Correction et amélioration des performances des SLCI

Compétences visées:

B2-01 Identifier le comportement d'un système pour l'assimiler à un modèle canonique, à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.
B2-02 Établir un modèle de comportement à partir de relevés expérimentaux.
B2-05 Déterminer les fonctions de transfert du système en boucle ouverte et en boucle fermée.
B2-59 Écrire un schéma bloc du système.
B2-62 Caractériser la stabilité (marges de stabilité).
B2-63 Justifier une simplification du modèle.
B2-64 Déterminer l'influence du gain et de la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte sur la précision et la rapidité.
B2-65 Mener une démarche de réglage d'un correcteur pour obtenir les performances attendues.
C1-11 Déterminer à partir d'un schéma bloc ou d'une fonction de transfert les grandeurs caractérisant les performances du modèle.
C1-12 Tracer une réponse temporelle ou fréquentielle.

Correction et amélioration des performances des SLCI

Sommaire

Correction et amélioration des performances des SLCI

Sommaire

Correction et amélioration des performances des SLCI

1 – Objectifs

L'amélioration des performances des SLCI consiste à **déterminer un correcteur** adapté dans le but de **satisfaire les exigences d'un cahier des char**ges. Aucune étude systématique n'est possible, car **chaque système possède ses propres caractéristiques**, et les exigences à satisfaire diffèrent aussi.
Cependant, il est possible d'analyser les **avantages** et les **inconvénients** de **chaque correcteur** sur les performances globales d'un système, en vue de les choisir et de déterminer leurs paramètres.
La détermination des paramètres d'un correcteur est basée sur la connaissance d'un modèle d'un système.
Plus le modèle du système sera précis (au sens, proche de la réalité), plus les performances mesurées en boucle fermée seront proches de celles obtenues par simulation.

Correction et amélioration des performances des SLCI

2 - Rappels sur la modélisation des SLCI

2.1 Modèles de connaissance et de comportement

Définition: *Modèle de connaissance*
Un **modèle de connaissance** est un modèle d'un système basé sur les **équations** généralement issues de la **physique**.
Il est bien évidemment assujetti aux hypothèses, supposées vérifiées.

Définition: *Modèle de comportement*
Un **modèle de comportement** est un modèle d'un système basé sur sa **réponse expérimen**tale, **temporelle** ou **fréquentielle**.
Il est lui aussi assujetti aux hypothèses (de linéarité notamment).

Correction et amélioration des performances des SLCI

2-2 Linéarité d'un système

Important ! Un système est dit linéaire s'il vérifie les propriétés de **proportionnalité** et de **superposition**

Dans le cadre de cette **hypothèse de linéarité**, si un système possède plusieurs entrées (Figure 1 avec 2 entrées), il est **possible d'écrire** que la **sortie est une combinaison linéaire des en**trées, dont les coefficients sont les fonctions de transfert.

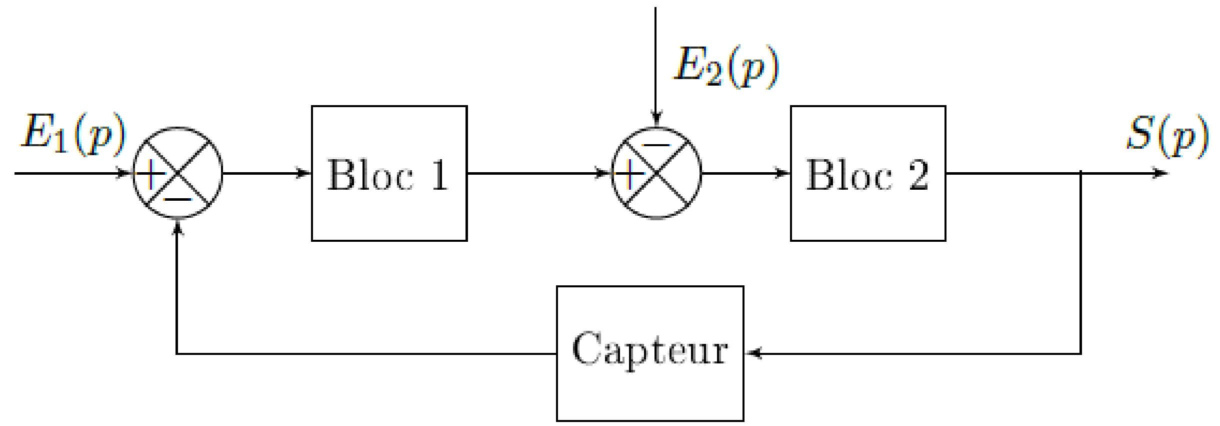


FIGURE 1 – Schéma-blocs fonctionnel d'un système à 2 entrées et 1 sortie

Correction et amélioration des performances des SLCI

Important !
Du fait de la **linéarité du modèle**, on peut écrire dans le cas de **2 entrées** ($E_1(p)$ et $E_2(p)$) et **une sortie** $S(p)$: $\mathbf{S(p) = H_1(p)E_1(p) + H_2(p)E_2(p)}$
Les fonctions de transfert associées au modèle sont donc :

$$H_1(p) = \left.\frac{S(p)}{E_1(p)}\right|_{E_2(p)=0} = \frac{S(p)}{E_1(p)} \qquad \text{et} \qquad H_2(p) = \left.\frac{S(p)}{E_2(p)}\right|_{E_1(p)=0} = \frac{S(p)}{E_2(p)}$$

2-3 Identification d'un modèle de comportement dans le domaine temporel

Le **seul critère** pour procéder au **choix d'un modèle** du premier ou du second ordre (ou supérieur) est la **pente de la tangente à l'origine**.
Si elle est **non nulle**, alors il est possible de modéliser le système par un **premier ordre** ; dans le cas contraire (tangente à l'origine **horizontal**e), il est possible de modéliser le système par un **ordre supérieur** ou **égal à 2**.

Correction et amélioration des performances des SLCI

2.3.1 Modèle de comportement d'un système de premier ordre passe-bas

Pour un **système du 1er ordre** du type passe-bas, la fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

Le **gain statique K** est déni par :

$$K = \frac{s(t=+\infty) - s(t=0)}{e(t=+\infty) - e(t=0)}.$$

Trois méthodes sont à notre disposition pour **identifier** la **constante de temps** d'un système du **premier ordre** du type passe-bas à partir de sa réponse indicielle :

- *l'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote de la valeur à convergence en t = ;*
- *le temps de réponse à 5% en $t_{5\%} = 3\,\tau$;*
- *le temps de réponse à 63% en $t = \tau$.*

Correction et amélioration des performances des SLCI

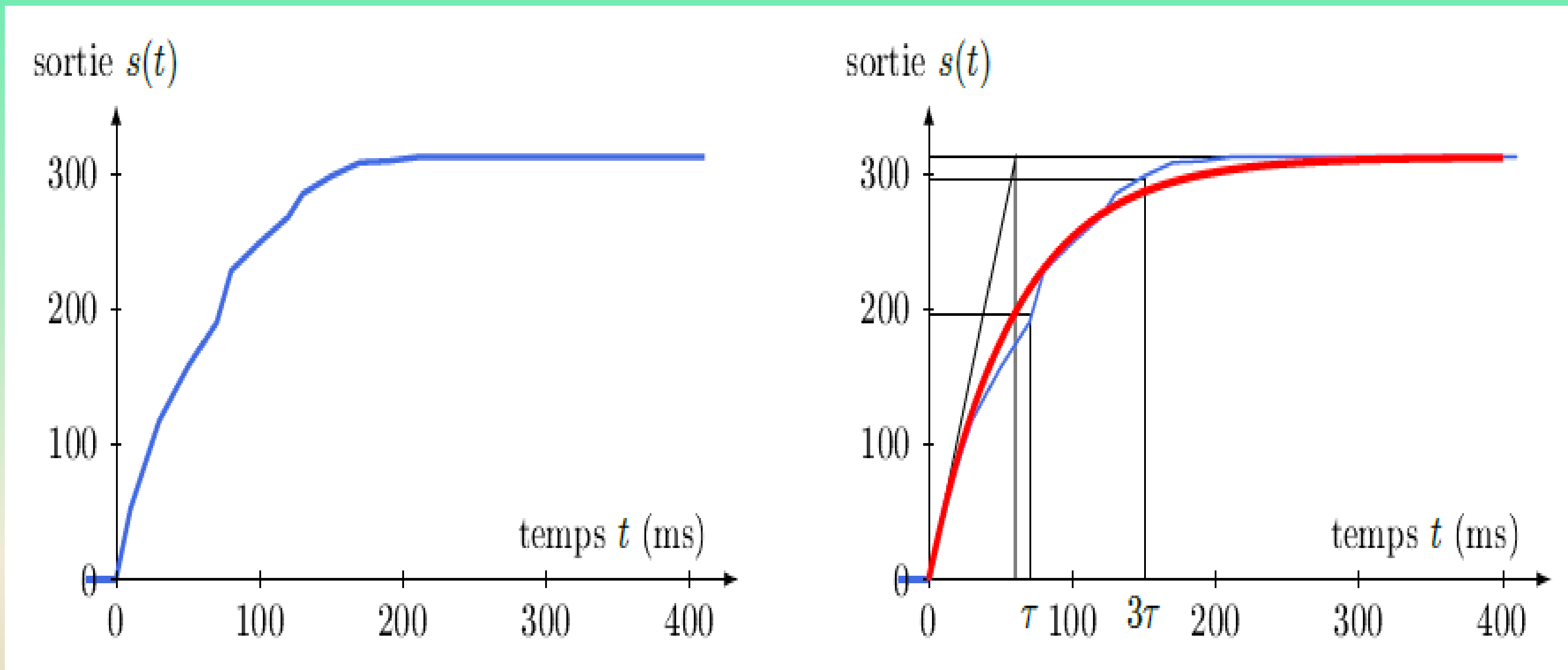


Figure 2 Identification d'un modèle de comportement d'un système du premier ordre

