passe dans le domaine de LAPLACE, il vient :

$$(E_1) \text{ et } (E_3) \Rightarrow U(p) = (R + Lp) \times I(p) + k\,\Omega(p)$$

$$(E_2) \text{ et } (E_4) \Rightarrow (f + Jp) \times \Omega(p) = kI(p)$$

On tire de ces deux des relations algebriques :

$$U(p) = \frac{(R + Lp) \times (f + Jp)}{k}\,\Omega(p) + k\,\Omega(p)$$

Ce qui conduit a :

$$\boxed{H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{k}{k^2 + Rf + (RJ + Lf)p + LJ(p)^2}}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

7-3. FORME CANONIQUE D'UNE FONCTION DE TRANSFERT

Les fonctions de transfert peuvent être mises sous la forme générale suivante, ***appelée forme canonique :***

$$\boxed{H(p) = \frac{K(1 + \ldots + b_{m'}\, p^{m'})}{p^{\alpha}(1 + \ldots + a_{n'}\, p^{n'})}}$$

avec ***n' = ordre du système***

***α** = classe du système*

K = gain statique

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

7-4. FORME ZEROS/POLES D'UNE FONCTION DE TRANSFERT

En explicitant les racines (complexes éventuellement) de ces polynômes, H(p) peut s'écrire:

$$\boxed{H(p) = \frac{K(p - z_1)(p - z_2)\ldots(p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2)\ldots(p - p_n)}}$$

***les z_i sont les zéros et les p_i les pôles** de la fonction de transfert.*

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

7-5. FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME DU PREMIER ORDRE

La fonction de transfert d'un système ***du premier ordre*** *a la forme générale suivante :*

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1+\tau p}}$$

- τ *est appelée* ***constante de temps*** *(s)*
- *K est le* ***gain statique*** *du système*

Remarque : $K = \frac{Y}{X}$, si Y et X sont respectivement les amplitudes des signaux de sortie et d'entree.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

● **EXEMPLE : CIRCUIT RL**

Ce système est décrit par l'équation differentielle :

Ce système est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{L}{R}\dot{u}(t) + u(t) = e(t) .$$

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation, nous obtenons :

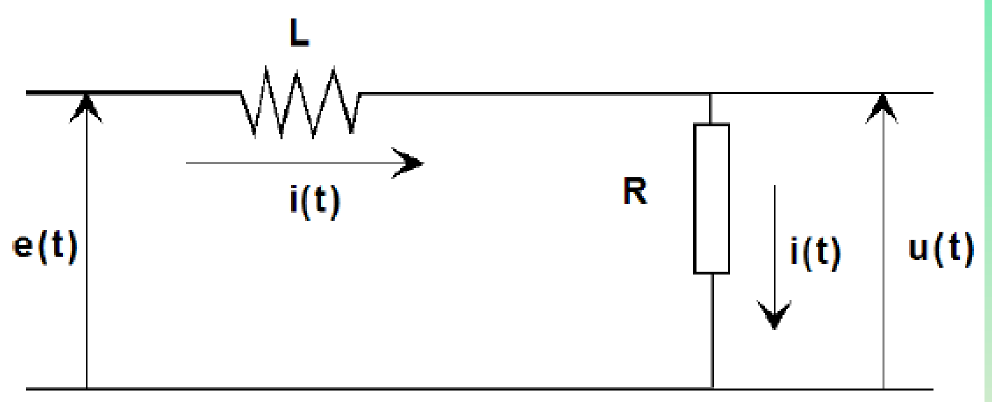
$$\frac{L}{R}pU(p) + U(p) = E(p) .$$

Nous pouvons donc écrire :

$$U(p) = H(p).E(p)$$

avec $\boxed{H(p) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{L}{R}.p}}$

Par identification, on a donc K=1 et $\tau = \dfrac{L}{R}$



Système du premier ordre : Circuit RL

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

7-6. FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME DU DEUXIEME ORDRE

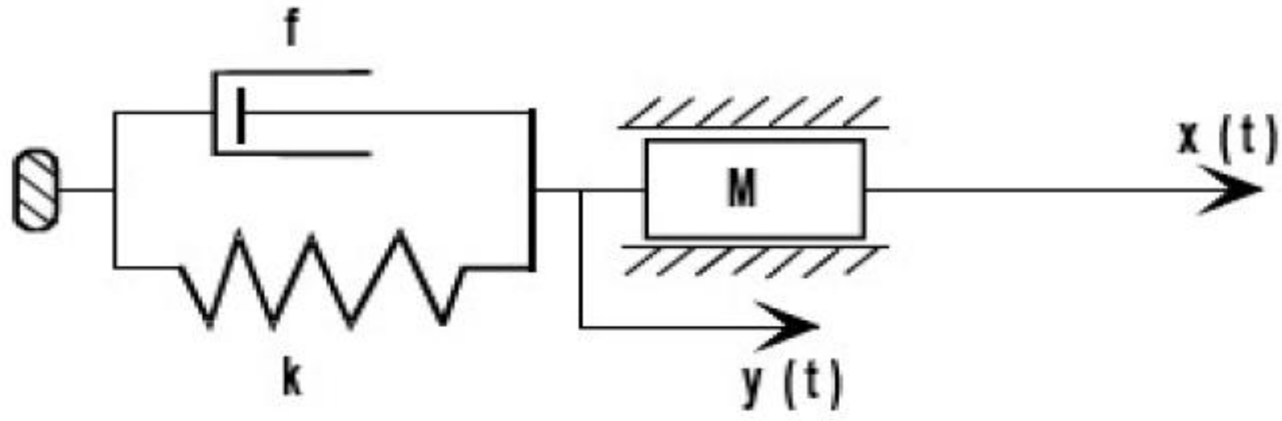
La fonction de transfert d'un système ***du second ordre*** *a la forme générale suivante :*

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}.p + \frac{1}{\omega_0^{\ 2}}.p^2}}$$

- *K est le* ***gain statique*** *du système.*
- ξ *est le* ***coefficient d'amortissement****.*
- ω_0 *est la* ***pulsation propre non amortie****.*

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

● EXEMPL E : SYST EME MASSE-RESSORT-AMORT ISSEUR



Système du second ordre : Masse ressort amortisseur

Ce système est décrit par l'équation différentielle :

$$\ddot{y}(t) + \frac{f}{M}\dot{y}(t) + \frac{k}{M}y(t) = \frac{x(t)}{M}.$$

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation, nous obtenons :

$$p^2Y(p) + \frac{f}{M}pY(p) + \frac{k}{M}Y(p) = \frac{X(p)}{M}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Cette équation peut encore s'écrire : $Y(p)\left(Mp^2+fp+k\right)=X(p)$.

Nous obtenons donc : $kY(p)\left(\frac{M}{k}p^2+\frac{f}{k}p+1\right)=X(p)$.

Précédemment, nous avons posé $\frac{k}{m}=\omega_0{}^2$ et $\frac{f}{k}=\frac{2\xi}{\omega_0}$.

Nous avons donc : $kY(p)\left(1+\frac{2\xi}{\omega_0}.p+\frac{p^2}{\omega_0^2}\right)=X(p)$.

Nous pouvons donc écrire :

$$Y(p)=H(p).X(p) \quad \text{avec} \quad \boxed{H(p)=\frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}.p+\frac{1}{\omega_0{}^2}.p^2}}$$

Par identification on a donc ici K=1/k, $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\xi=\frac{f}{2\sqrt{km}}$

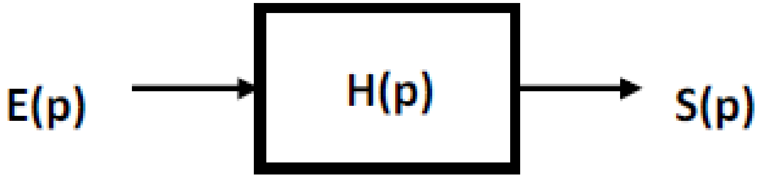
<u>**8- SCHEMAS BLOCS**</u>

<u>8-1. ELEMENTS DE BASE DES SCHEMAS BLOCS</u>

Pour représenter graphiquement la structure d'un système asservi, on utilise schéma blocs.

Cette technique de représentation utilise trois éléments de base :

1. Le bloc



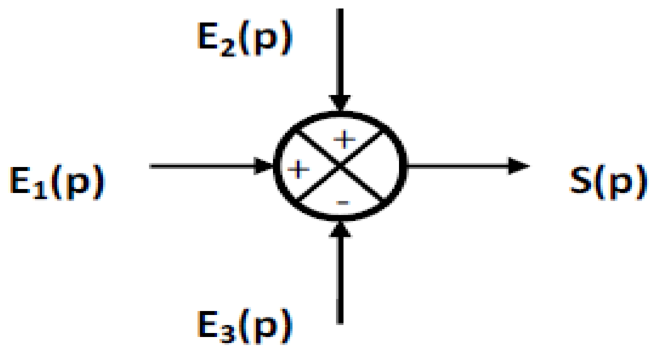
$$S(p) = H(p) \times E(p)$$

Il représente une fonction de transfert ou transmittance. Il a ***une*** *entrée et* ***une*** *sortie. Les flèches sont orientées de l'entrée vers la sortie.*

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Eléments de base (suite)

2. Le sommateur



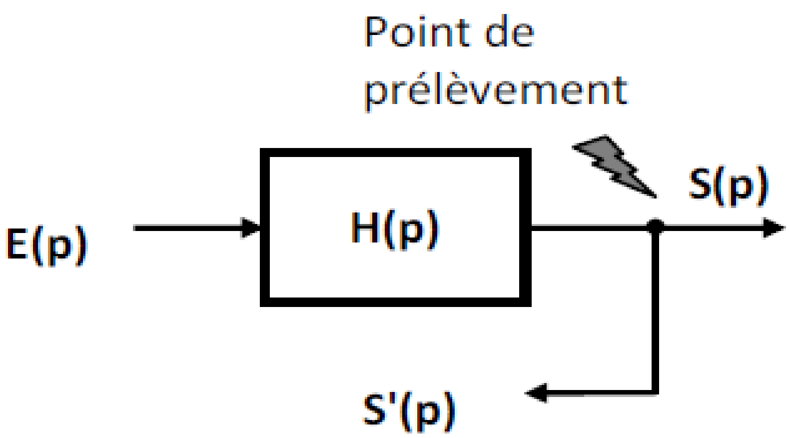
$$S(p) = E_1(p) + E_2(p) - E_3(p)$$

*Il peut avoir **plusieurs** entrées mais une seule sortie. Les signes **+** ou **–** associés aux branches entrantes précisent si l'entrée s'additionne ou si elle se soustrait.*

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Eléments de base (suite)

3. La jonction



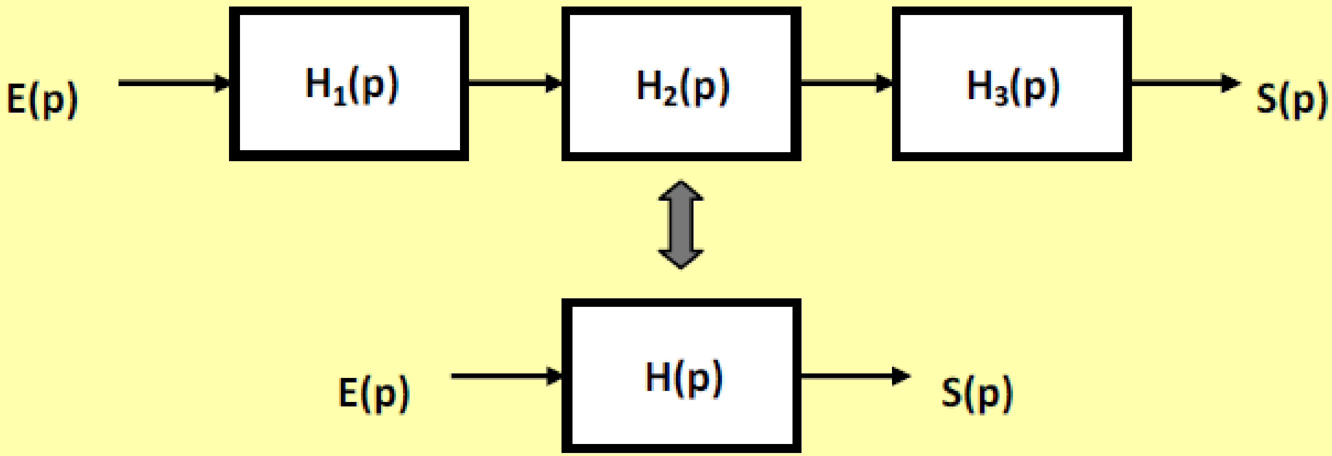
$$S'(p) = S(p) = H(p) \times E(p)$$

Une ***branche de prélèvement*** *prend le même signal que la branche principale et n'affecte pas le signal de cette branche principale.*

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

8-2. REGLES RELATIVES AUX SCHEMAS BLOCS

● ASSOCIAT ION DE BLOCS EN SERIE



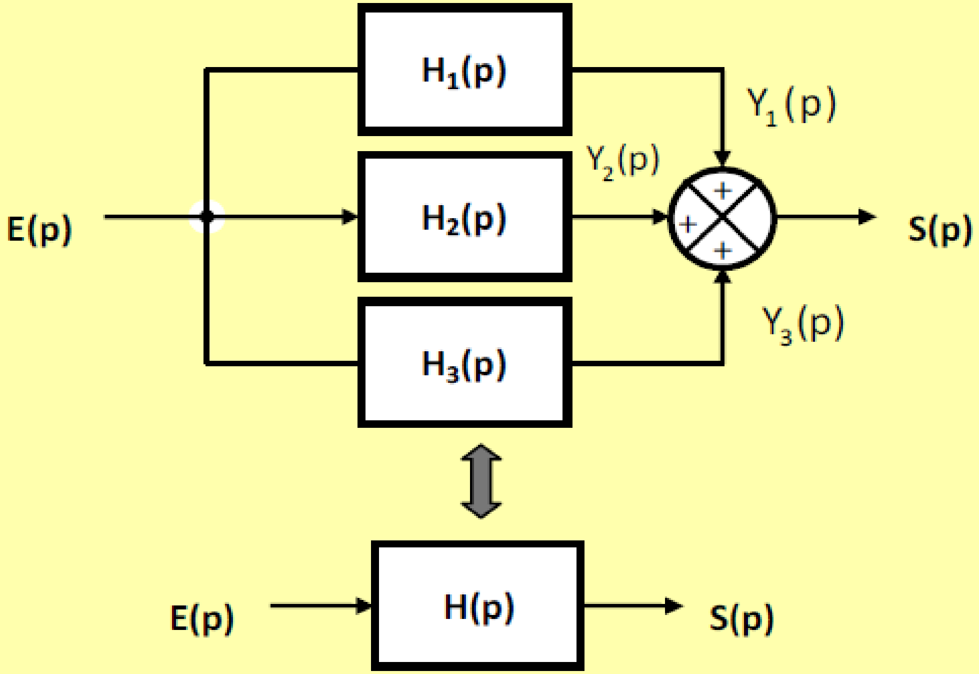
$$H(p) = H_1(p) \times H_2(p) \times H_3(p)$$