Correction et amélioration des performances des SLCI

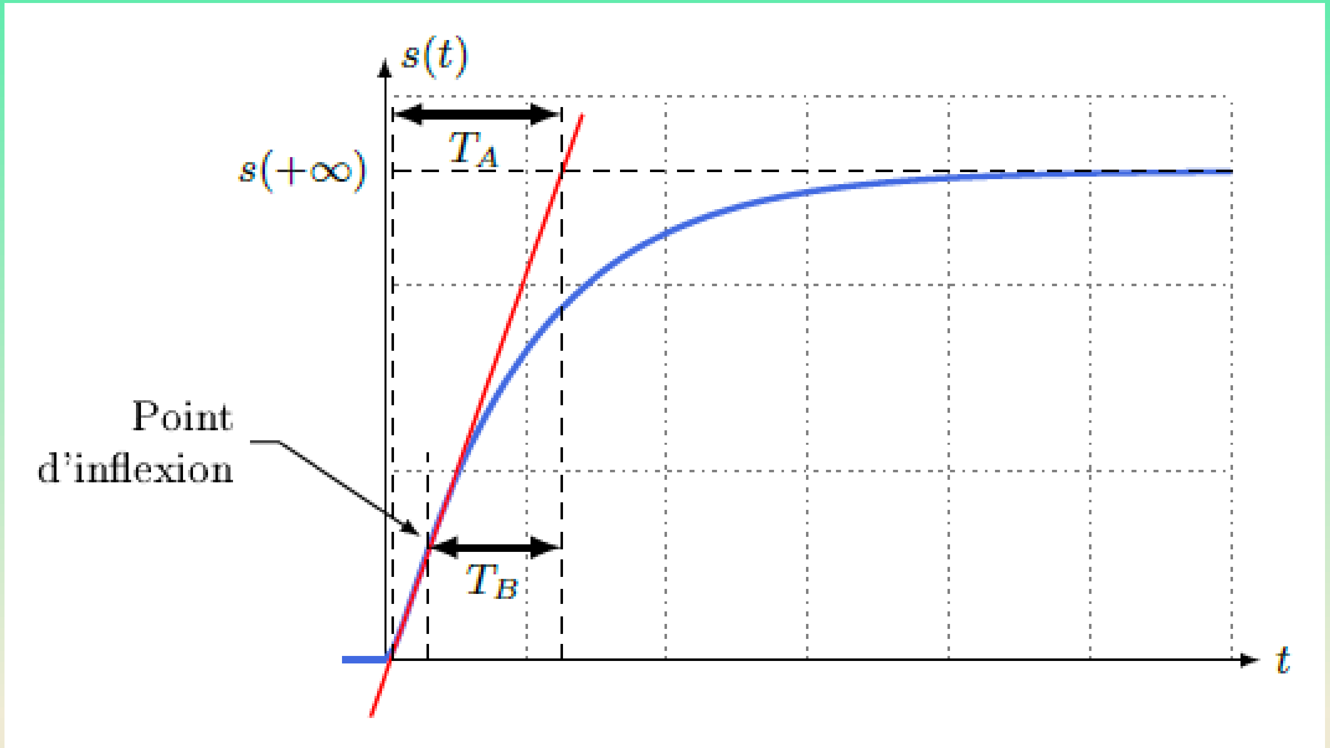
2.3.2 Modèle de comportement d'un système du second ordre passe-bas

Sans dépassement : De nombreuses méthodes existent afin d'identifier les systèmes du second ordre qui ne présentent **pas de dépassement** pour leurs réponses indicielles.
Parmi les plus connues et utilisées, on retiendra la méthode de Strejc-Broïda, détaillée ci-dessous. Cette méthode **n'est valable** bien évidemment que pour des **systèmes d'ordre supérieur ou égale à 2**, ne présentant **aucun dépassement** pour leur réponse indicielle.
Dans le cas d'un **système du second ordre sans dépassement**, la fonction de transfert dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{(1+\tau p)(1+\alpha\tau p)}$$

L'obtention d'un modèle de comportement consiste donc à déterminer les **3 paramètres** du modèle **K**, **τ** et **α.**

Correction et amélioration des performances des SLCI



<u>Figure 3</u> Identification d'un modèle de comportement d'un 2^e ordre sans dépassement

La constante de temps τ est telle que $\tau = \dfrac{T_B}{1+\alpha}$

Correction et amélioration des performances des SLCI

Le paramètre α est déterminé à partir de la courbe ci-après

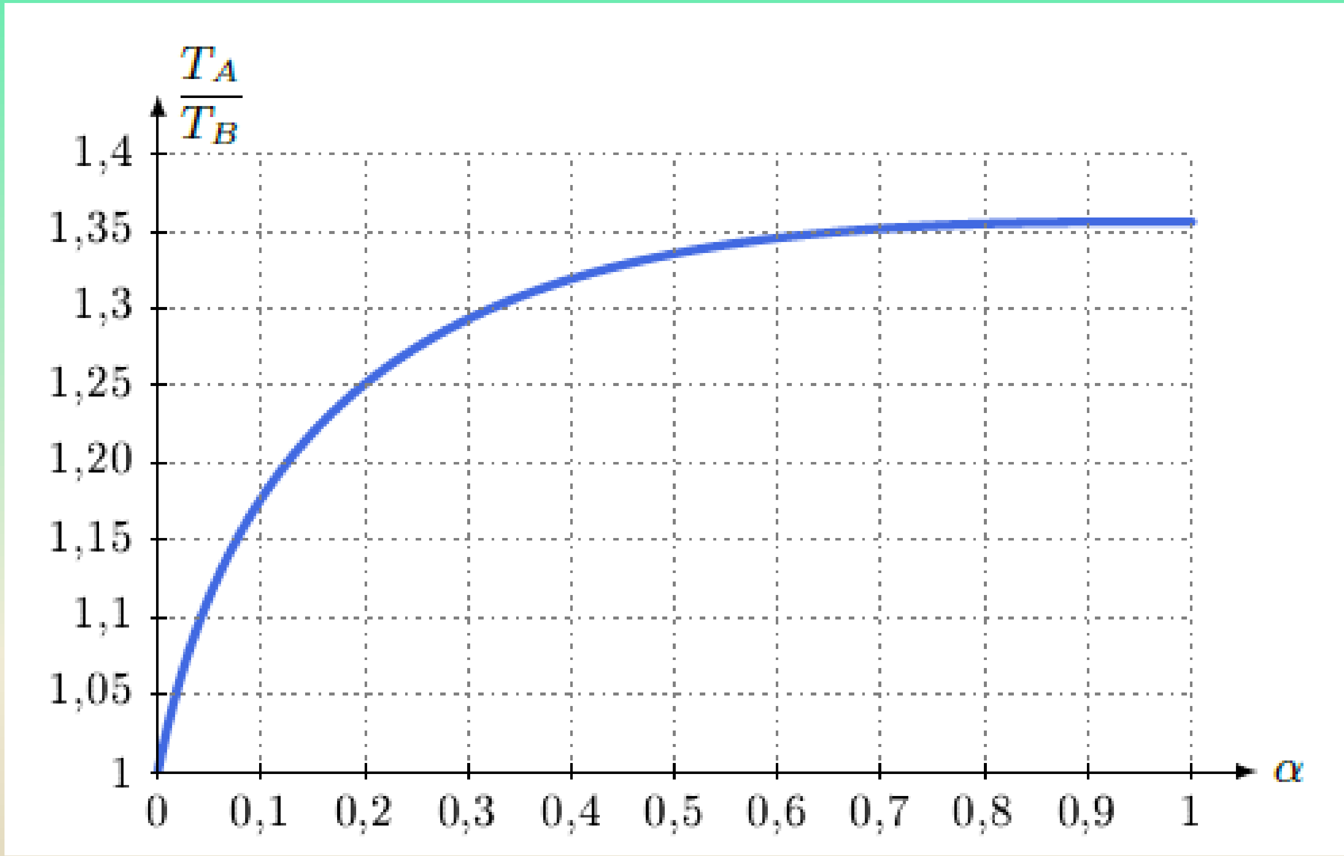


Figure 4 Abaque de Strejc-Broïda d'un système du second ordre sans dépassement

Correction et amélioration des performances des SLCI

Avec dépassement(s) :
Lorsqu'il y a présence de dépassement(s), un modèle de comportement possible est tel que la **fonction de transfert** du système s'écrit :