La fonction de transfert de l'ensemble est égale au ***produit*** *des fonctions de transfert de chaque bloc.*

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

8-2. REGLES RELATIVES AUX SCHEMAS BLOCS(suite)

● ASSOCIAT ION DE BLOCS EN PARALLELE



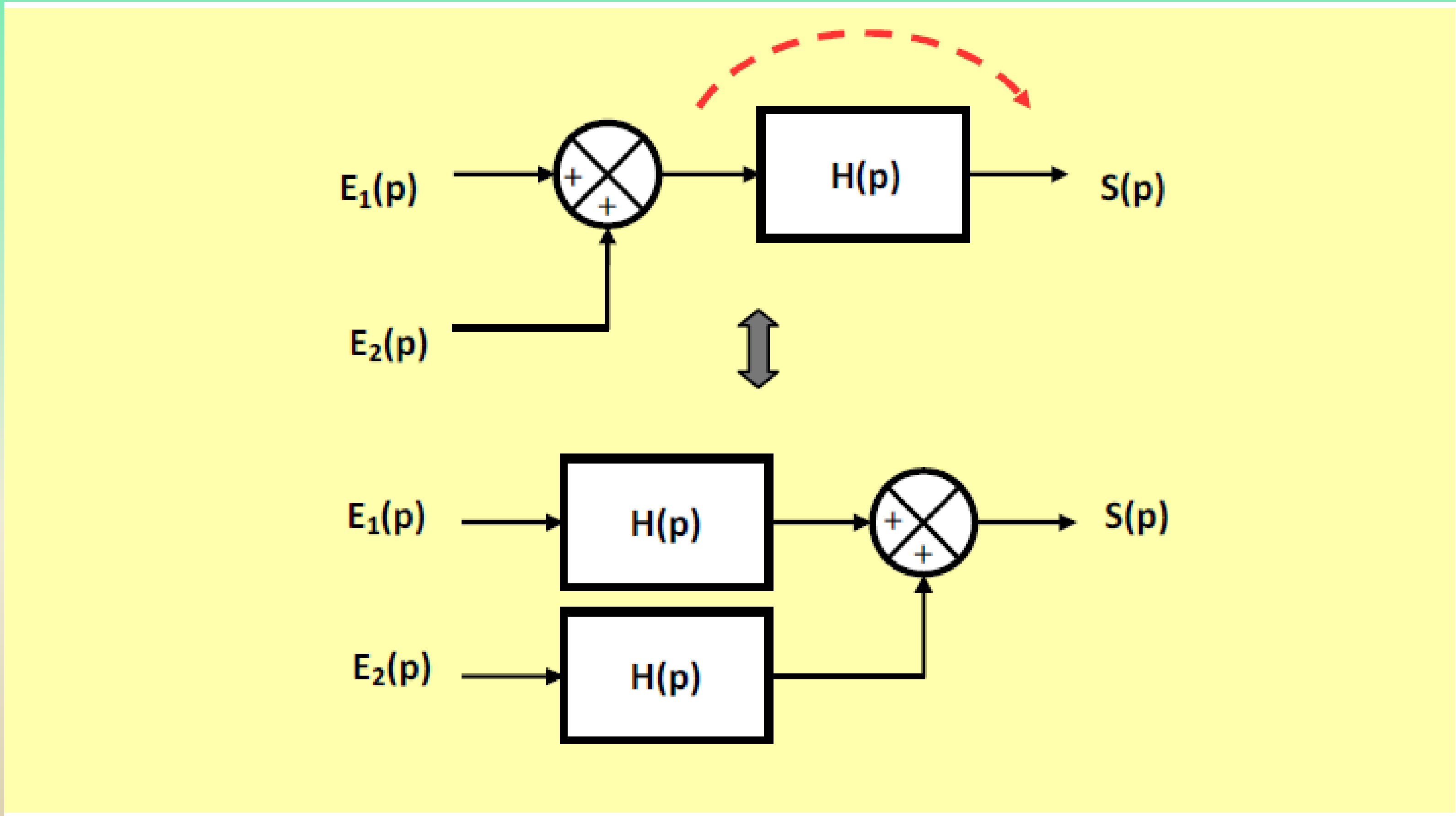
$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$$

La fonction de transfert de l'ensemble est égale à la ***somme*** *des fonctions de transfert de chaque bloc.*

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

8-2. REGLES RELATIVES AUX SCHEMAS BLOCS(suite)

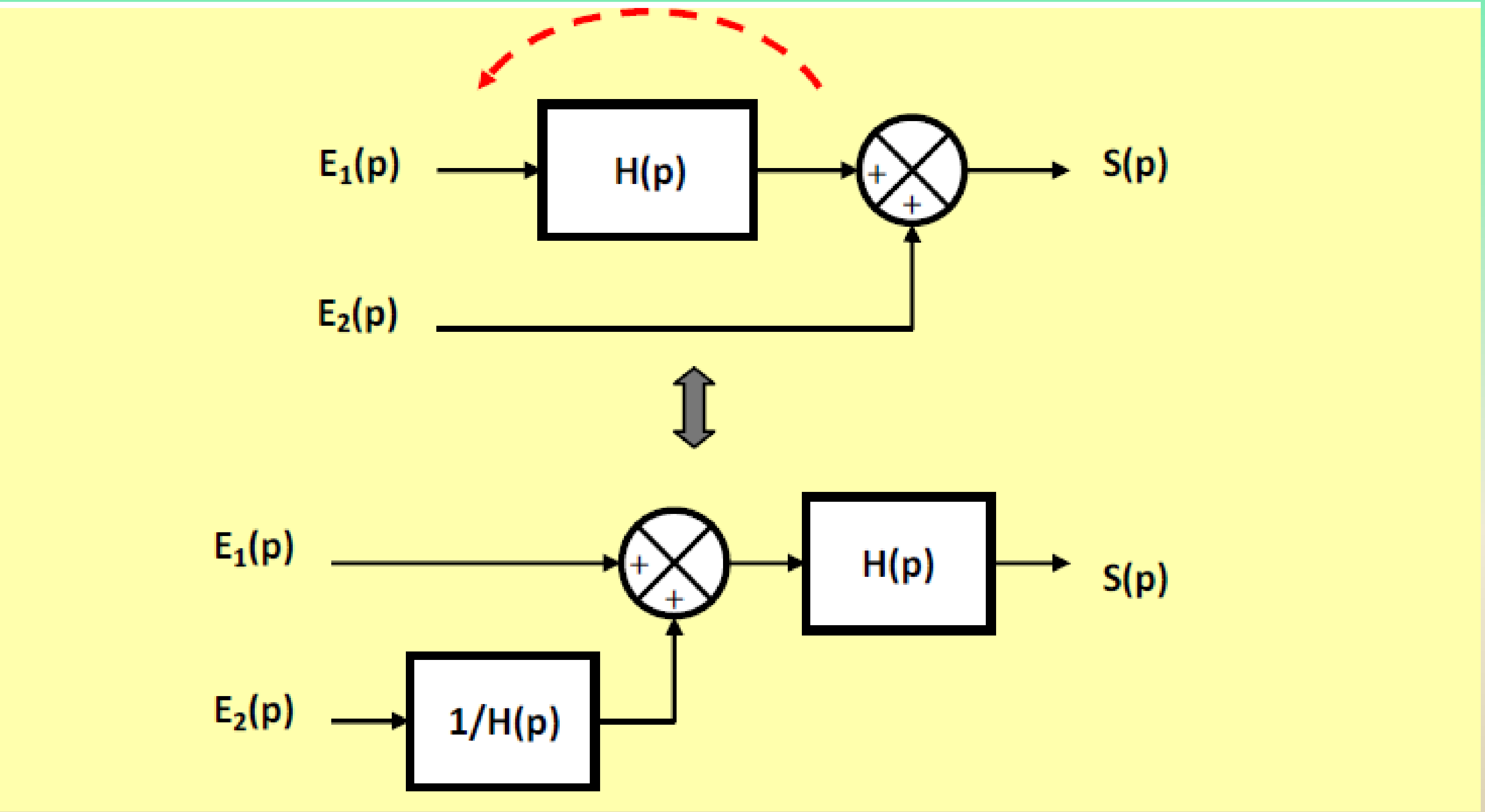
● DEPLACEMENTS DES SOMMATEURS



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

8-2. REGLES RELATIVES AUX SCHEMAS BLOCS(suite)

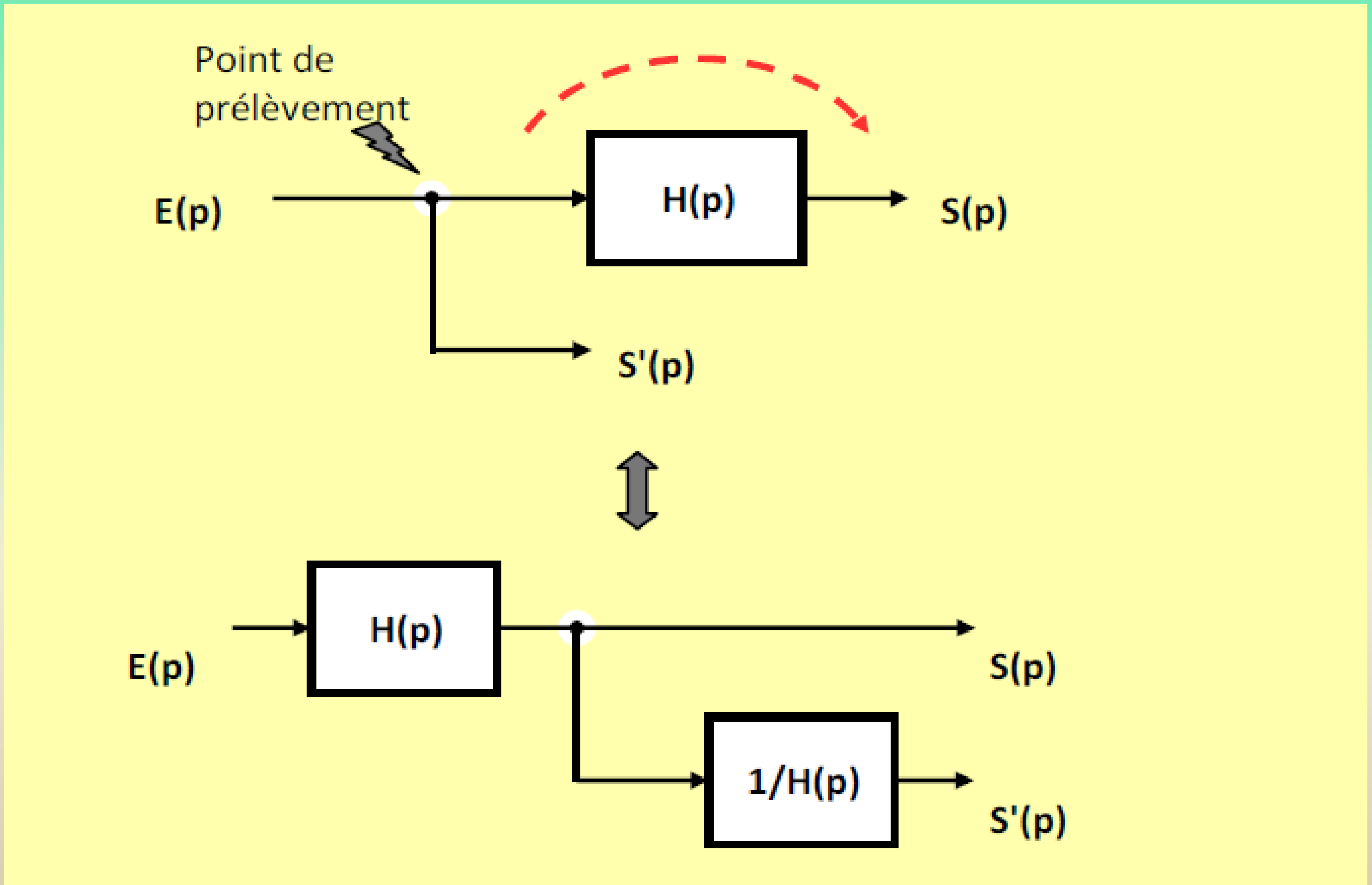
● DEPLACEMENTS DES SOMMATEURS(suite)



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

8-2. REGLES RELATIVES AUX SCHEMAS BLOCS(suite)

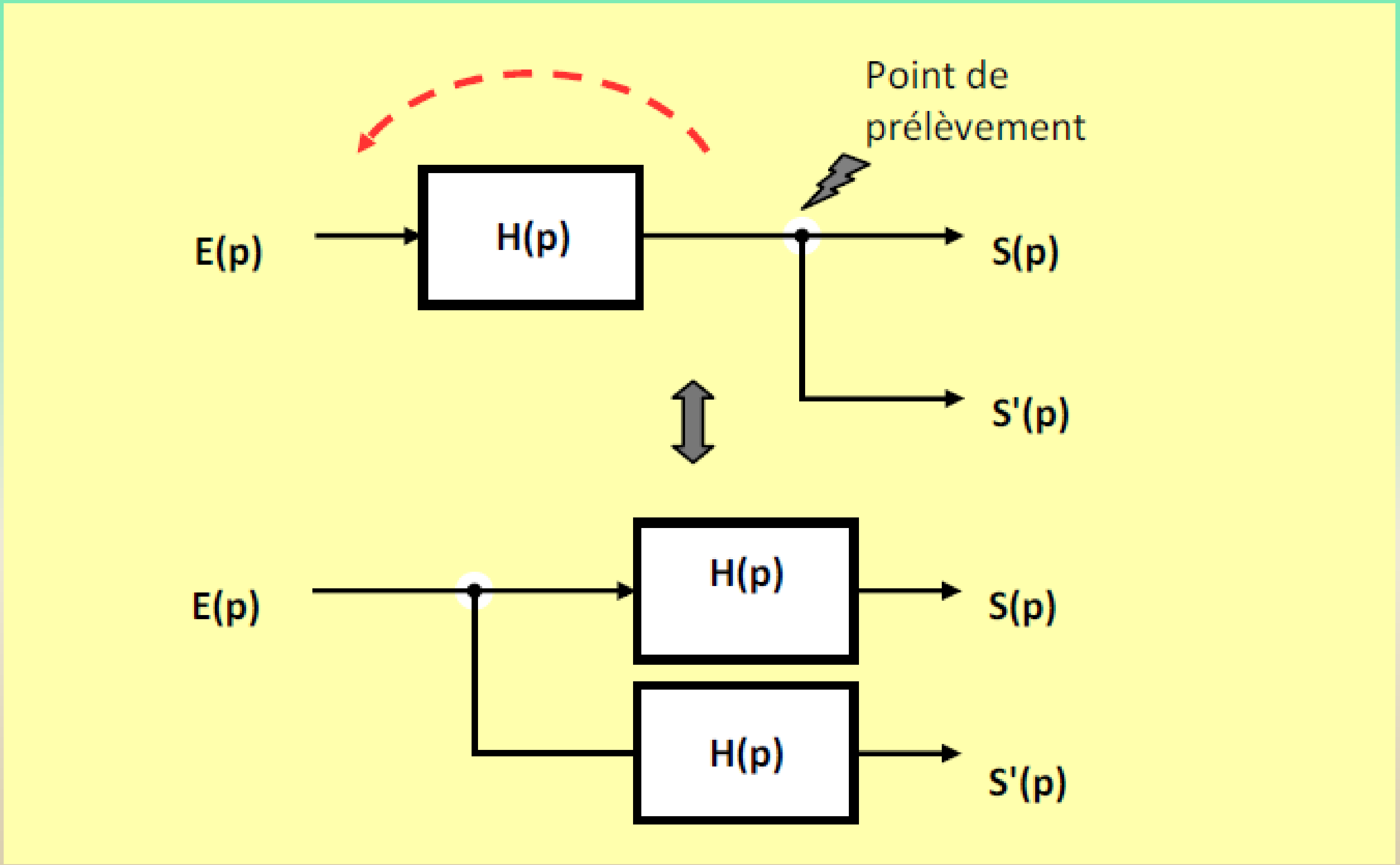
● DEPLACEMENTS DES POINTS DE PRELEVEMENT



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

8-2. REGLES RELATIVES AUX SCHEMAS BLOCS(suite)

● DEPLACEMENTS DES POINTS DE PRELEVEMENT(suite)

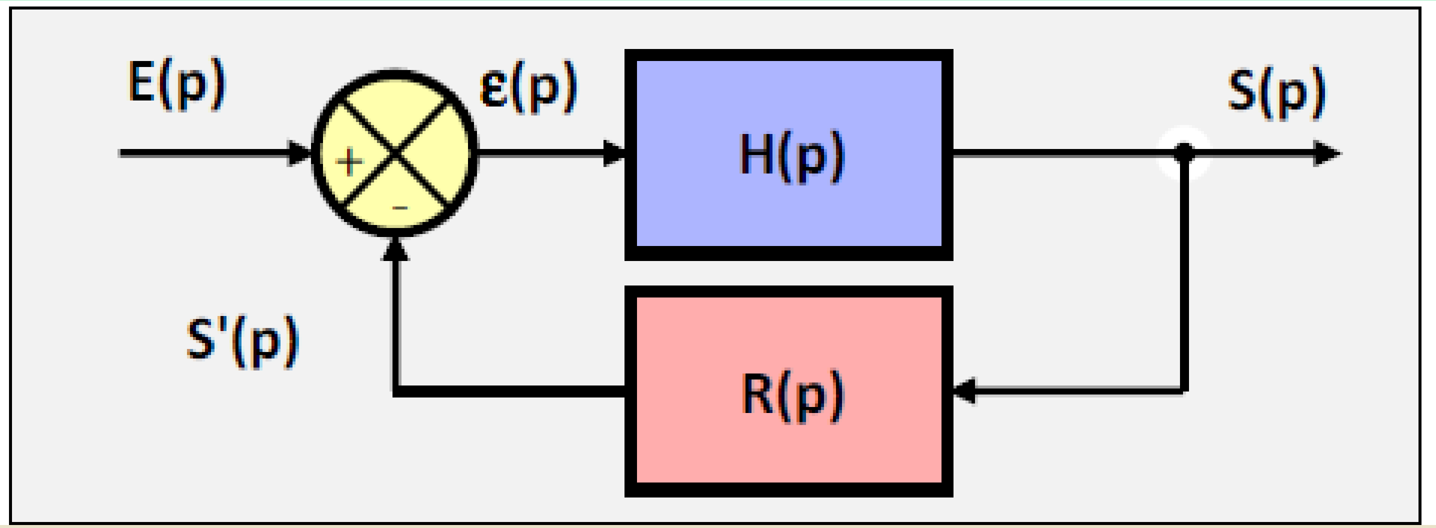


Représentation des systèmes linéaires continus invariants

8-3. APPLICATION A LA DETERMINATION DE FONCTIONS DE TRANSFERT D'UN SYSTEME ASSERVI

● FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE FERMEE (FTBF)

Soit un système asservi representé par le schema bloc :



On note **H(p)** et **K(p)** les **fonctions de transfert** respectives de la **chaine directe** et de la **chaine de retour**.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

L'utilisateur est surtout interesse par la Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) :

$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

On a : $S(p) = H(p)\varepsilon(p) = H(p) \times \left(E(p) - S'(p) \right)$

Or : $S'(p) = R(p)S(p)$

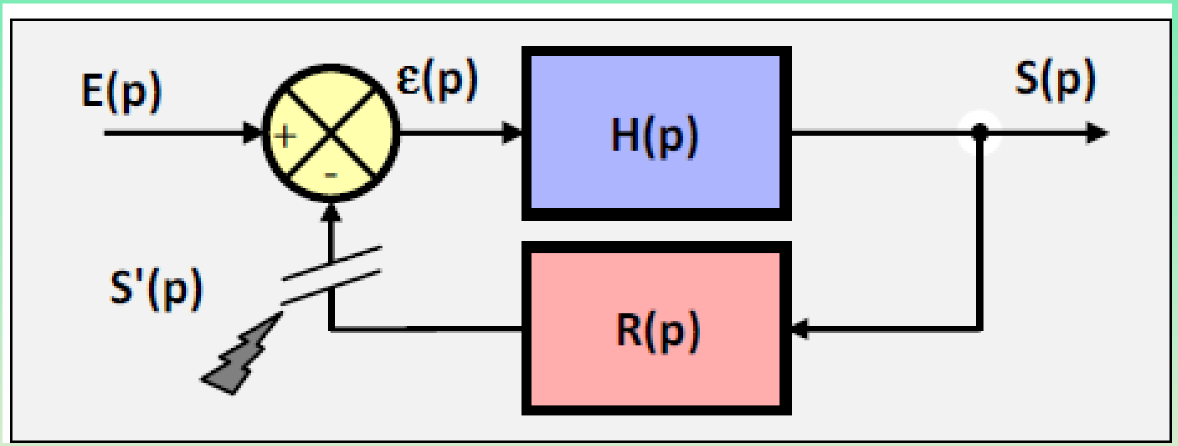
d'où $S(p) \times \left(1 + H(p)R(p)\right) = H(p)E(p)$

$$\boxed{H_{BF}(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)R(p)}}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

● FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE OUVERTE (FTBO)

Reprenons le schéma bloc précédent et ouvrons la boucle de retour :



On définit la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) comme le rapport ente l'image de la sortie S'(p) et l'écart ε(p) :

$$\boxed{H_{BO}(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = H(p)R(p)}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

La FTBO correspond à l'ouverture de la boucle, soit sa coupure au niveau du comparateur. C'est le produit des fonctions de transfert des Chaines Directe et de Retour.
D'où la généralisation de l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\boxed{H_{BF}(p) = \frac{H(p)}{1 + H_{BO}(p)}}$$

où H(p) est la fonction de transfert de la Chaine Directe

Pour un **système a retour unitaire** , on aura:

$$H_{BF}(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

8-4. UTILISATION DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Soit un système représenté par le schéma-bloc de la figure 14.

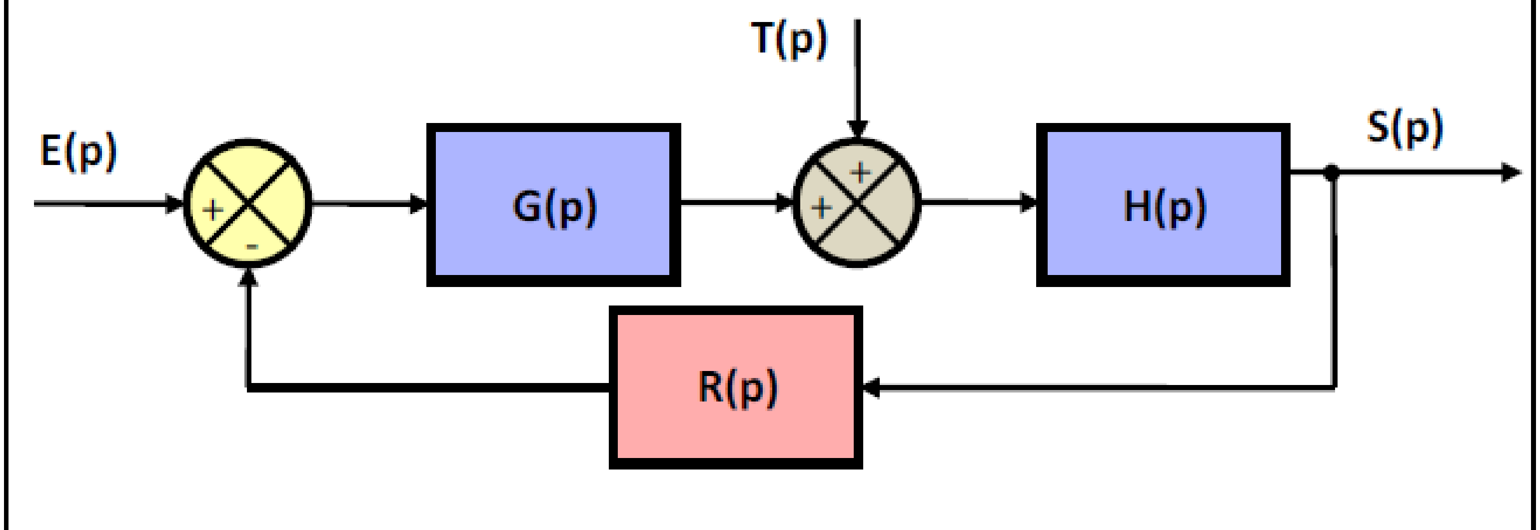


Figure 14 : Système avec perturbation

Ce schéma bloc a **deux entrées E(p)** et **T(p).**
D'après le **principe de superposition**, il est équivalent à la somme des deux schemas blocs comme indiqué en figure 15.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

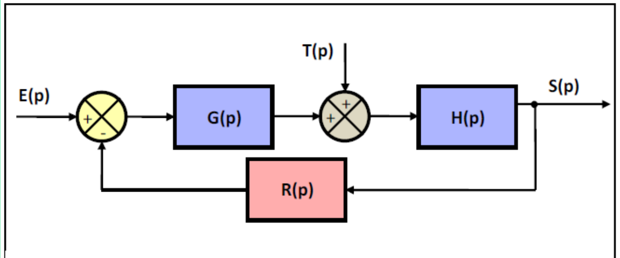


Figure 14 : Système avec perturbation

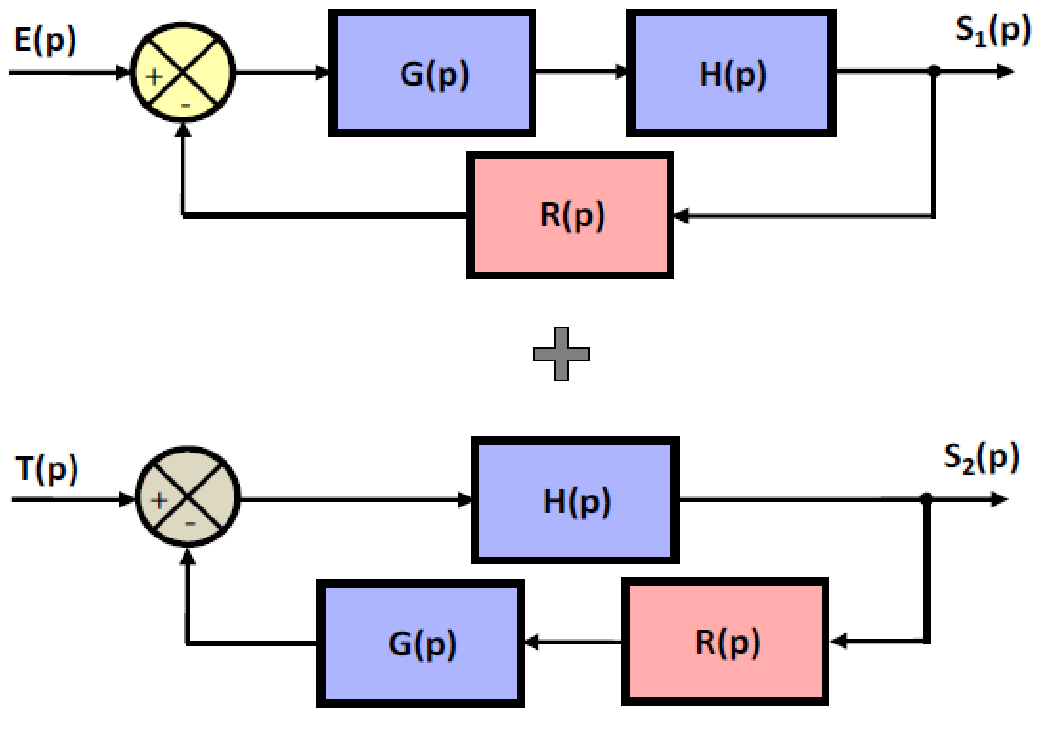


Figure 15 : Application du principe de superposition

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

Nous avons donc :

$S(p) = H_1(p).E(p)+H_2(p).T(p)$

$H_1(p)$ est la fonction de transfert en boucle fermée du schéma bloc de chaine directe $G(p).H(p)$.

$H_2(p)$ est la fonction de transfert en boucle fermée du schéma bloc de chaine directe $H(p)$.