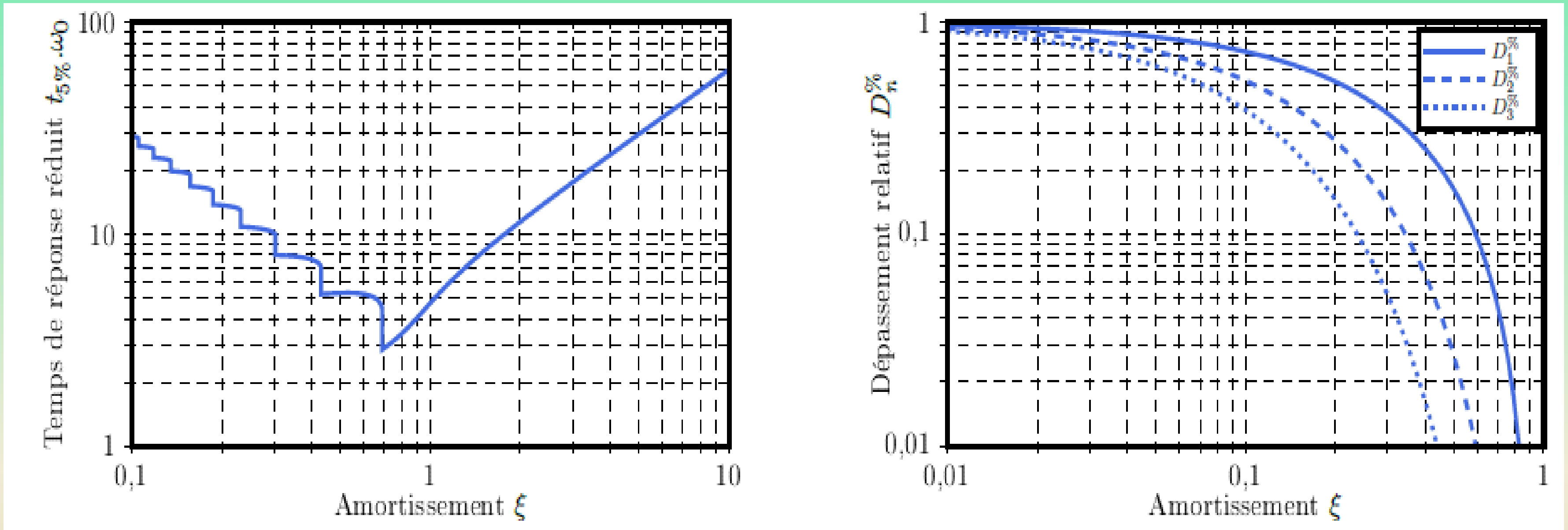
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2} \quad \text{avec} \quad \xi < 1$$

Le gain statique K est déni par :

$$K = \frac{s(t = +\infty) - s(t = 0)}{e(t = +\infty) - e(t = 0)}.$$

Correction et amélioration des performances des SLCI

Les paramètres du modèle **ξ** et $\boldsymbol{\omega_0}$ sont déterminés à partir des abaques de la figure ci-après.



<u>Figure 5</u>

Abaques du temps de réponse réduit ($\boldsymbol{t_{5\%}.\omega_0}$) et des dépassements relatifs ($\boldsymbol{D_k\%}$)

Correction et amélioration des performances des SLCI

Propriétés remarquables de la réponse indicielle d'un second ordre passe-bas

Temps du $k^{\text{ième}}$ dépassement	$t_k = \dfrac{k\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$
Amplitude du $k^{\text{ième}}$ dépassement	$D_k = KE_0 e^{-\frac{\xi k\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$
Pseudo-pulsation	$\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$
Pseudo-période	$T_a = \dfrac{2\pi}{\omega_a} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$

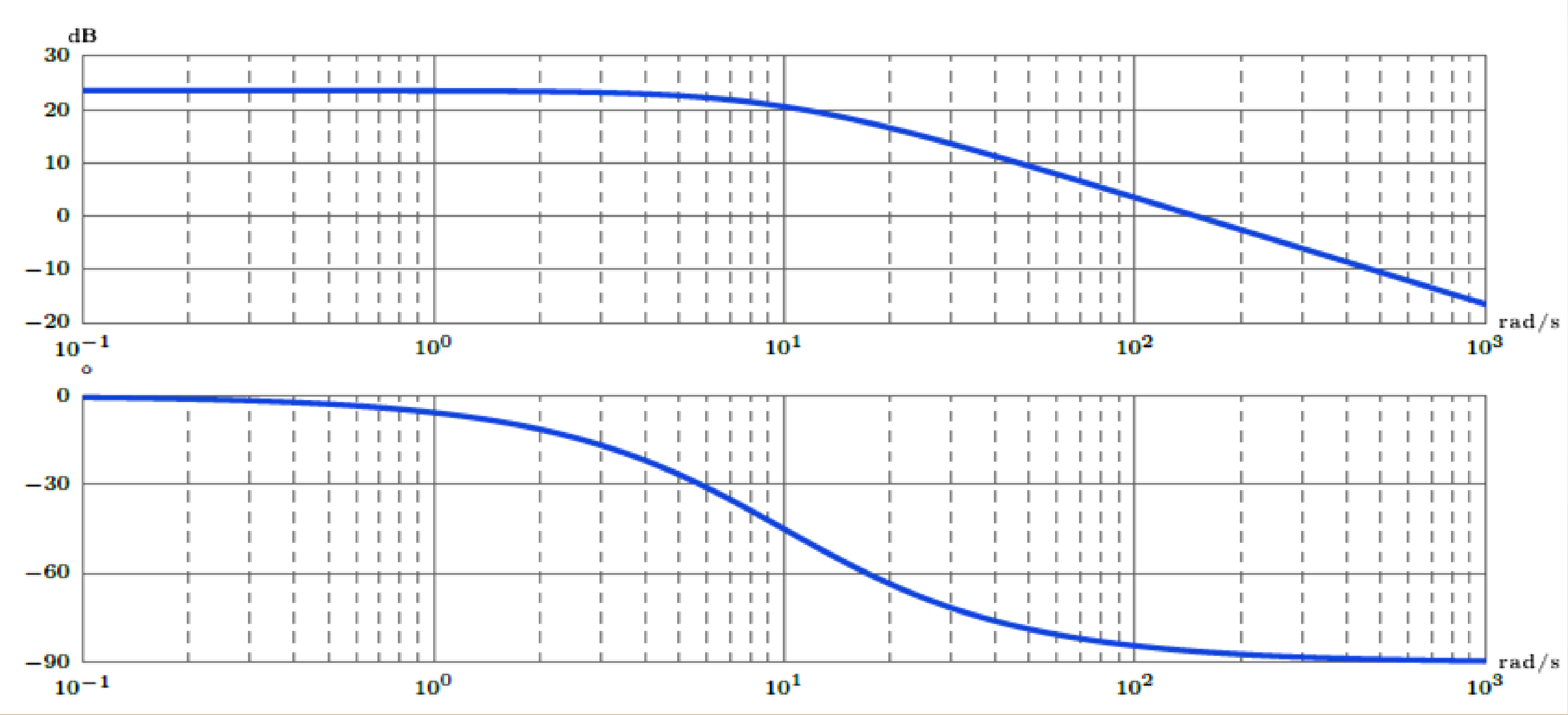
Correction et amélioration des performances des SLCI

2-4 Identification d'un modèle de comportement dans le domaine fréquentiel

Dans une **démarche d'identification** d'un modèle de comportement, il est aussi possible de procéder à un **essai fréquentiel** du système étudié. Cette méthode ne fournit **pas plus d'informations qu'une réponse indicielle**, mais peut permettre **d'affiner un modèle** notamment proche de la **résonance** si elle existe.

2.4.1 Modèle de comportement d'un système du premier ordre passe-bas

Le **diagramme de Bode** d'un système du **premier ordre** est tel que représenté sur la Figure ci-dessous.



Correction et amélioration des performances des SLCI

Propriétés remarquables de la répons fréquentielle d'un premier ordre passe-bas

Gain statique K	$20\log K = \lim\limits_{\omega\to 0} G_{db}(\omega)$
Gain en $\omega = \omega_0$	$G_{db}(\omega = \omega_0) = 20\log K - 3\,\mathrm{dB}$
Phase en $\omega = \omega_0$	$\varphi(\omega = \omega_0) = -\dfrac{\pi}{4}$

Correction et amélioration des performances des SLCI

2.4.2 Modèle de comportement d'un système du second ordre passe-bas

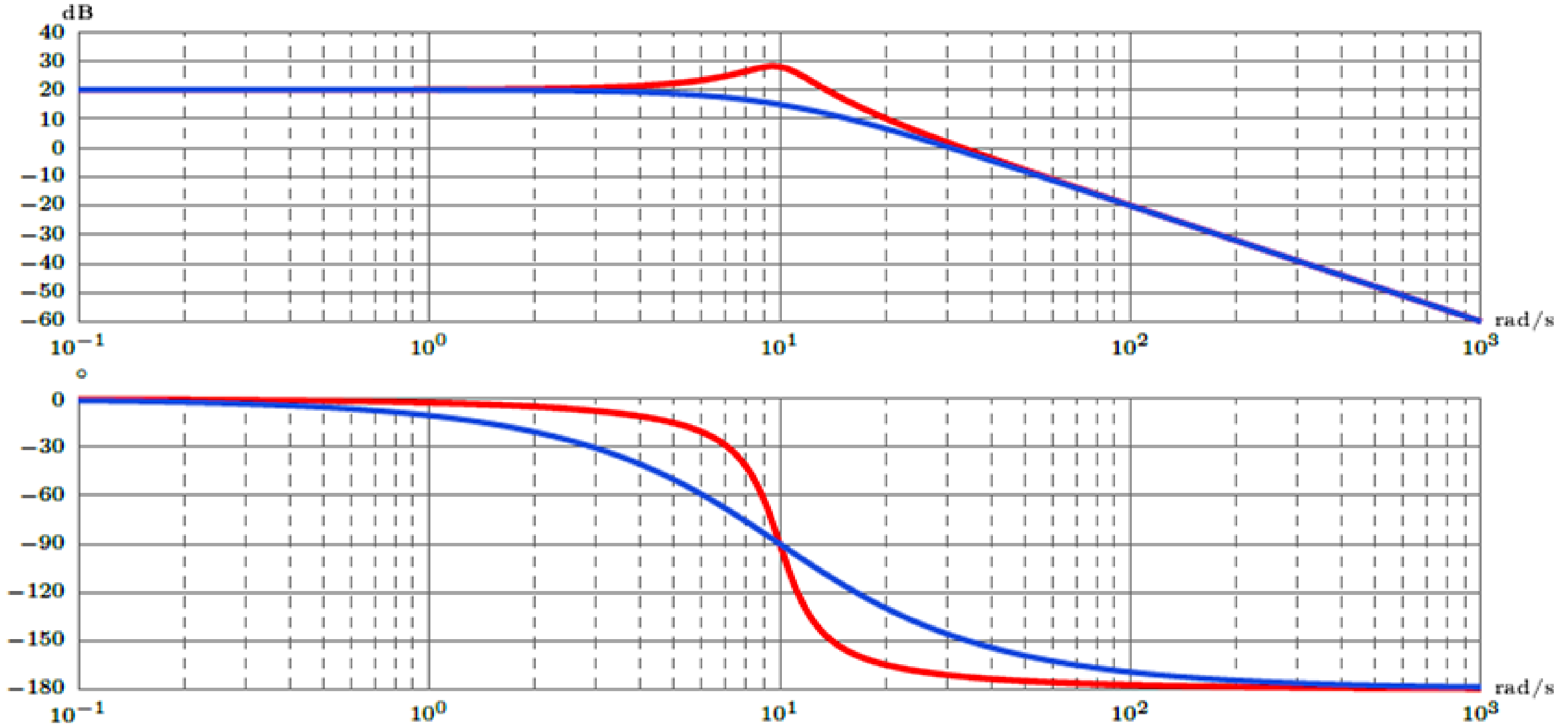


FIGURE 9 – Diagrammes de Bode d'un système du second ordre avec ξ inférieur et supérieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Les diagrammes de Bode d'un système du second ordre passe-bas avec coefficient d'amortissement ξ supérieur (en bleu) ou inférieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (en rouge) sont représentés sur la Figure 9.