Comme la fonction de transfert en boucle ouverte s'ecrit $H_{BO}(p)=G(p).H(p).R(p)$, nous obtenons :

$$\boxed{S(p) = \frac{G(p).H(p)}{1+H_{BO}(p)}E(p) + \frac{H(p)}{1+H_{BO}(p)}T(p)}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

9-ETUDE TEMPORELLE DES SYSTEMES DU PREMIER ORDRE

9-1. RAPPEL : FONCTION DE TRANSFERT D'UN PREMIER ORDRE

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme :

$$\tau.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)$$

(avec K>0 : gain statique et τ >0 : constante de temps)

Cette équation conduit, après transformée de Laplace,
τp.S(p) + S(p) = K.E(p) à l'expression de la fonction de transfert :

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

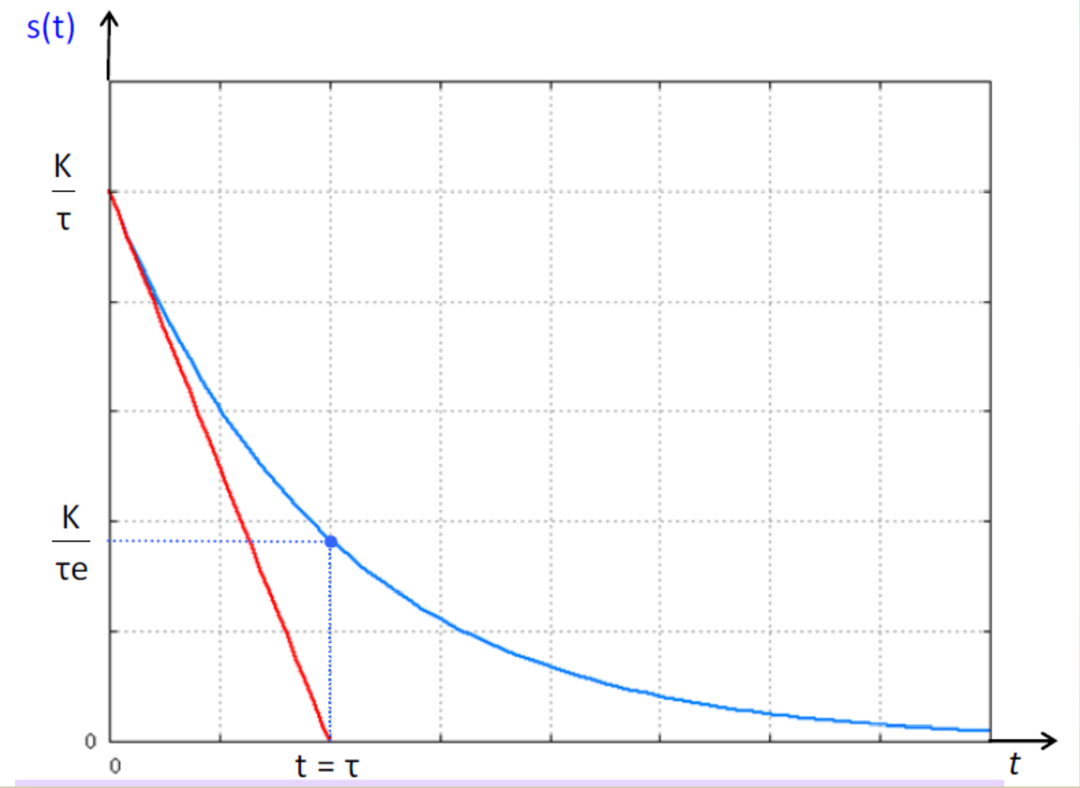
9-2. REPONSE IMPULSIONNELLE D'UN SYSTEME DU PREMIER ORDRE

Pour une entrée impulsionnelle $e(t) = \delta(t)$, nous avons $E(p) = 1$, soit $S(p) = H(p).E(p) = 1$ (la réponse impulsionnelle d'un système est l'image de sa fonction de transfert).

En revenant dans le domaine temporel, on a :

$$\boxed{s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

TRACE DE LA REPONSE IMPULSIONNELLE A PARTIR DE SES CARACTERISTIQUES :



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

CARACTERIST IQUES DE LA REPONSE IMPULSIONNEL L E :

- ***Ordonnée à l'origine*** : $s(t=0)=\frac{K}{\tau}$

(le système passe brutalement de 0 à une valeur non nulle)

ou avec le théorème de la V.I. à partir de S(p) :

$$\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to+\infty} p.S(p) = \lim_{p\to+\infty} p.H(p) = \frac{K}{\tau}$$

- ***Tangente à l'origine*** :

Calculons la dérivée en t=0 : $\left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{K}{\tau^2}$

La tangente à l'origine a pour équation

$$y(t) = s(t=0) + \left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=0} .t$$

soit ici $y_{imp}(t) = \frac{K}{\tau} - \frac{K}{\tau^2}.t = \frac{K}{\tau}(1-\frac{t}{\tau})$

cette droite coupe l'axe des abscisses en $t=\tau$.

De plus, à $t=\tau$ nous avons

$$s(t=\tau) = \frac{K}{\tau}e^{-1} \simeq 0.37.\frac{K}{\tau} :$$

la valeur $s(t)$ est réduite de 63%.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

9-3. REPONSE INDICIELLE D'UN SYSTEME DU PREMIER ORDRE

Le système est soumis a une entrée de type échelon unitaire. soit e(t) = u(t)

Nous avons $E(p) = \frac{1}{p}$ soit avec $S(p) = H(p).E(p)$

$$S(p) = \frac{K}{1+\tau p}.\frac{1}{p}$$

En revenant dans le domaine temporel par décomposition de S(p) en éléments simples suivant: $S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau p} = \frac{K}{p} - \frac{\tau K}{1+\tau p} = K\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/\tau}\right)$ et transformée de Laplace inverse, on a :

$$\boxed{s(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).u(t)}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

CARACTERIST IQUES DE LA REPONSE INDICIELLE :

- ***Ordonnée à l'origine*** **:**

$$\lim_{t \to 0} s(t) = \lim_{p \to +\infty} p.S(p) = \lim_{p \to +\infty} H(p) = 0$$

- ***Valeur finale*** **:**

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0} p.S(p) = \lim_{p \to 0} H(p) = K$$

(On a une asymptote horizontale y=K)

- ***Tangente à l'origine*** **:**

Pente à l'origine :

$$\lim_{t \to 0} s'(t) = \lim_{p \to +\infty} p^2.S(p) = \lim_{p \to +\infty} \frac{Kp}{1 + \tau p} = \frac{K}{\tau}$$

La tangente à l'origine a pour équation

$$y_{ind}(t) = \frac{K}{\tau}.t$$

cette droite coupe l'asymptote horizontale en $t = \tau$.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

On remarquera ici que l'erreur statique a pour expression $\varepsilon_S = 1 - K$.

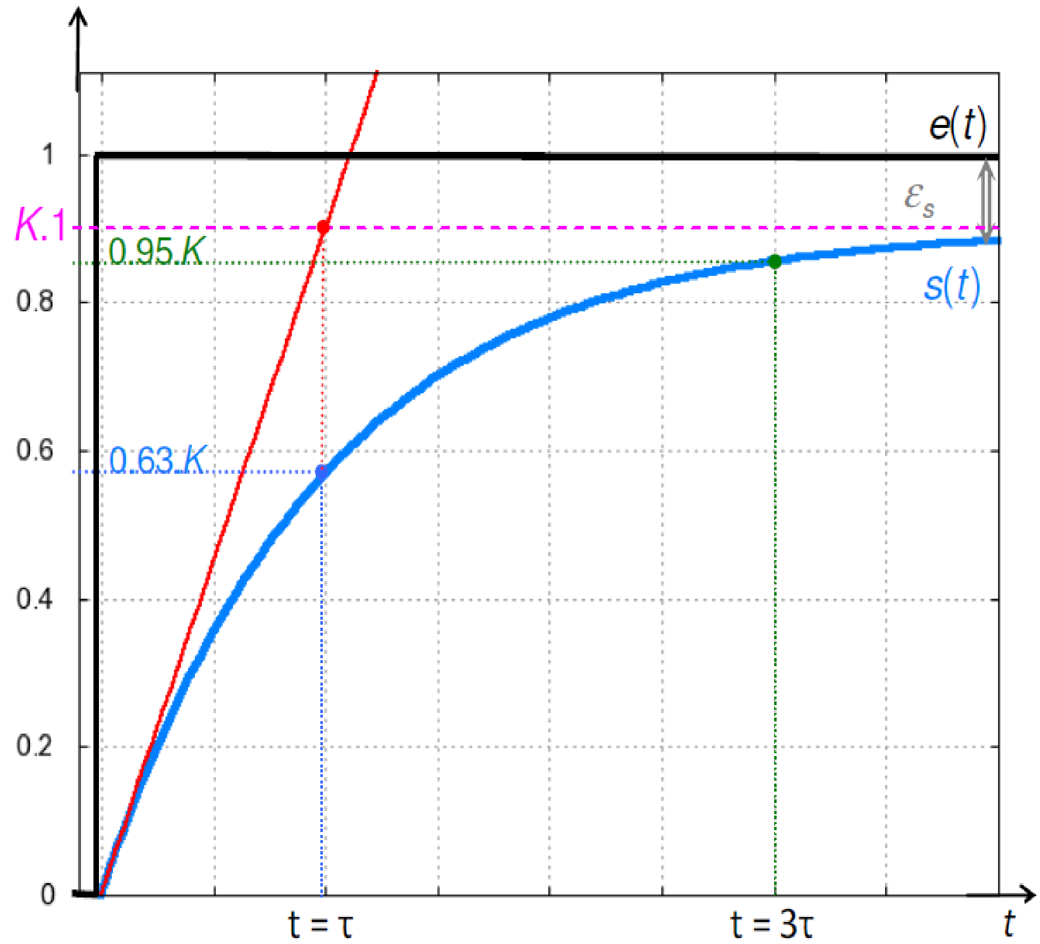
⇨ Un système du premier ordre ne possède pas d'erreur statique si son gain K=1

- ***Points caractéristiques à connaître:***
  - **pour $t = \tau$**, $s(\tau) = K(1 - e^{-1}) =$ **0,63K**
  - **temps de réponse à 95%**

c'est l'instant t_r pour lequel **$s(t_r) = 0{,}95\ s_{max}$**

soit $K(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}}) = 0{,}95K \Rightarrow e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0{,}05$

$$\boxed{t_r \approx 3\tau}$$



Si on connaît le tracé de la réponse indicielle d'un système du 1er ordre, on peut trouver facilement, par identification, le gain K et la constante de temps τ.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

9-4. REPONSE A UNE RAMPE DE PENTE A

$$s(t) = A\,t\,u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{A}{p^2}$$

$$S(p) = \frac{AK}{p^2(1+\tau p)} = K\left(\frac{A}{p^2} - \frac{A\tau}{p} + \frac{A\tau^2}{1+\tau p}\right)$$

soit, en revenant dans le domaine temporel :

$$\boxed{s(t) = AK(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}).u(t)}$$

- **Proprietes et trace de la reponse**

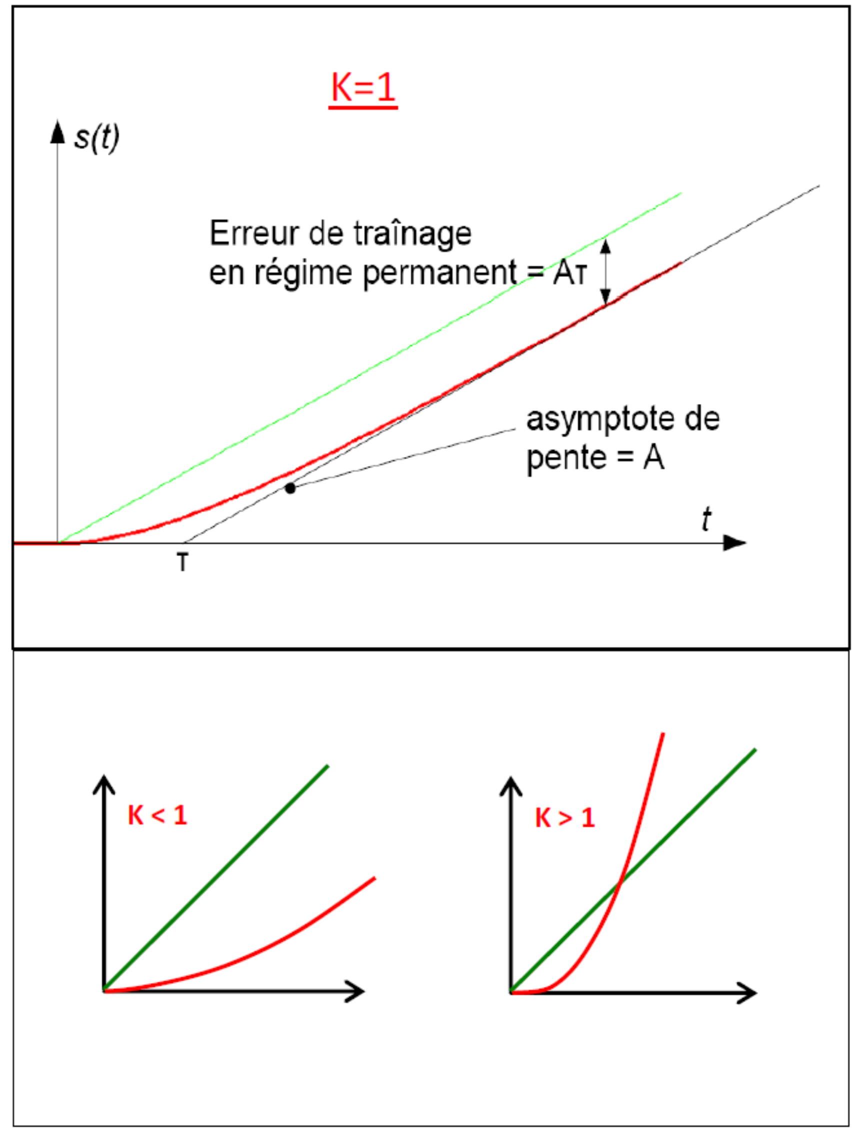
- $s(0) = 0$
- $s'(0) = 0$
- $\lim\limits_{t \to 0} s'(t) = \lim\limits_{p \to +\infty} p^2.S(p) = \lim\limits_{p \to +\infty} \frac{AK}{1+\tau p} = AK$

la courbe admet une asymptote oblique de pente AK en +∞

- **Dans le cas où K=1:**

$$\lim_{t \to +\infty} [s(t) - e(t)] = \lim_{t \to +\infty} A(-\tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}) = -A\tau$$

⇨ existence d'une « erreur de traînage » en régime permanent.



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

10- ETUDE TEMPORELLE DES SYSTEMES DU SECOND ORDRE

Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 . \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

qui conduit, après transformée de Laplace,

$$p^2.S(p) + 2\xi\omega_0 p.S(p) + \omega_0^2 S(p) = K\omega_0^2.E(p)$$

a l'expression de la fonction de transfert :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}.p + \frac{1}{\omega_0{}^2}.p^2}}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

10-1. REPONSE IMPULSIONNELLE D'UN SYSTÈME DU DEUXIEME ORDRE

- **Cas $\xi > 1$: D(p) possede 2 racines reelles p_1 et p_2**

$$p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \text{ avec } p_1 < p_2 < 0$$

On a donc : $S(p) = \dfrac{K\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = \dfrac{K\omega_0}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\dfrac{1}{p-p_1} - \dfrac{1}{p-p_2}\right)$

d'où $\boxed{s(t) = \dfrac{K\omega_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}(e^{p_2 t} - e^{p_1 t}).u(t)}$

$\xi > 1$: le système est amorti.