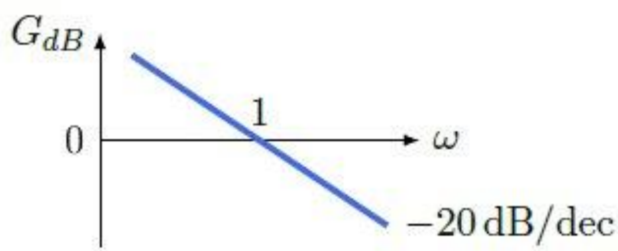
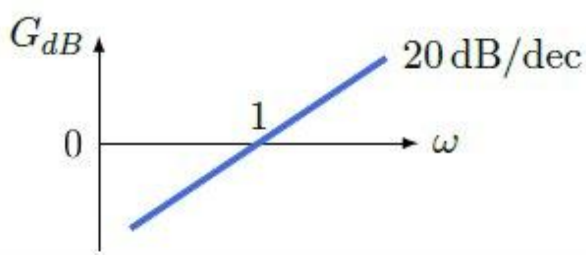
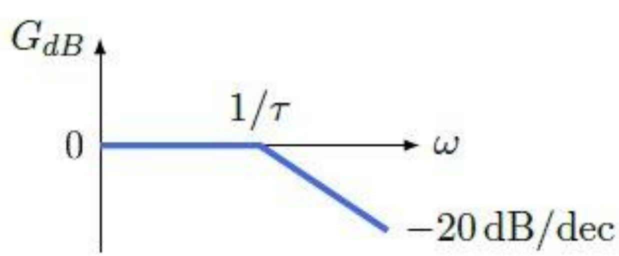
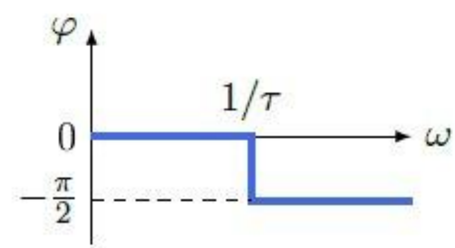
Correction et amélioration des performances des SLCI

Propriétés remarquables de la réponse fréquentielle d'un second ordre passe-bas

Gain statique K	$20 \log K = \lim\limits_{\omega \to 0} G_{db}(\omega)$
Pulsation de résonance ω_r	$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ si $\xi \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
Gain en $\omega = \omega_r$	$G_{dB}(\omega = \omega_r) = 20 \log \dfrac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$
Gain en $\omega = \omega_0$	$G_{dB}(\omega = \omega_0) = 20 \log \dfrac{K}{2\xi}$
Phase en $\omega = \omega_0$	$\varphi(\omega = \omega_0) = -\dfrac{\pi}{2}$

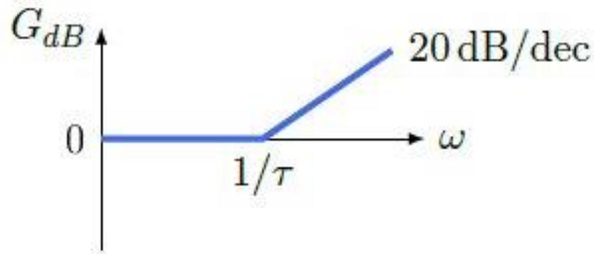
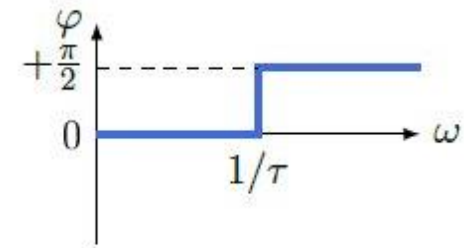
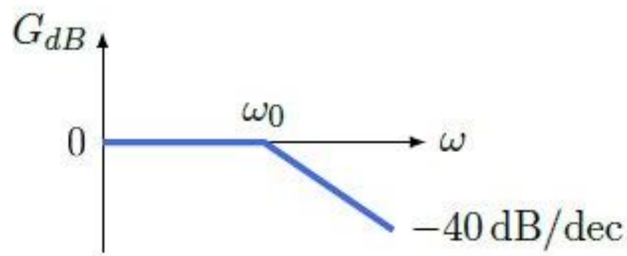
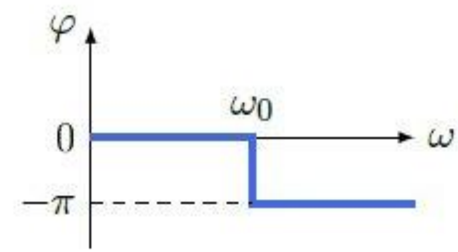
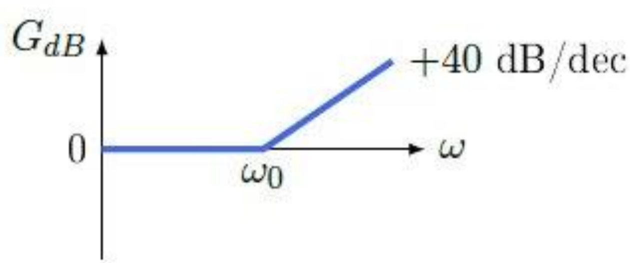
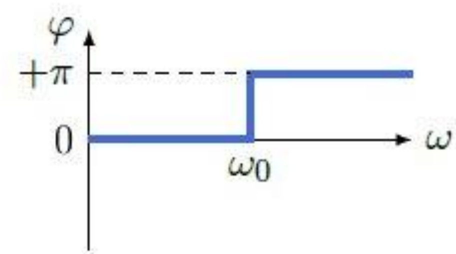
Correction et amélioration des performances des SLCI

2.4.3 Diagrammes de Bode asymptotiques des fonctions de transfert usuelles

Fonction de transfert	Diagramme de gain	Diagramme de phase
$H(p) = \dfrac{1}{p}$		
$H(p) = p$		
$H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$		

Correction et amélioration des performances des SLCI

2.4.3 Diagrammes de Bode asymptotiques des fonctions de transfert usuelles

Fonction de transfert	Diagramme de gain	Diagramme de phase
$H(p) = 1 + \tau p$		
$H(p) = \dfrac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0{}^2}p^2}$ avec $\xi \leq 1$		
$H(p) = 1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0{}^2}p^2$ avec $\xi \leq 1$		

Correction et amélioration des performances des SLCI

3 - Rappels sur les performances des SLCI

Les **performances** des systèmes linéaires continu et invariant (SLCI) sont dénies sur les critères de **stabilité**, de **précision** et de **rapidité.**

La **stabilité** est **primordiale**, et il est nécessaire de s'assurer de celle-ci avant tout, car **en cas d'instabilité**, les **2 autres performances n'ont pas de sens**.

Bien qu'il existe **3 domaines d'étude** des SLCI (**temporel, Laplace et fréquentiel**), ceux-ci sont identiques, et si une performance est vérifiée dans un domaine, elle le sera aussi dans les 2 autres.

Il est donc nécessaire de **choisir le domaine le plus approprié** afin de répondre à l'objectif visé.

Les études des performances des SLCI dans le **domaine temporel** se résument souvent à une analyse de la **réponse indicielle (entrée du type échelon)** ou une rampe ; quant à celles dans le **domaine fréquentiel**, elles sont basées sur **l'analyse du diagramme de Bode** (réel ou asymptotique) et/ou Black.