On a un régime <u>apériodique</u>

- **Cas $\xi < 1$: D(p) possede 2 racines complexes conjuguees p_1 et p_2**

On peut alors écrire S(p) sous la forme:

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p+\xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1-\xi^2)}$$

En posant $\omega^2 = \omega_0{}^2(1-\xi^2)$ et $a = \xi.\omega_0$

on a : $S(p) = \dfrac{K\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \dfrac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$,

d'où $\boxed{s(t) = \dfrac{K\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\, t).u(t)}$

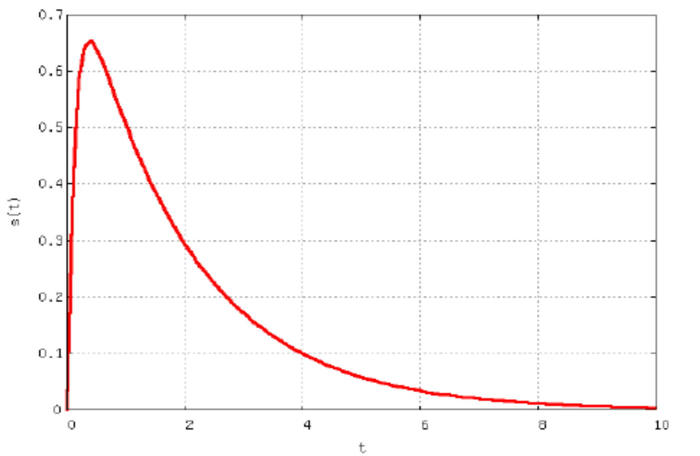
$\xi < 1$: le système est sous amorti.

On a un régime <u>pseudo-périodique</u>

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

10-1. REPONSE IMPULSIONNELLE D'UN SYSTÈME DU DEUXIEME ORDRE

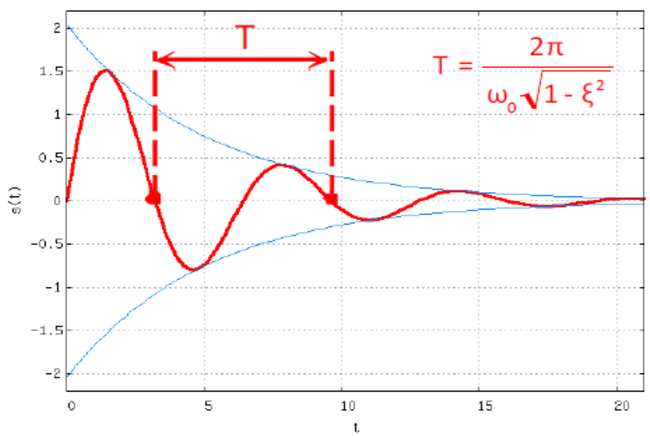
$\xi > 1$: le système est amorti.
On a un régime apériodique



Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre amorti

$K = 1, \ \xi = 2, \ \omega_0 = 1$

$\xi < 1$: le système est sous-amorti
On a un régime pseudo-périodique



Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre sous amorti

$K = 2, \ \xi = 0,2, \ \omega_0 = 1$

Lorsqu'il n'y a pas d'amortissement ($\xi = 0$), on a une réponse sinusoidale de pulsation ω_0 : on retrouve la réponse de l'oscillateur harmonique

CAS $\xi = 1$: D(P) POSSEDE 1 RACINE DOUBLE

L'allure de la réponse serait comparable à celle obtenue dans le cas du régime apériodique mais ce cas est impossible dans la réalité: on ne peut avoir une valeur réelle de ξ rigoureusement égale a 1

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

10-2. REPONSE INDICIELLE D'UN SYSTÈME DU DEUXIEME ORDRE

Remarque: la réponse indicielle est l'intégrale de 0 a t de la réponse impulsionnelle.

En effet, $S_{imp}(p)=H(p).1$ et $S_{imp}(p)=H(p).\frac{1}{p}$

Par conséquent, la réponse impulsionnelle étant nulle pour t = 0, la pente de la réponse indicielle est nulle a l'origine.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

10-2. REPONSE INDICIELLE D'UN SYSTÈME DU DEUXIEME ORDRE(suite)

- **CAS $\xi \geq 1$: SYSTEME AMORTI**

Détermination de l'expression de la réponse

$H(p)$ admet 2 pôles réels distincts $p_1 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$ et $p_2 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$ avec $p_1 < p_2 < 0$

La fonction de transfert $H(p)$ peut s'écrire sous la forme $H(p) = \dfrac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ en posant $\tau_i = -\dfrac{1}{p_i}$

d'où $S(p) = \dfrac{K\omega_0^2}{p(p-p_1)(p-p_2)} = \dfrac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$

$$S(p) = K.\left[\frac{1}{p} - \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2}.\frac{1}{1+\tau_1.p} - \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2}.\frac{1}{1+\tau_2.p}\right]$$

On détermine s(t) par la transformée inverse :

$$\boxed{s(t) = K\left(1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}.\left(\tau_1.e^{-t/\tau_1} - \tau_2.e^{-t/\tau_2}\right)\right)}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

10-2. REPONSE INDICIELLE D'UN SYSTÈME DU DEUXIEME ORDRE(suite)

- CAS $\xi \geq 1$: SYSTEME AMORTI

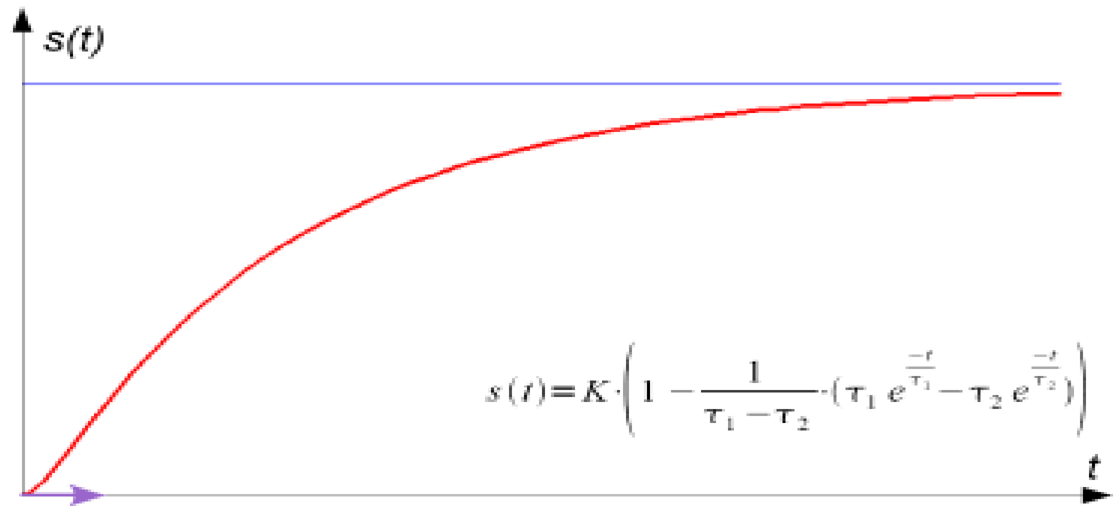
Propriétés de la réponse

- En t=0 , la courbe admet une ***tangente horizontale***.
- La courbe ne dépasse pas son asymptote horizontale

Il n'y a pas de formule pour déterminer le *temps de réponse à 5%*

Nous pouvons remarquer cependant que le système ressemble à un premier ordre lorsqu'on s'éloigne de t=0. Le temps de réponse à 5% peut donc **être approché** par la valeur $t_{5\%} \approx 3 \times (2\,\xi/\omega_0)$.

(En pratique on utilisera l'abaque des temps de réponse réduits).



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

10-2. REPONSE INDICIELLE D'UN SYSTÈME DU DEUXIEME ORDRE(suite)

- **Cas $\xi = 1$:**

Remarque : dans le cas où $\xi=1$ ($\tau_1 = \tau_2$), on parle d'**amortissement critique**, l'existence d'un pôle double modifie la décomposition en éléments simples et on obtient :

$$s(t) = K\left(1 - \left(1 + \frac{1}{\tau_0}\right).e^{-t/\tau_0}\right)$$

La réponse est plus rapide que si $\xi > 1$ ($t_{5\%}.\omega 0 \approx 5$), mais l'allure de la courbe est très similaire.

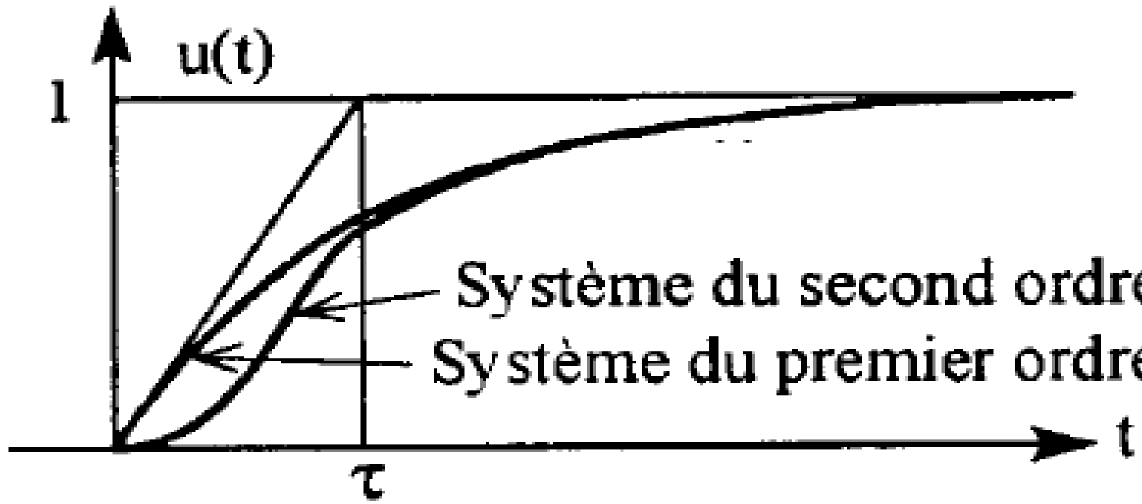


Figure 16 : Réponses indicielles des systèmes du premier ordre et second ordre amorti

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

10-2. REPONSE INDICIELLE D'UN SYSTÈME DU DEUXIEME ORDRE(suite)

- **CAS $\xi < 1$: SYSTEME SOUS-AMORTI**

Détermination de l'expression de la réponse

$H(p)$ admet 2 pôles complexes conjugués

$$p_{1,2} = -\left(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_0$$

La décomposition de $S(p)$ et sa transformation inverse nous donne :

$$\boxed{s(t) = K\left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t + \arccos(\xi)\right)\right)}$$

Ce résultat pourrait également être obtenu par intégration de la réponse impulsionnelle.

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

10-2. REPONSE INDICIELLE D'UN SYSTÈME DU DEUXIEME ORDRE(suite)

- CAS $\xi < 1$: SYSTEME SOUS-AMORTI

Caractéristiques de la réponse

- La courbe admet toujours une **tangente horizontale à *t*=0** .
- On observe l'apparition d'oscillations autour de la valeur finale (réponse pseudo-périodique), d'autant plus amorties que ξ est élevé. Pour ξ =0 , la réponse est sinusoïdale d'amplitude 2K.
- La **pseudo-période** des oscillations est

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

10-2. REPONSE INDICIELLE D'UN SYSTÈME DU DEUXIEME ORDRE(suite)

- CAS $\xi < 1$: SYSTEME SOUS-AMORTI

- **Les courbes enveloppes** sont les courbes

$$y(t) = K\left(1 \pm \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

- **Le premier dépassement** est obtenu pour

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T}{2}$$ et vaut $$D_1 = K\, e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- Les valeurs des dépassements successifs peuvent être lues sur **l'abaque des dépassements**. Les dépassements sont parfois donnés en pourcentage de la valeur finale : $D_{1\%} = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

10-2. REPONSE INDICIELLE D'UN SYSTÈME DU DEUXIEME ORDRE(suite)

- **CAS $\xi < 1$: SYSTEME SOUS-AMORTI**

- Le calcul du temps de réponse à 5% est encore plus compliqué que dans le cas ξ =1 en raison du phénomène oscillatoire. On se reportera donc à l'abaque des temps de réponse réduits.

- On remarque, sur l'abaque des temps de réponse, que le minimum est obtenu pour une valeur particulière :

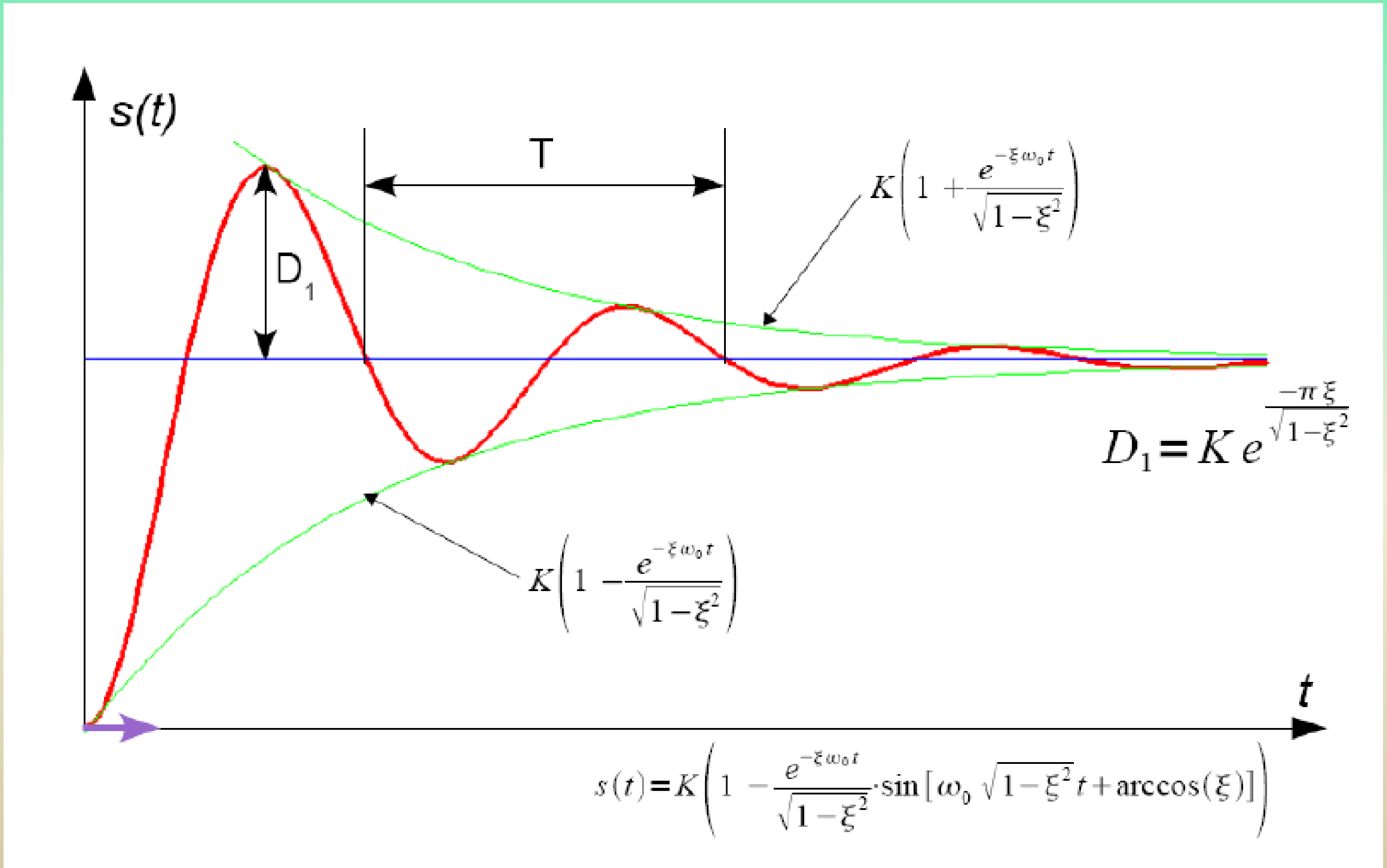
$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,7 \ .$$