Correction et amélioration des performances des SLCI

3-1 Stabilité

3.1.1 Dans le domaine temporel

Un système linéaire continu et invariant peut être décrit dans le domaine temporel par l'équation différentielle à coefficients constants :

$$b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0\, s(t) = a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + a_1 \frac{de(t)}{dt} + a_0\, e(t)$$

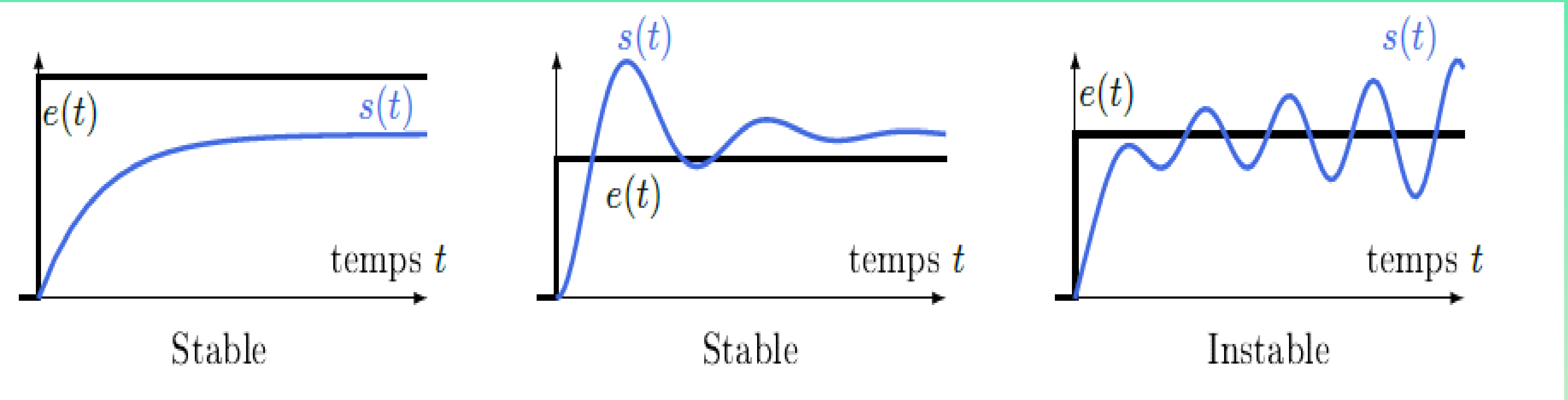
Pour que ce système ait une signification physique (au sens causal), il est obligatoire que le degré de dérivation sur la grandeur de sortie (n) soit supérieure ou égal au degré de dérivation sur la grandeur d'entrée (m). **On doit donc avoir n ≥ m** où **n** est **l'ordre** du système.

Définition

Un système (SLCI) est stable, si pour une entrée bornée, la sortie est bornée.

Correction et amélioration des performances des SLCI

Réponses indicielles de systèmes stables et instables dans le domaine temporel



Il apparaît clairement que la définition précédente **n'est pas suffisante** pour **définir la stabilité**. Il est donc **nécessaire** de **définir un critère spécifique** pour **quantifier la stabilité**.

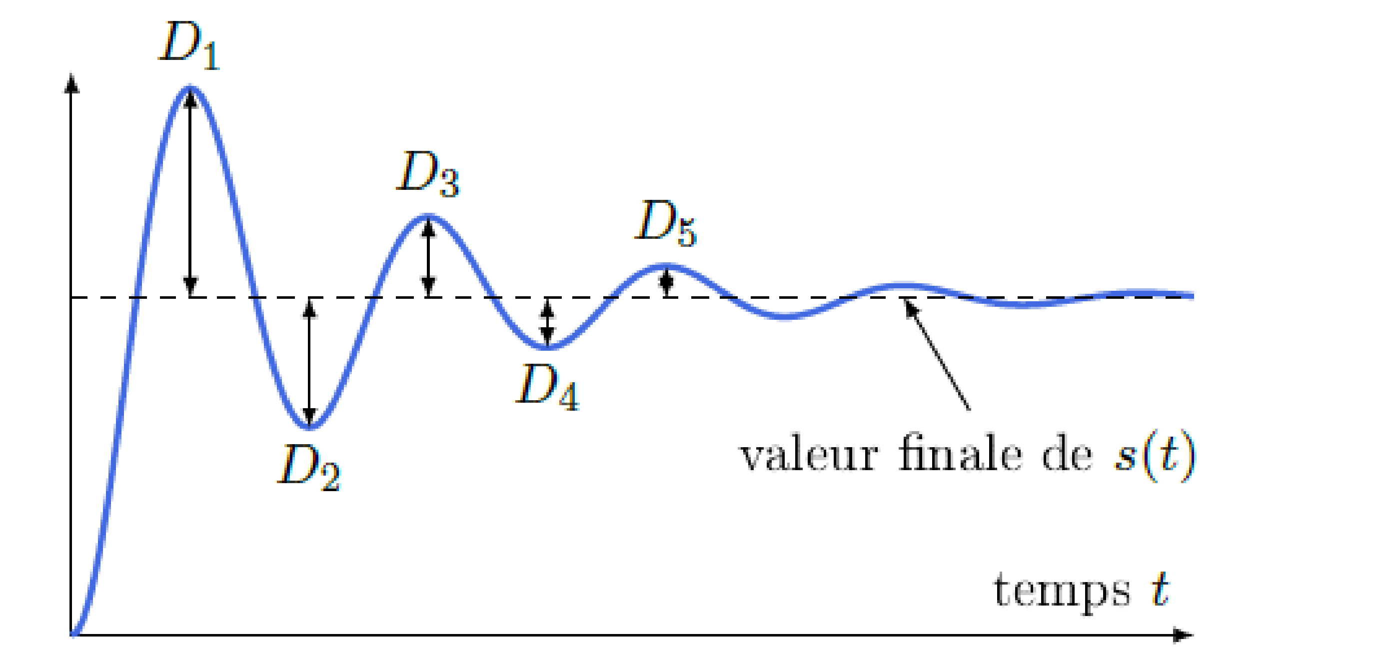
Celui-ci est le **taux de dépassement relatif** (en pourcentage) du ou des premiers dépassements. Il caractérise **l'amplitude de la k$^{\text{ième}}$** oscillation et est déni par :

$$D_k\% = 100 \times \left| \frac{s(t_k) - s_\infty}{s_\infty} \right|$$

avec ***$s(t_k)$ l'amplitude du k$^{\text{ième}}$ dépassement*** *et* ***s_∞*** *la* ***valeur à convergence*** *(asymptotique) de la réponse.*

Correction et amélioration des performances des SLCI

Définition et numérotation des dépassements



Correction et amélioration des performances des SLCI

3.1.2 Dans le domaine de Laplace

Un système linéaire continu et invariant peut être décrit dans le domaine de Laplace, de variable p, par sa fonction de transfert H(p) dénie par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \ldots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{N(p)}{D(p)} \quad \text{avec} \quad N(0) = D(0) = 1$$

Important !

Un système (SLCI) est **stable**, si tous les **pôles de sa fonction de transfert H(p) sont à parties réelles strictement négatives**.

Remarque Pôles et zéros

Les **pôles** d'une fonction de transfert sont les racines du polynôme du **dénominateur.**

Les **zéros** d'une fonction de transfert sont les racines du polynôme du **numérateur**.

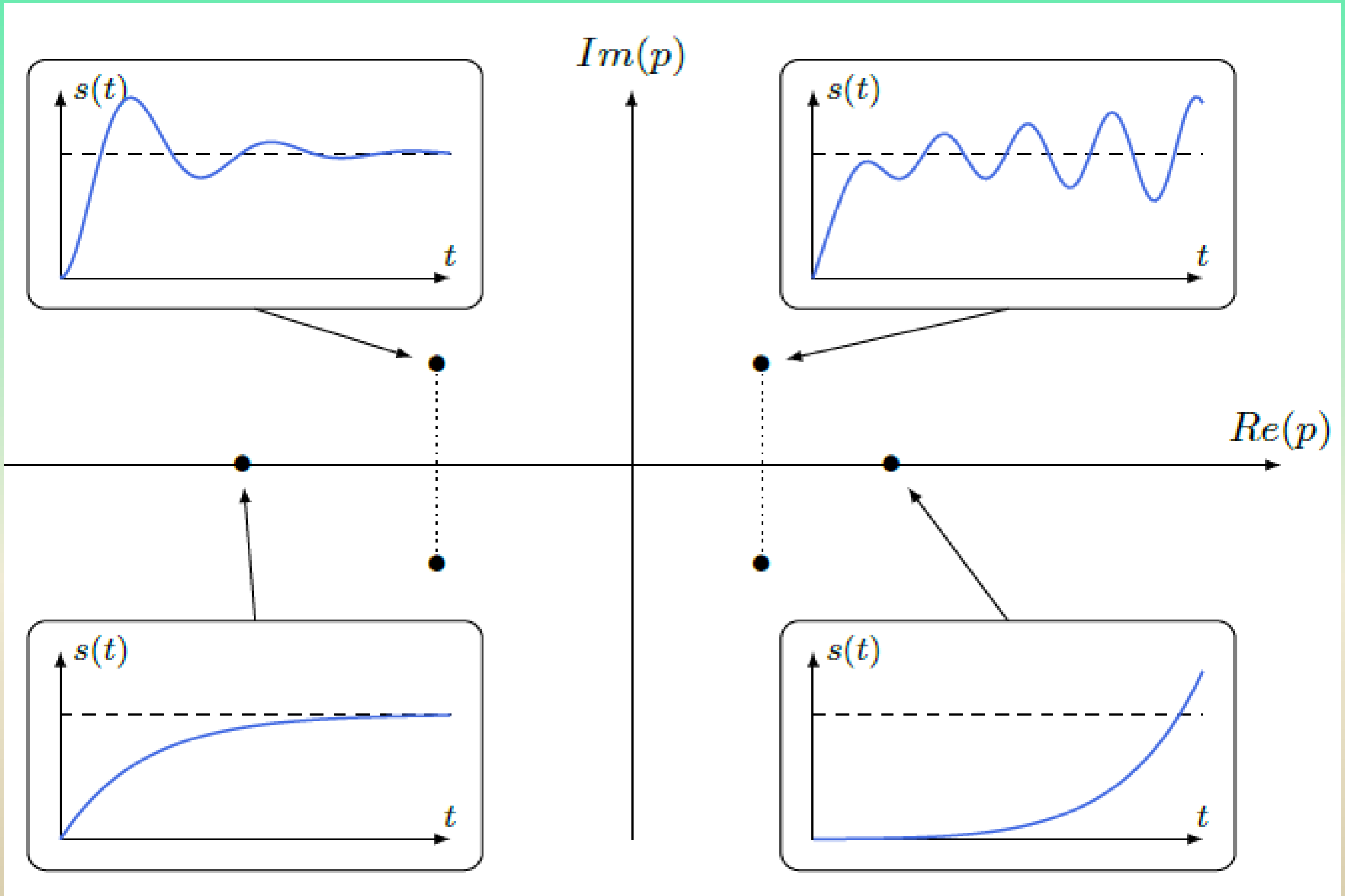
Correction et amélioration des performances des SLCI

Important !
La **classe** d'une fonction de transfert correspond au **nombre d'intégrateurs purs** dans celle-ci.