Cette valeur correspond à celle pour laquelle le premier dépassement vaut 5%. Le système est dit alors **juste amorti. Alors, $t5\%.\ \omega_0 \approx 3$.**

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

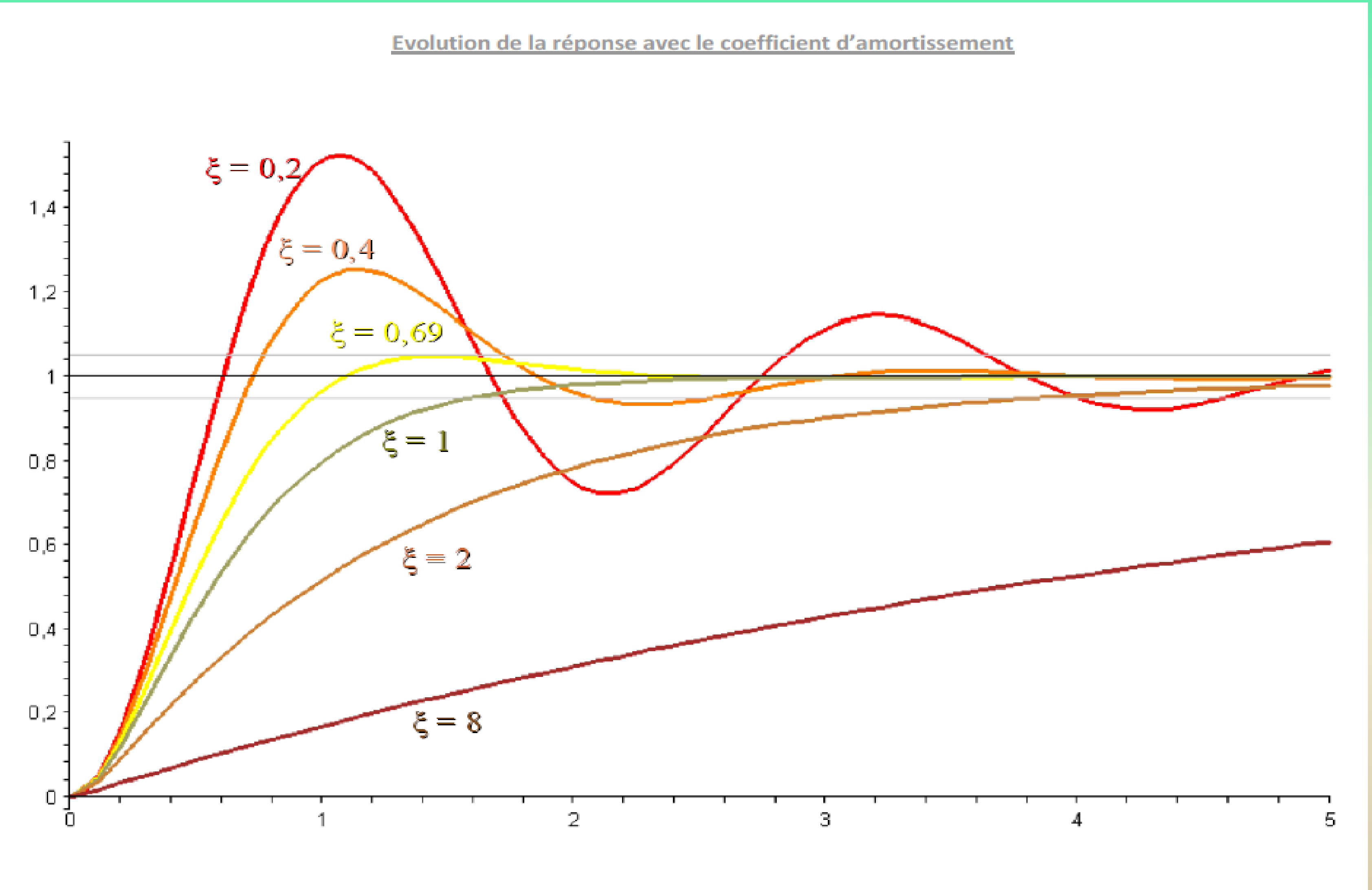
10-2. REPONSE INDICIELLE D'UN SYSTÈME DU DEUXIEME ORDRE(suite)

- Cas $\xi < 1$: SYSTEME SOUS-AMORTI



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

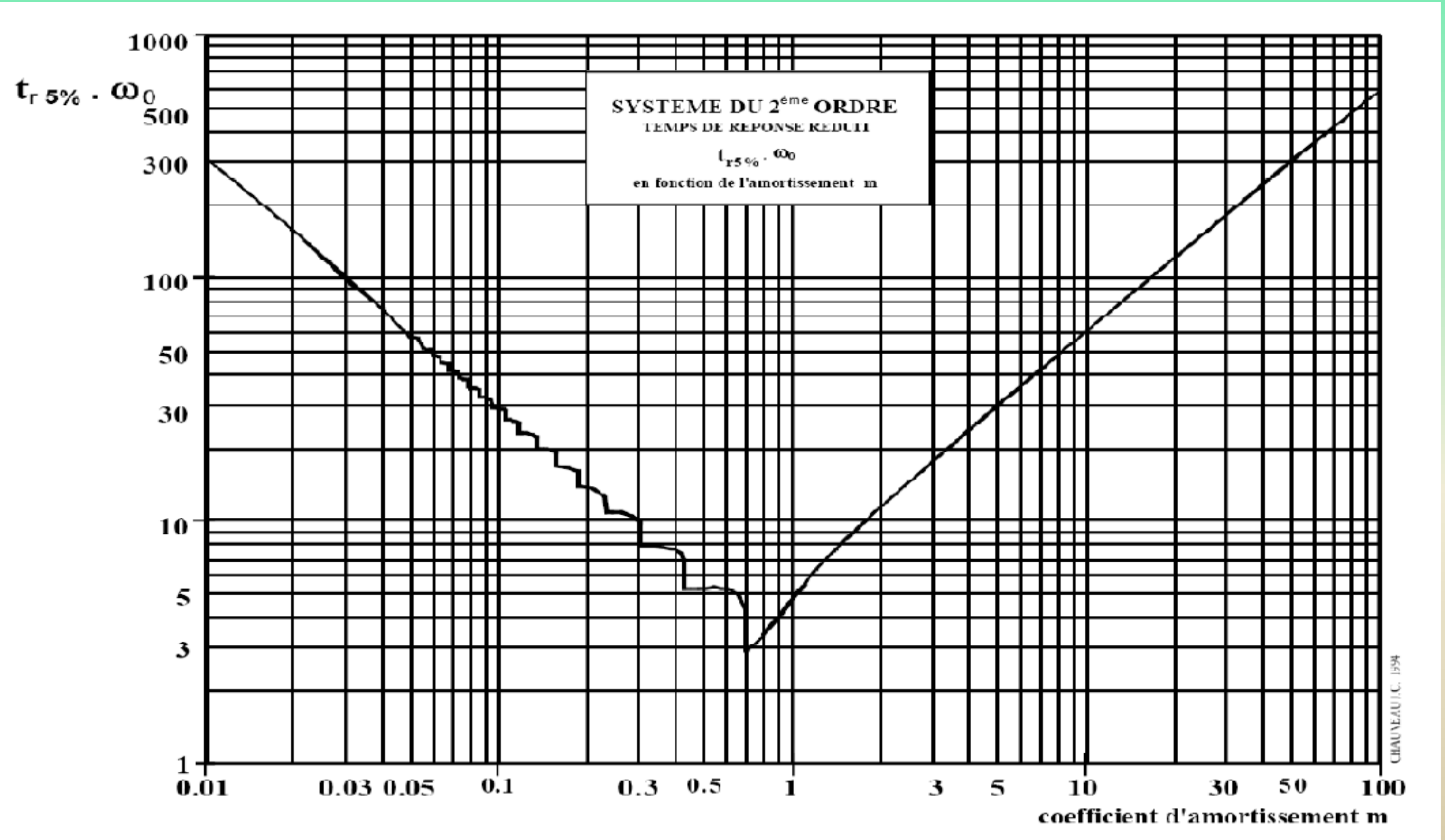
10-2. REPONSE INDICIELLE D'UN SYSTÈME DU DEUXIEME ORDRE(suite)



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

10-2. REPONSE INDICIELLE D'UN SYSTÈME DU DEUXIEME ORDRE(suite)

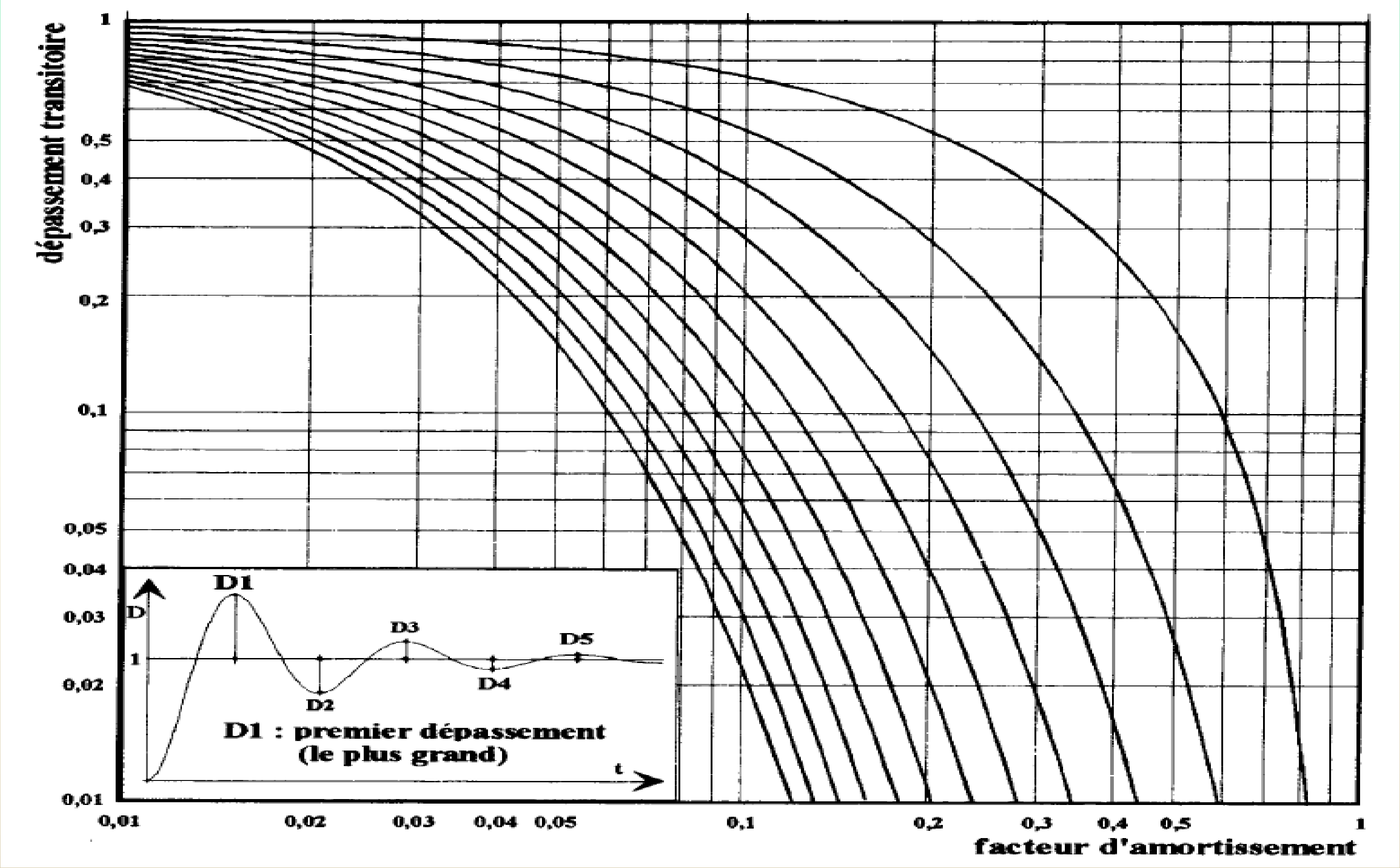
Abaque de détermination du temps de réponse a 5 % d'un système du deuxième ordre à une entree indicielle (ou échelon)



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

10-2. REPONSE INDICIELLE D'UN SYSTÈME DU DEUXIEME ORDRE(suite)

Abaque de détermination des dépassements pour un système du deuxième ordre a une entrée indicielle (ou échelon)



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

11- IDENTIFICATION

Il s'agit de **déterminer**, **à l'aide d'essais expérimentaux**, la **fonction de transfert** d'un système que l'on désire asservir car :
- la **mise en équations est difficile** (**indétermination de certains paramètres**, inertie réelle, frottements, constantes de temps, etc.).
- ces paramètres **dépendent souvent des conditions** dans lesquelles sont effectuées les mesures (atteinte de saturation, etc.).

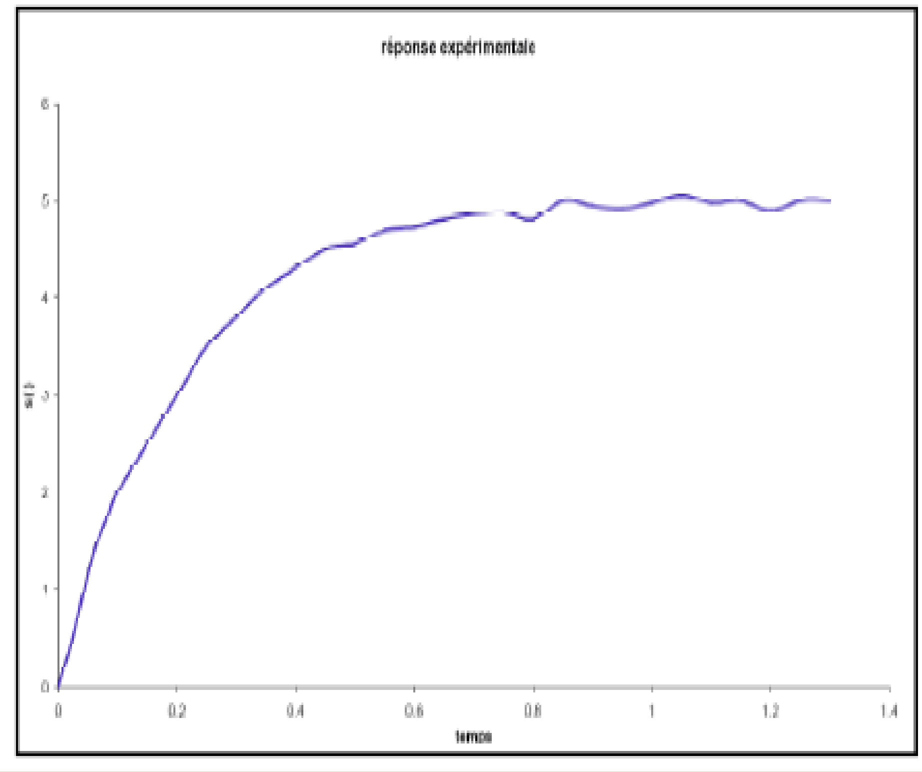
Il est donc préférable de les **déterminer dans les conditions aussi proches que possible de l'utilisation normale** du système (linearisation autour d'un point de fonctionnement).

La **détermination des paramètres** intervenant dans la structure s'effectue principalement **à partir des réponses indicielles** et **harmoniques**

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

11-1 IDENTIFICATION D'UN SYSTEME D'ORDRE 1

La réponse indicielle d'un système a un échelon d'amplitude Ec=5 a été enregistrée.
On obtient la courbe ci-dessous



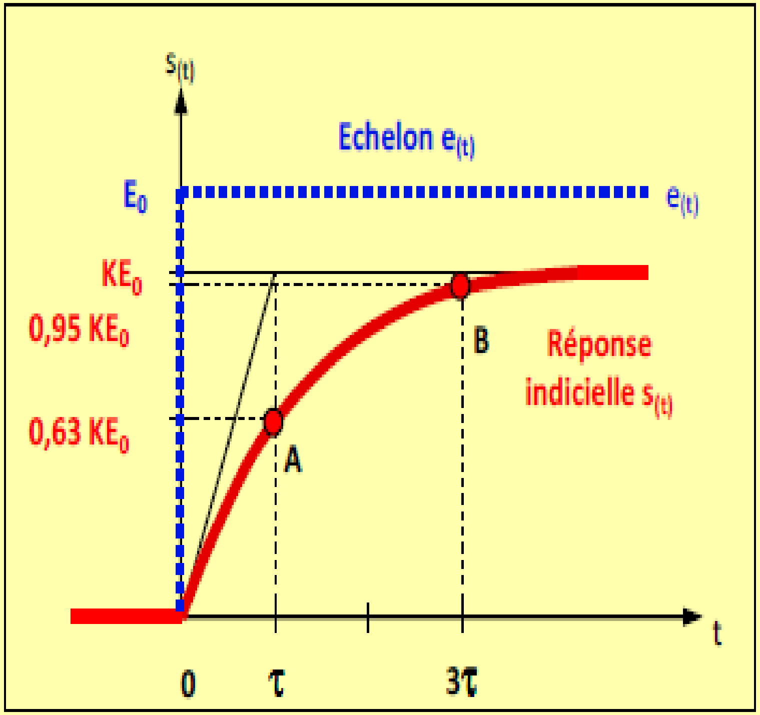
Nous constatons une pente à l'origine non nulle et aucun dépassement de la réponse.
Nous adoptons pour ces raisons le modèle suivant du premier ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

11- 1 IDENTIFICATION D'UN SYSTEME D'ORDRE 1(suite)

METHODE D'IDENTIFICATION : PREMIER ORDRE



- **L'asymptote horizontale** permet de calculer le gain statique **K** :

$$\boxed{K = \frac{S_\infty}{E_0}} \qquad \text{où} \quad S_\infty = \lim_{t \to \infty} s_{(t)} \; *$$

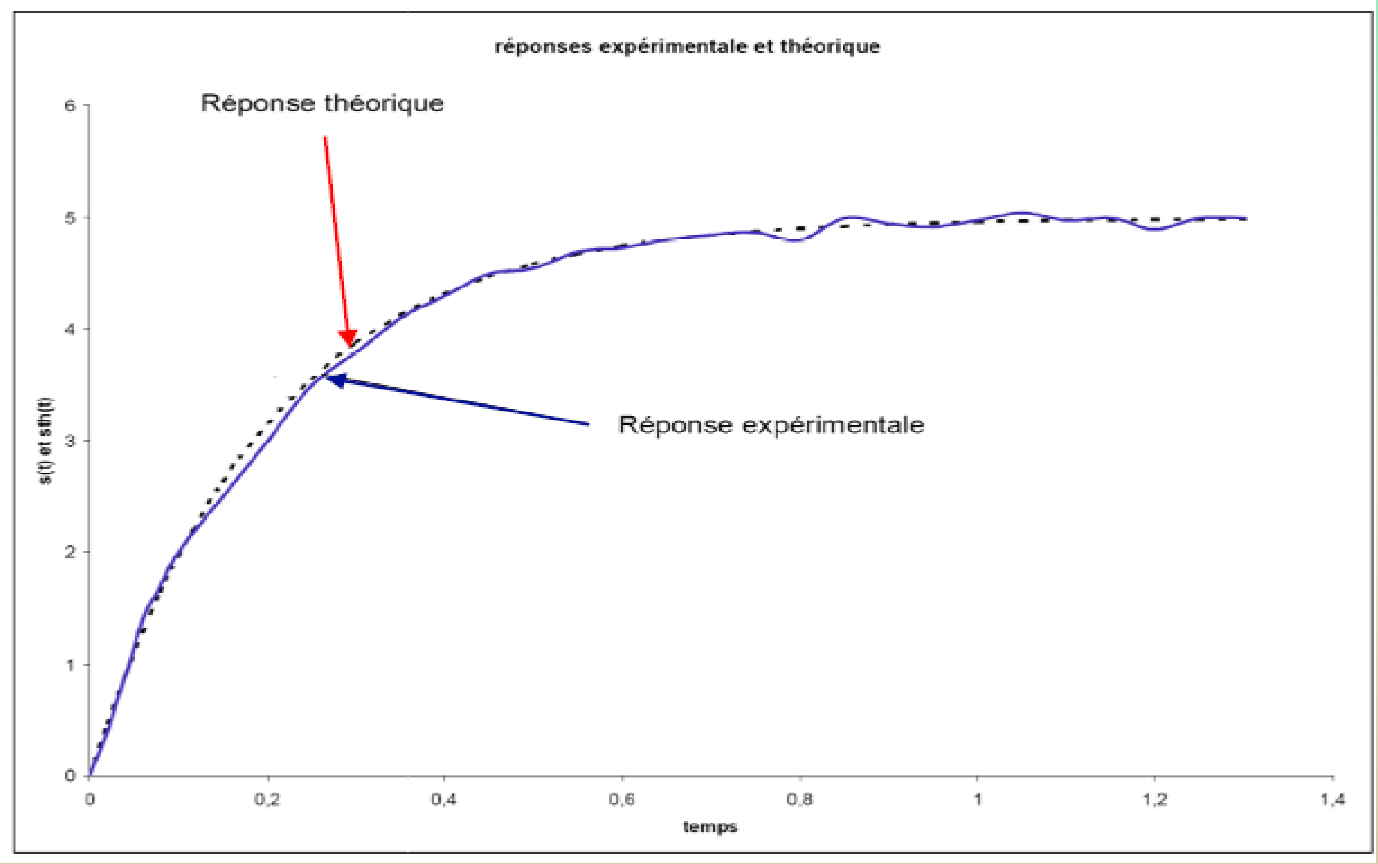
- La constante de temps **τ** est obtenue par **l'intersection de la tangente l'origine et de l'asymptote horizontale**, ou (plus précis) par le temps m pour atteindre **63%** de la valeur finale S_∞ de $s_{(t)}$.

**D'après le théorème de la valeur finale :* $S_\infty = \lim_{t \to \infty} s_{(t)} = \lim_{p \to 0} pS(p) = \lim_{p \to 0} pH(p)E(p) = KE_0$ *car* $E(p) = \frac{E_0}{p}$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

11-1 IDENTIFICATION D'UN SYSTEME D'ORDRE 1(suite)

En appliquant cette méthode, on trouve ici K=1 et $\tau = 0{,}2$
La courbe réponse issue du modèle est alors tracée pour vérifier sa validité :
la fonction de transfert identifiée modélise correctement le système étudié



Représentation des systèmes linéaires continus invariants

11-1 IDENTIFICATION D'UN SYSTEME D'ORDRE 1(suite)

Méthode annexe pour l'identification de la constante de temps τ

La constante de temps τ peut également être déterminée par l'approche suivante:

- Le gain K ayant été identifié à l'aide de l'asymptote horizontale, la différence e-s :

$$Ke(t)-s(t)=KE_0-KE_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)=KE_0e^{-t/\tau}$$

- On passe au logarithme :

$$\ln\left(KE_0e^{-t/\tau}\right)=\ln\left(KE_0\right)-\frac{t}{\tau},$$ expression de la forme $y(t)=At+B$ avec $A=-\frac{1}{\tau}$

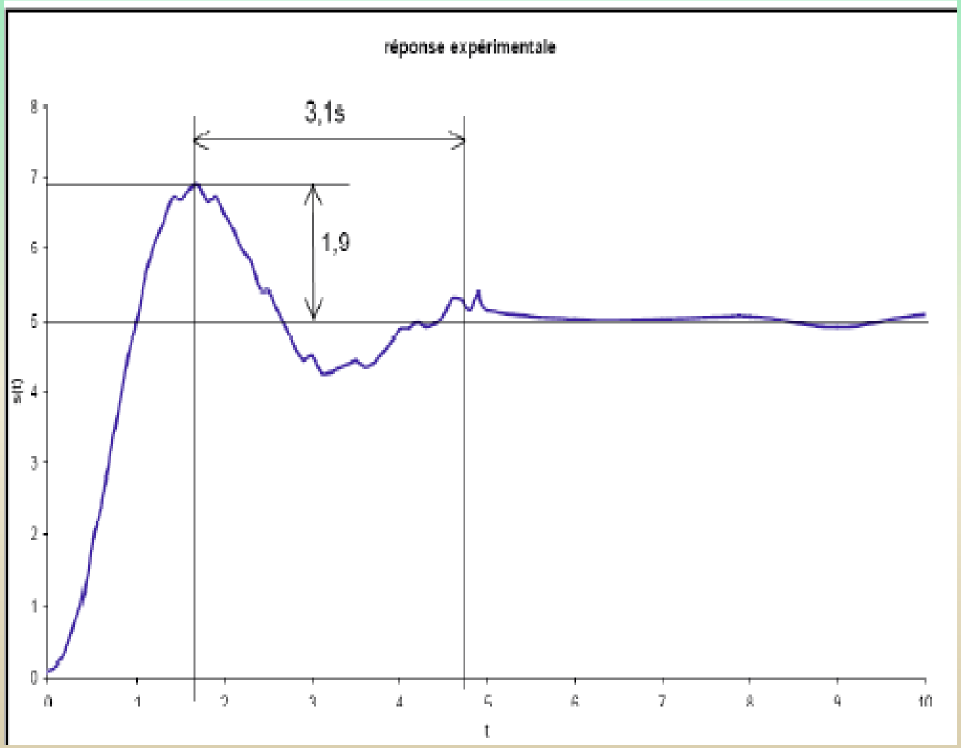
- On trace la courbe associée, et on obtient le gain en déterminant, par régression linéaire la pente A de la droite associée : $\tau=-\frac{1}{A}$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

11-2 IDENTIFICATION D'UN SYSTEME D'ORDRE 2

SYSTEME D'ORDRE 2 OSCILLANT SOUS AMORTI ($0 < \xi < 1$)

La réponse indicielle d'un système a un échelon d'amplitude Ec=5 a été enregistrée. On obtient la courbe ci-dessous



Nous constatons une **réponse pseudo périodique** avec une **pente à l'origine nulle** et des **dépassements** de la réponse.
Nous adoptons pour ces raisons le modèle suivant :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}.p + \frac{1}{\omega_0^{\ 2}}.p^2}$$

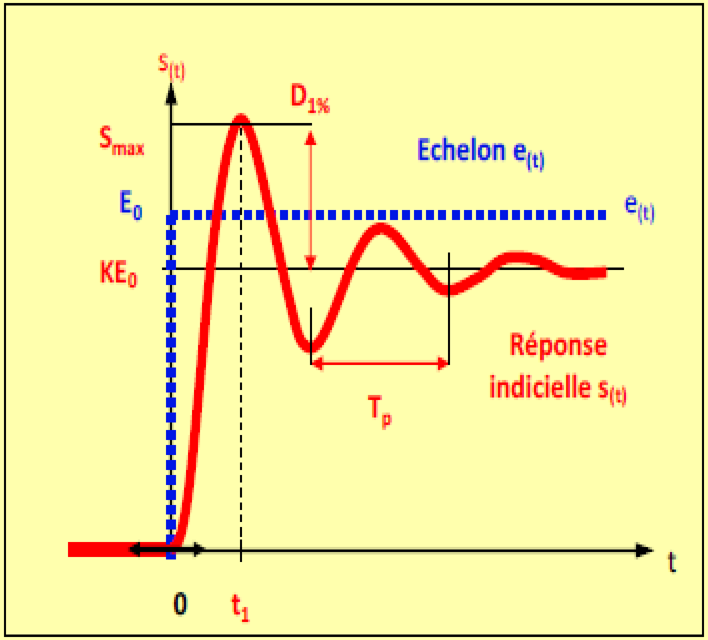
avec ici $0 < \xi < 1$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

11-2 IDENTIFICATION D'UN SYSTEME D'ORDRE 2(suite)

SYSTEME D'ORDRE 2 OSCILLANT SOUS AMORTI ($0 < \xi < 1$)

METHODE D'IDENTIFICATION : SECOND ORDRE OSCILLANT AMORTI



- L'asymptote horizontale permet de calculer le gain statique **K** :

$$\boxed{K = \frac{S_\infty}{E_0}} \qquad \text{où} \qquad S_\infty = \lim_{t\to\infty} s_{(t)}$$

La réponse présente un dépassement $\mathbf{D_{1\%}}$ défini par :

$$\boxed{D_{1\%} = 100 \cdot \left| \frac{S_{max} - S_\infty}{S_\infty} \right|}$$