Remarque *Systèmes du premier et second ordre*
Un système du 1er ou du 2e ordre est **inconditionnellement stable** si **tous les coefficients** devant chaque monôme du polynôme du dénominateur sont **non nuls** et de **mêmes signes** (Attention : ce n'est valable que pour des systèmes d'ordre 1 et 2 ! ! !).

Correction et amélioration des performances des SLCI

Position des pôles d'une fonction de transfert pour des systèmes stable et instable



Correction et amélioration des performances des SLCI

3.1.3 Dans le domaine fréquentiel

Un système **linéaire continu** et **invariant** peut être décrit dans le **domaine fréquentiel (harmonique)**, de **variable jω,** par sa **fonction de transfert** complexe (appelée aussi **transmittance isochrone**) H (j ω) définie par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)} = \frac{a_m (j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + a_1 (j\omega) + a_0}{b_n (j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + b_1 (j\omega) + b_0}$$

Important ! *Critère du revers dans le plan de Bode*

Un système (SLCI) est stable en boucle fermée, si la **marge de gain MG** et la **marge de phase Mφ** de la FTBO sont **strictement positives**.

À retenir Critère du revers dans le plan de Bode

Correction et amélioration des performances des SLCI

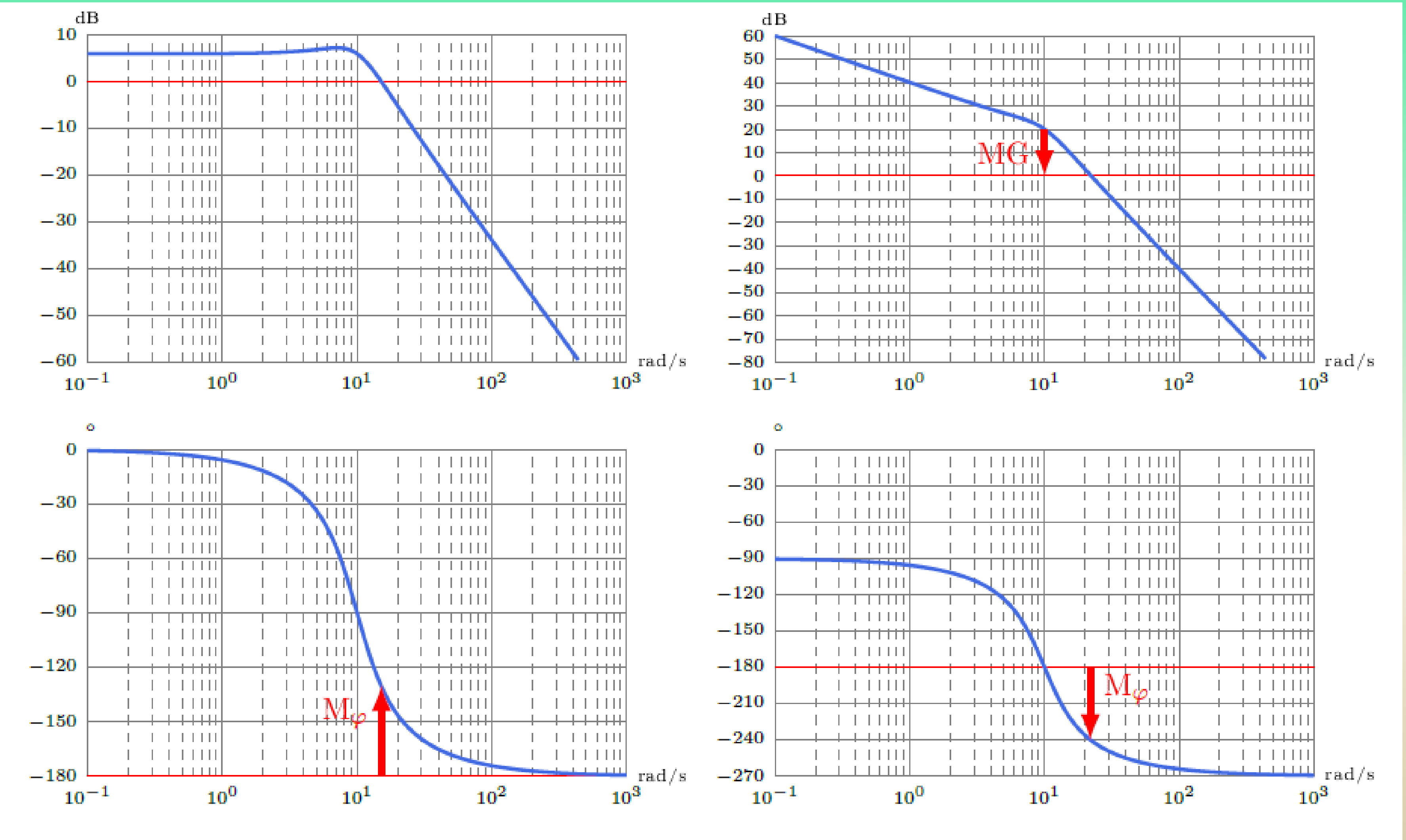
Important ! *Critère du revers dans le plan de Black*
Un système (SLCI) est **stable en boucle fermée** si, en décrivant le lieu de transfert dans le plan de Black de FTBO, **on laisse le point critique (-180°; 0 dB) sur la droite.**

Important ! *Marges de gain et de phase*

- La **marge de gain MG** est dénie par MG = $-20 \log H(\omega = \omega_{-180°})$ où $\boldsymbol{\omega_{-180°}}$ est la **pulsation** pour laquelle la **phase de la FTBO vaut précisément -180°.**
- La **marge de phase Mφ** est dénie par Mφ = $180 + \varphi(\omega = \omega_{0dB})$ où $\boldsymbol{\omega_{0dB}}$ est la **pulsation** pour laquelle **le gain (en dB) de la FTBO est nul**.

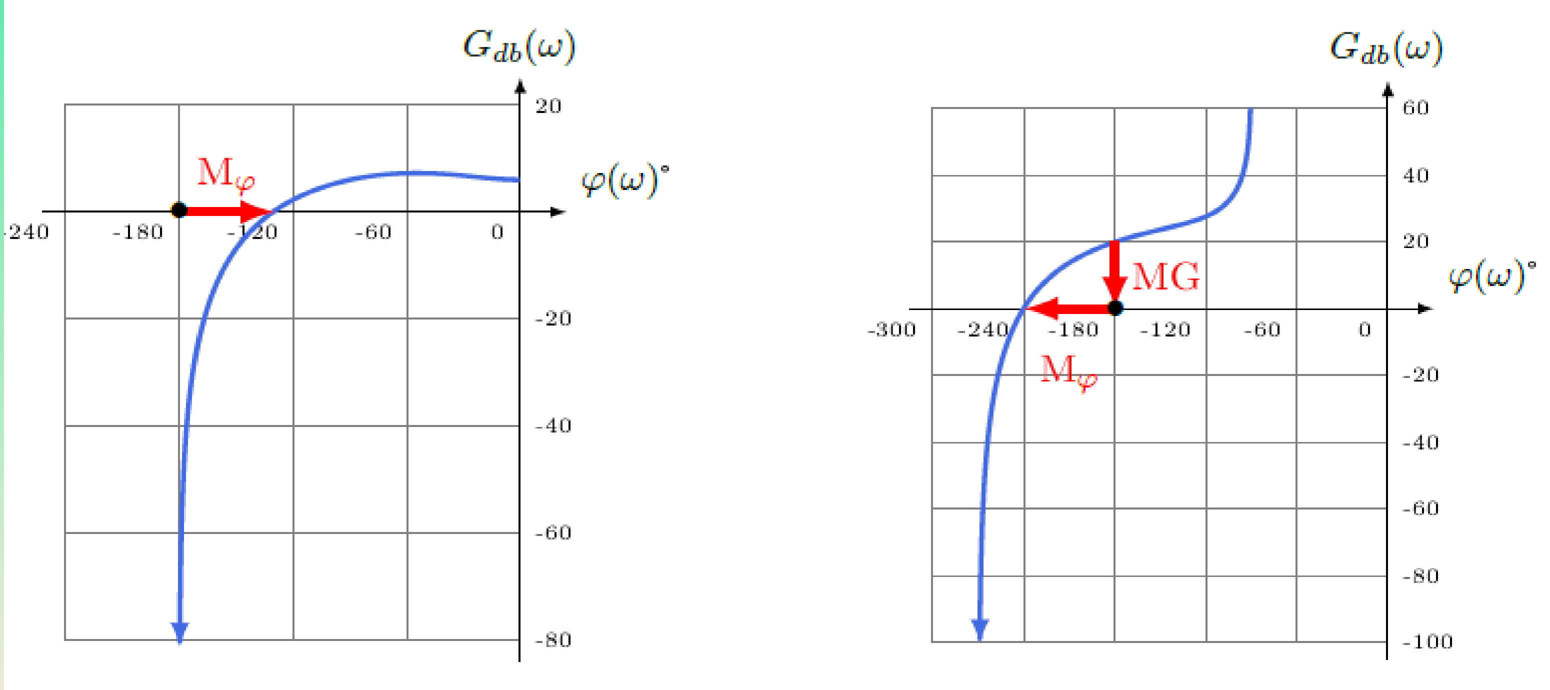
Correction et amélioration des performances des SLCI

Diagrammes de Bode de FTBO de systèmes stable et instable en BF



Correction et amélioration des performances des SLCI

Diagrammes de Black de FTBO de systèmes stable et instable en BF



Attention !
On **étudie la FTBO** pour conclure sur la **stabilité de la boucle fermée**.