Sa valeur permet de connaître le coefficient d'amortissement ξ du système car pour un système du 2nd ordre oscillant amorti, on a :

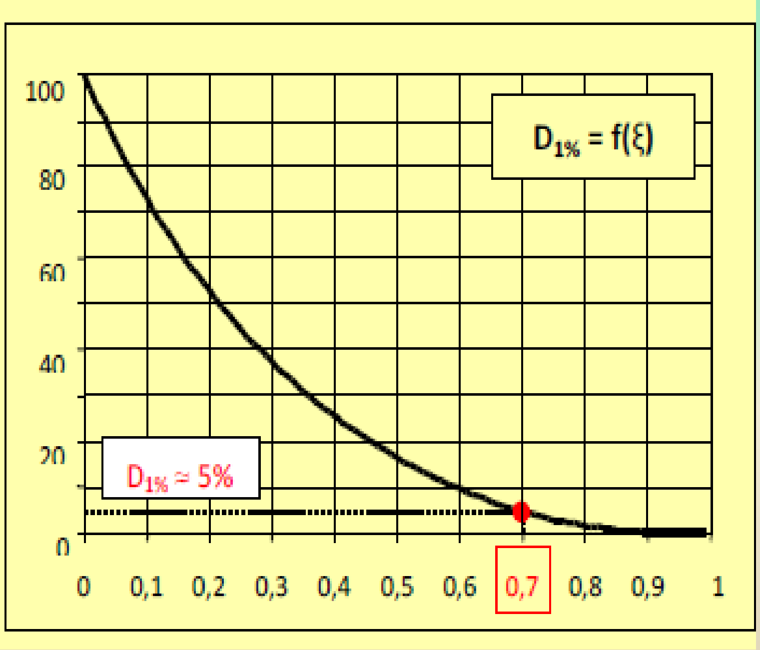
$$\boxed{D_{1\%} = 100 \times e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

11-2 IDENTIFICATION D'UN SYSTEME D'ORDRE 2(suite)

SYSTEME D'ORDRE 2 OSCILLANT SOUS AMORTI ($0 < \xi < 1$)

METHODE D'IDENTIFICATION : SECOND ORDRE OSCILLANT AMORTI



La courbe ci-contre donne le dépassement **D1%** en fonction de l'amortissement ξ.

Pour **D1% ≃ 5 %** par exemple, on lit $\xi \simeq$ **0,7**.

Il reste alors à déterminer la pulsation propre $\boldsymbol{\omega_0}$ à partir de la pseudo - ériode $\mathbf{T_p}$ des oscillations :

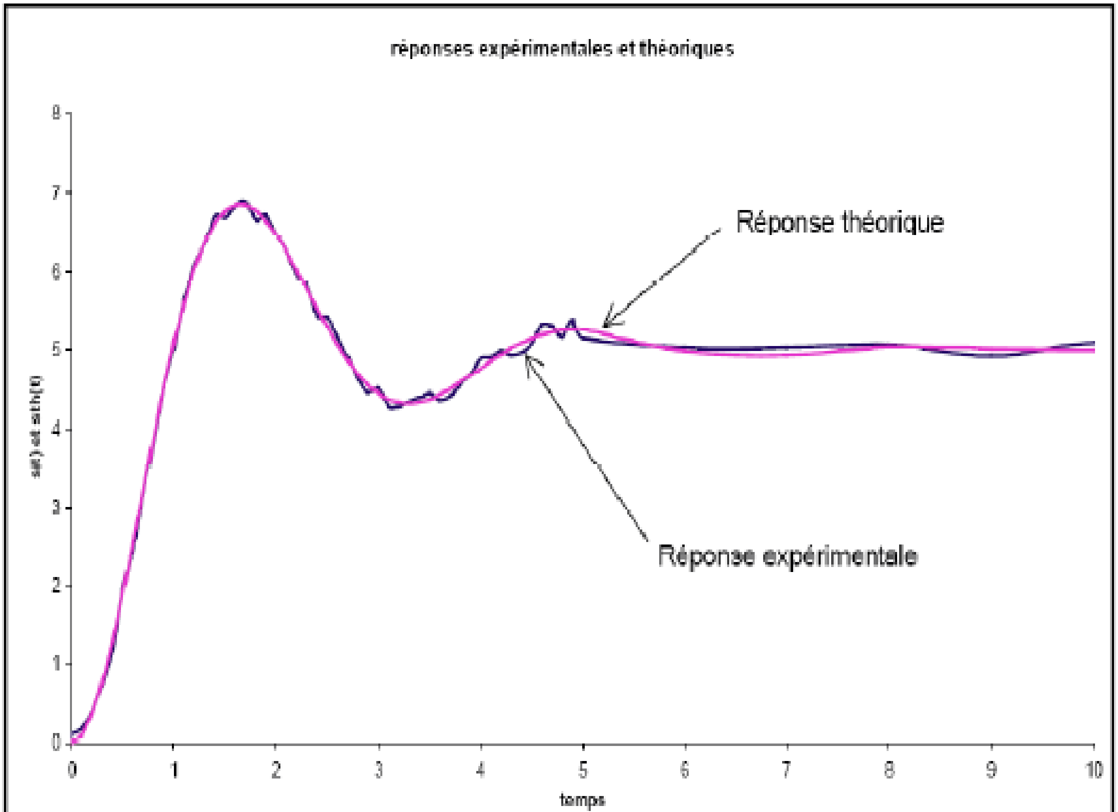
A partir de $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_p} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$

on détermine $\boxed{\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_p\sqrt{1-\xi^2}}}$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

11-2 IDENTIFICATION D'UN SYSTEME D'ORDRE 2 (suite)

SYSTEME D'ORDRE 2 OSCILLANT SOUS AMORTI ($0 < \xi < 1$)



En appliquant cette méthode, on trouve ici :

K=1, ξ =0,3 et ω_0 =2rd/s.

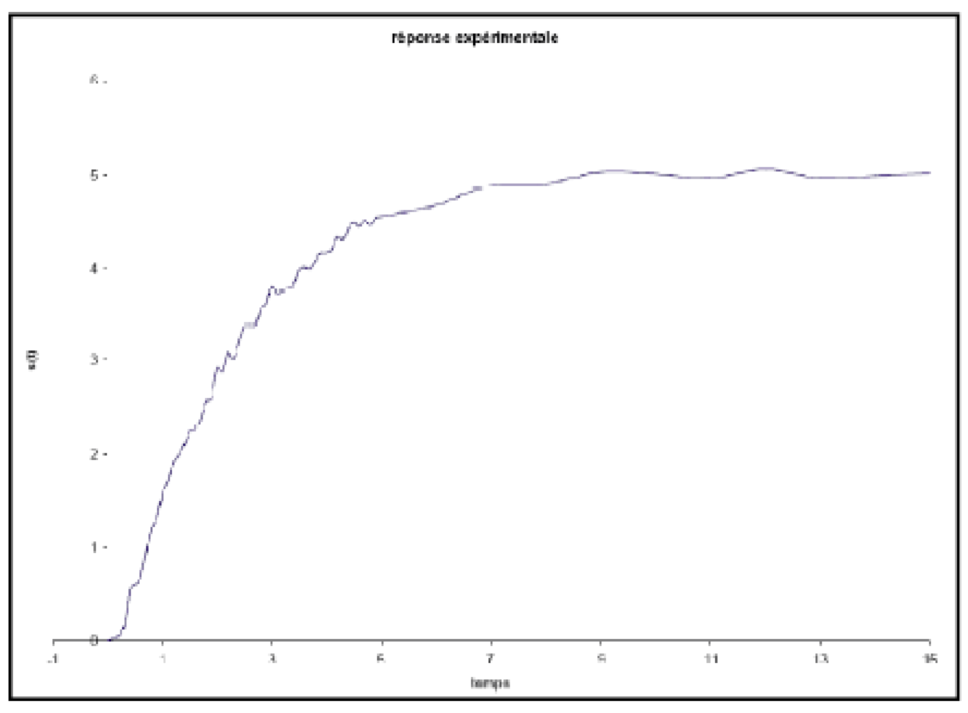
La courbe réponse issue du modèle est alors tracée pour vérifier sa validité: *la fonction de transfert identifiée modélise correctement le système étudié.*

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

11-2 IDENTIFICATION D'UN SYSTEME D'ORDRE 2 (suite)

SYSTEME D'ORDRE 2 NON OSCILLANT AMORTI ($\xi \geq 1$)

La réponse indicielle d'un système a un échelon d'amplitude Ec=5 a été enregistrée. On obtient la courbe ci-dessous.



Nous constatons une réponse apériodique avec une pente à l'origine nulle et aucun dépassement. Nous adoptons pour ces raisons le modèle suivant :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}.p + \frac{1}{\omega_0^{\,2}}.p^2}$$

avec ici $\xi > 1$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

11-2 IDENTIFICATION D'UN SYSTEME D'ORDRE 2 (suite)

SYSTEME D'ORDRE 2 NON OSCILLANT AMORTI ($\xi \geq 1$)

METHODE D'IDENTIFICATION : SECOND ORDRE NON-OSCILLANT AMORTI

Si $\xi > 1$, le système peut être considéré comme le produit de deux fonctions du 1er ordre de constantes de temps τ_1 et τ_2 telles que $\tau_1 > \tau_2$.

$$\frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)\times(1+\tau_2 p)}$$

Si on pose $\alpha = \tau_2 / \tau_1 < 1$ alors la fonction de transfert **H(p)** peut encore s'écrire en posant $\tau = \tau_1$:

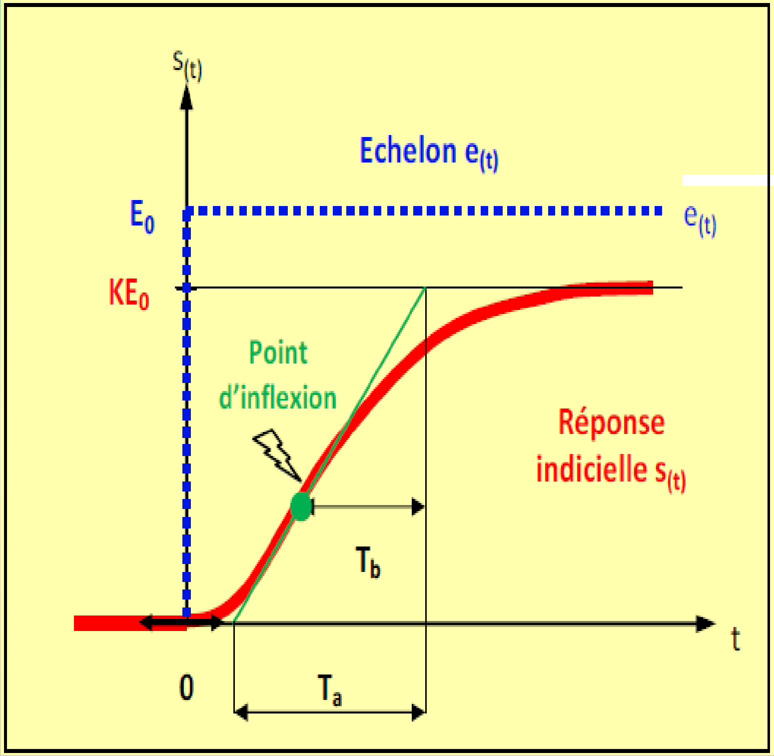
$$\boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{K}{(1+\tau p)\times(1+\alpha\tau p)}}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

11-2 IDENTIFICATION D'UN SYSTEME D'ORDRE 2 (suite)

SYSTEME D'ORDRE 2 NON OSCILLANT AMORTI ($\xi \geq 1$)

METHODE D'IDENTIFICATION : SECOND ORDRE NON-OSCILLANT AMORTI



- L'asymptote horizontale permet de calculer le gain statique **K** :

$$\boxed{K = \frac{S_\infty}{E_0}} \qquad \text{où} \qquad S_\infty = \lim_{t \to \infty} s_{(t)}$$

- Pour déterminer les valeurs de α et τ, on commence par tracer la tangente au point d'inflexion. Elle permet de définir les valeurs de T_a et T_b. On démontrerait que :

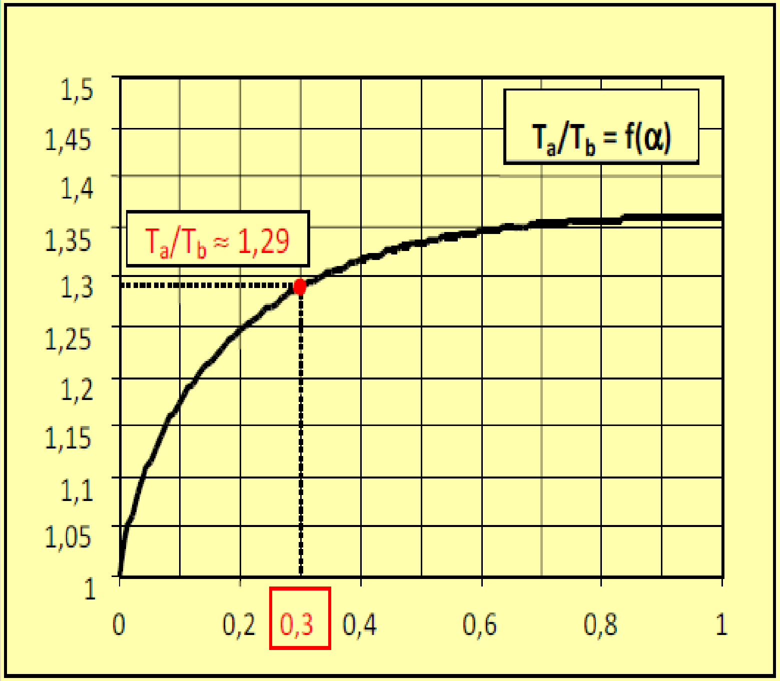
$$\boxed{\frac{T_a}{T_b} = \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{1+\alpha}}$$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

11-2 IDENTIFICATION D'UN SYSTEME D'ORDRE 2 (suite)

SYSTEME D'ORDRE 2 NON OSCILLANT AMORTI ($\xi \geq 1$)

METHODE D'IDENTIFICATION : SECOND ORDRE NON-OSCILLANT AMORTI



La courbe correspondante est tracée ci-contre. Elle permet d'obtenir la valeur de α.

Pour $\frac{T_a}{T_b} \simeq 1,29$ par exemple, on lit $\alpha \approx$ **0,30**.

La valeur de τ est donnée par : $\boxed{\tau = \frac{T_b}{1+\alpha}}$

Représentation des systèmes linéaires continus invariants

REFERENCES

Cours CPGE - Lycée La Fayette - Clermont-Ferrand

Cours CPGE - Lycée Jules Ferry - 06400 Cannes

Cours CPGE - Nicolas Mesnier - Lycée Jean Perrin - Lyon