Remarque *Marge de gain infinie*
Par convention, lorsque la pulsation pour laquelle la phase de la FTBO vaut -180° n'existe pas, on fixe la marge de gain à MG = +∞

Correction et amélioration des performances des SLCI

3-2 Rapidité

3.2.1 Dans le domaine temporel

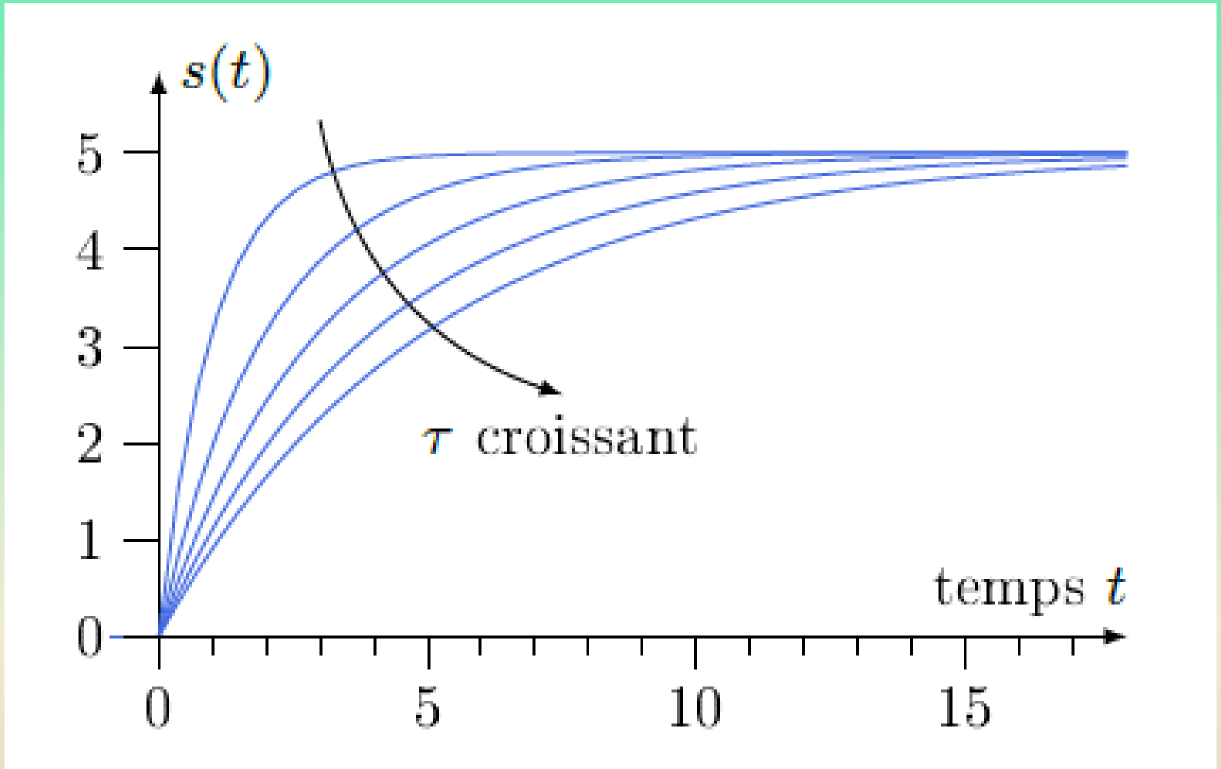
La **rapidité** d'un système dans le domaine temporel est définie par le **critère du temps de réponse à 5%.** D'autres critères existent, tels que le temps de montée t_m , le temps du 1^{er} pic . . . , mais sont peu utilisés.

Remarque

Lorsque 2 systèmes du 1er ordre avec des constantes de temps respectives τ_1 et τ_2 sont en cascade (série), parfois il est d'usage de simplifier le modèle si une des constantes de temps est très supérieure à l'autre ($\tau_1 \gg \tau_2$).
L'ordre de grandeur permettant d'émettre **l'hypothèse d'une simplification** est lorsque le **rapport $\tau_1 / \tau_2 \geq 10$**
On parle alors de **simplification du modèle** ou de **pôle dominant**

Correction et amélioration des performances des SLCI

Illustration de la rapidité d'un système dans le domaine temporel



Correction et amélioration des performances des SLCI

3.2.2 Dans le domaine de Laplace

Important ! *Rapidité d'un système du 1er ordre*
Pour un système du 1er ordre déni par $H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$

(de constante de temps τ), le temps de réponse à 5% est tel que $t_{5\%} = 3\tau$.
À retenir Rapidité d'un système du 1er ordre

Important ! *Rapidité d'un système du 1er ordre*
Pour un système du 2e ordre, de coefficient d'amortissement ξ et de pulsation propre du système non amorti ω_0 déni par $H(p) = \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0{}^2}p^2}$,

, le temps de réponse à 5% se lit sur l'abaque du temps de réponse réduit ($t_{5\%}.\omega_0$) Figure 17.

- Un système du 2[e] ordre est le **plus rapide** si son coefficient d'amortissement **ξ ≈ 0,69**. Dans ce cas, il y a **présence d'un seul dépassement.**
- Un système du 2[e] ordre est le **plus rapide sans dépassement** si son coefficient d'amortissement ξ = 1.

Correction et amélioration des performances des SLCI

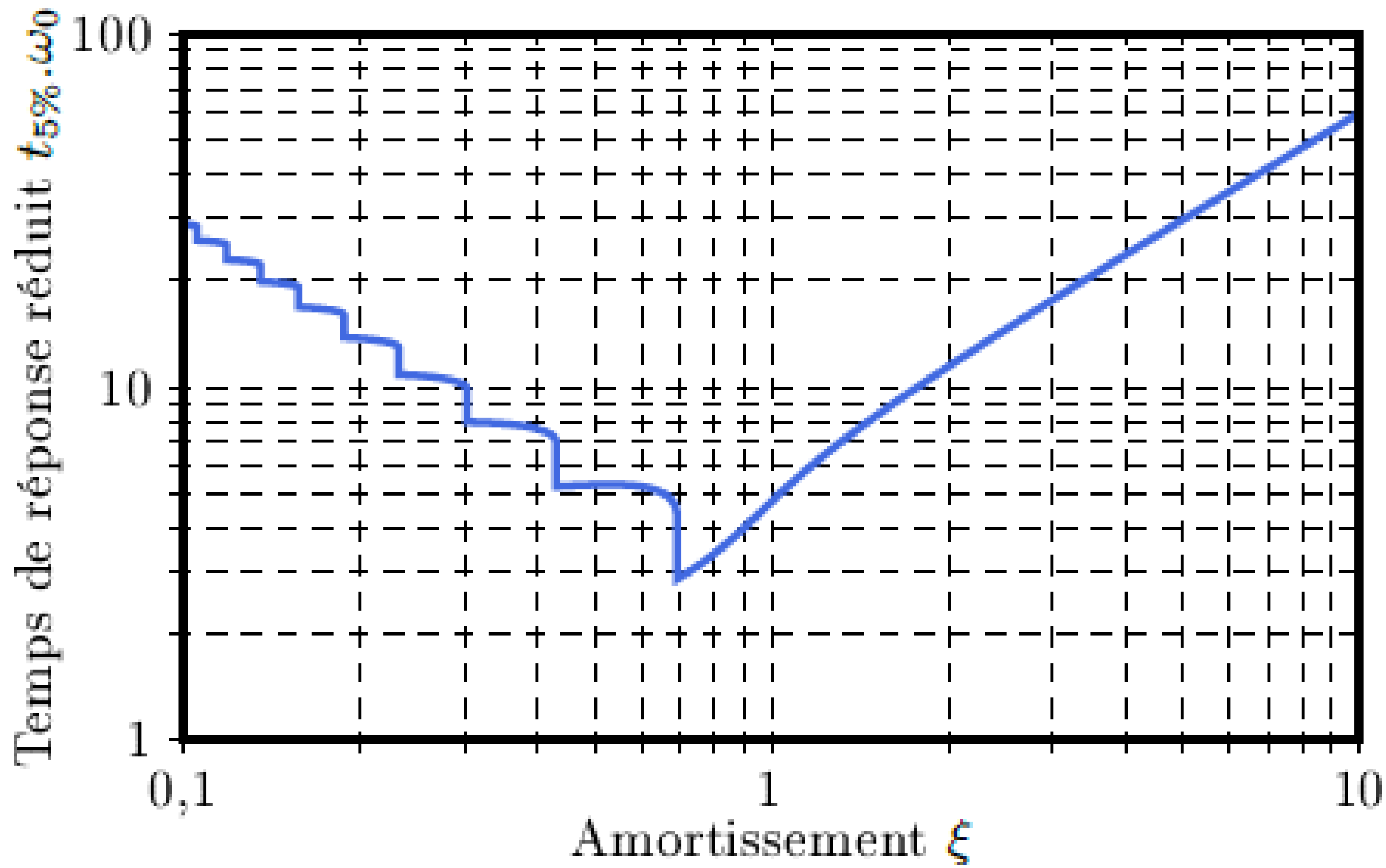


Figure 17 - Abaque du temps de réponse réduit

Correction et amélioration des performances des SLCI

3.2.3 Dans le domaine fréquentiel

La **rapidité** d'un système dans le domaine fréquentiel est **définie par la bande passante**.

On définit généralement **2 types de bande passante**, celle à **- 3 dB** (très souvent utilisée) et celle à **0 dB** (rarement). Par abus de langage, lorsque l'on parle de bande passante, il s'agit de celle à - 3 dB.

La **bande passante à - 3 dB** d'un système correspond à **l'intervalle de fréquence (ou de pulsation)** pour laquelle le **gain** est **supérieur** ou **égal** au **gain asymptotique - 3 dB.**

Remarque *Rapidité d'un système du 1er ordre*

Pour un système du 1er ordre défini par $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$

la bande passante à - 3 dB est telle que $\mathrm{BP}_{-3\,\mathrm{dB}} = \left[0; \frac{1}{\tau}\right].$

Correction et amélioration des performances des SLCI

3-3 Précision

La **précision** permet de **caractériser si le système réalise bien l'effet souhaité**. Pour cela on peut quantifier **l'erreur $\varepsilon(t)$.**
Pour un système d'entrée de consigne $e_c(t)$ et de sortie $s(t)$, l'erreur est dénie par **$\varepsilon(t) = e_c(t) - s(t)$.**
L'écart $\epsilon(t)$ permet de caractériser la différence entre **la consigne adaptée** (par un bloc adaptateur par exemple) **$e(t)$** et la **mesure réalisée par un capteur $m(t)$.** Il est défini par **$\epsilon(t) = e(t) - m(t)$.**
C'est cet écart qui entre dans le bloc correcteur.

Correction et amélioration des performances des SLCI

Important ! Erreur statique

On appelle **erreur statique**, notée $\boldsymbol{\varepsilon_S}$, la **différence** entre **la sortie** et **l'entrée** de consigne, lorsque le temps tend vers l'infini, **pour une entrée de consigne du type échelon**. On a alors :

$$\varepsilon_S = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon_S(t) = \lim_{t \to +\infty} e_c(t) - s(t)$$

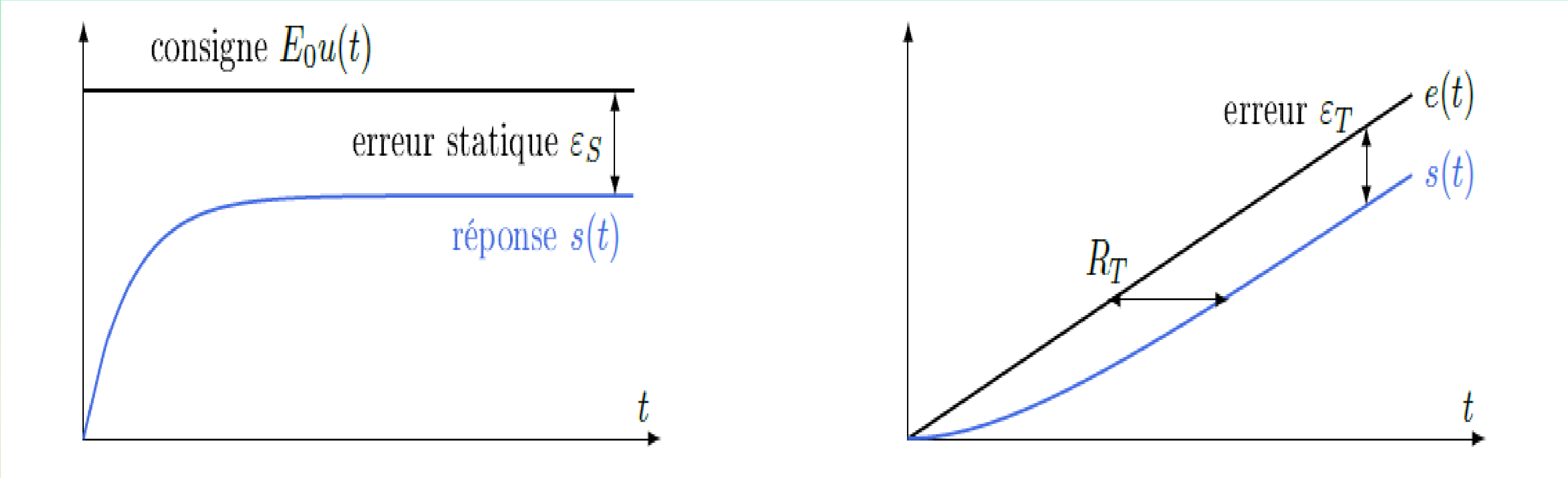
Important ! Erreur de trainage

On appelle erreur de traînage, notée ε_T , la différence entre la sortie et l'entrée de consigne, lorsque le temps tend vers l'infini, pour une entrée de consigne du type rampe. On a alors :

$$\varepsilon_T = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon_T(t) = \lim_{t \to +\infty} e_c(t) - s(t)$$

Correction et amélioration des performances des SLCI

<u>Définition</u> *Retard de traînage*
On appelle **retard de traînage R_T** , la **durée entre 2 instants définis** par une **même valeur de l'entrée et de la sortie**, dans le cas d'une **entrée de consigne du type rampe.**



<u>Figure ci-dessus :</u>
Erreur statique ε_S, erreur de trainage (ou de poursuite) ε_T et retard de traînage R_T

Correction et amélioration des performances des SLCI

3.3.2 Dans le domaine de Laplace

Pour caractériser la précision dans le domaine de Laplace, il est nécessaire d'utiliser le théorème de la valeur finale d'une grandeur x(t).

Définition : Théorème de la Valeur Finale

Le **Théorème de la Valeur Finale** (TVF) appliqué à une grandeur **x(t)** de transformée de Laplace **X(p)** s'écrit :

$$X = \lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{p \to 0} pX(p)$$

Par conséquent, pour un système de fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

$$s(t \to +\infty) = \lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0} pS(p) = \lim_{p \to 0} pH(p)E(p)$$

Correction et amélioration des performances des SLCI

Définition : Théorème de la Valeur Initiale

Il existe aussi un **théorème de la valeur initiale** (TVI), afin de prévoir le **comportement d'une grandeur x(t)** lorsque **t tend vers 0**.

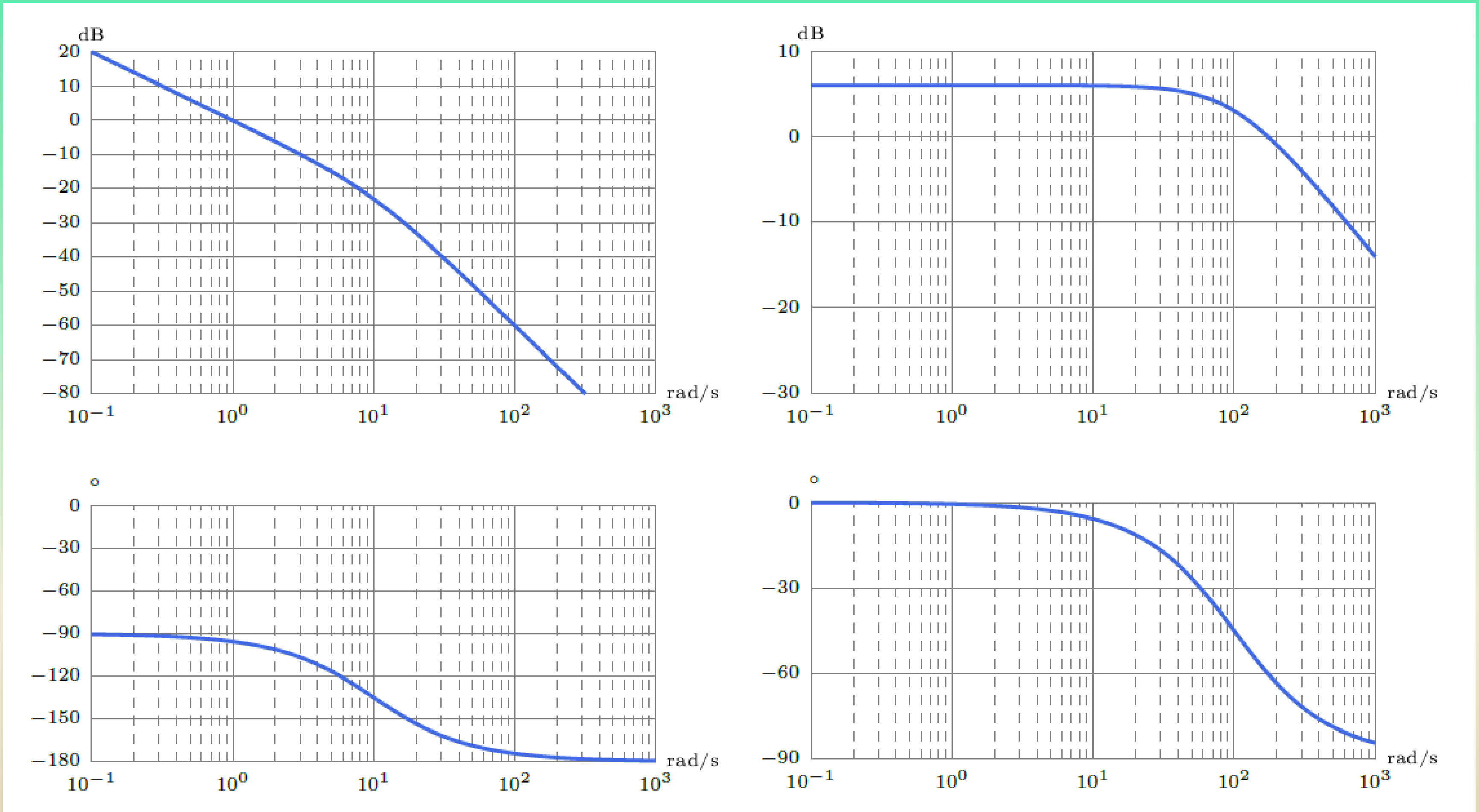
$$X_0 = \lim_{t \to 0} x(t) = \lim_{p \to +\infty} pX(p)$$

Attention !

Ces théorèmes ne peuvent s'appliquer que si le système est stable ! ! !

Correction et amélioration des performances des SLCI

3.3.3 Dans le domaine fréquentiel



Systèmes précis et non précis dans le domaine fréquentiel (plan de Bode)

Correction et amélioration des performances des SLCI

La **précision** d'un système est **caractérisée** par **son gain statique** dans le domaine fréquentiel.
En effet, pour un système de fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)}$

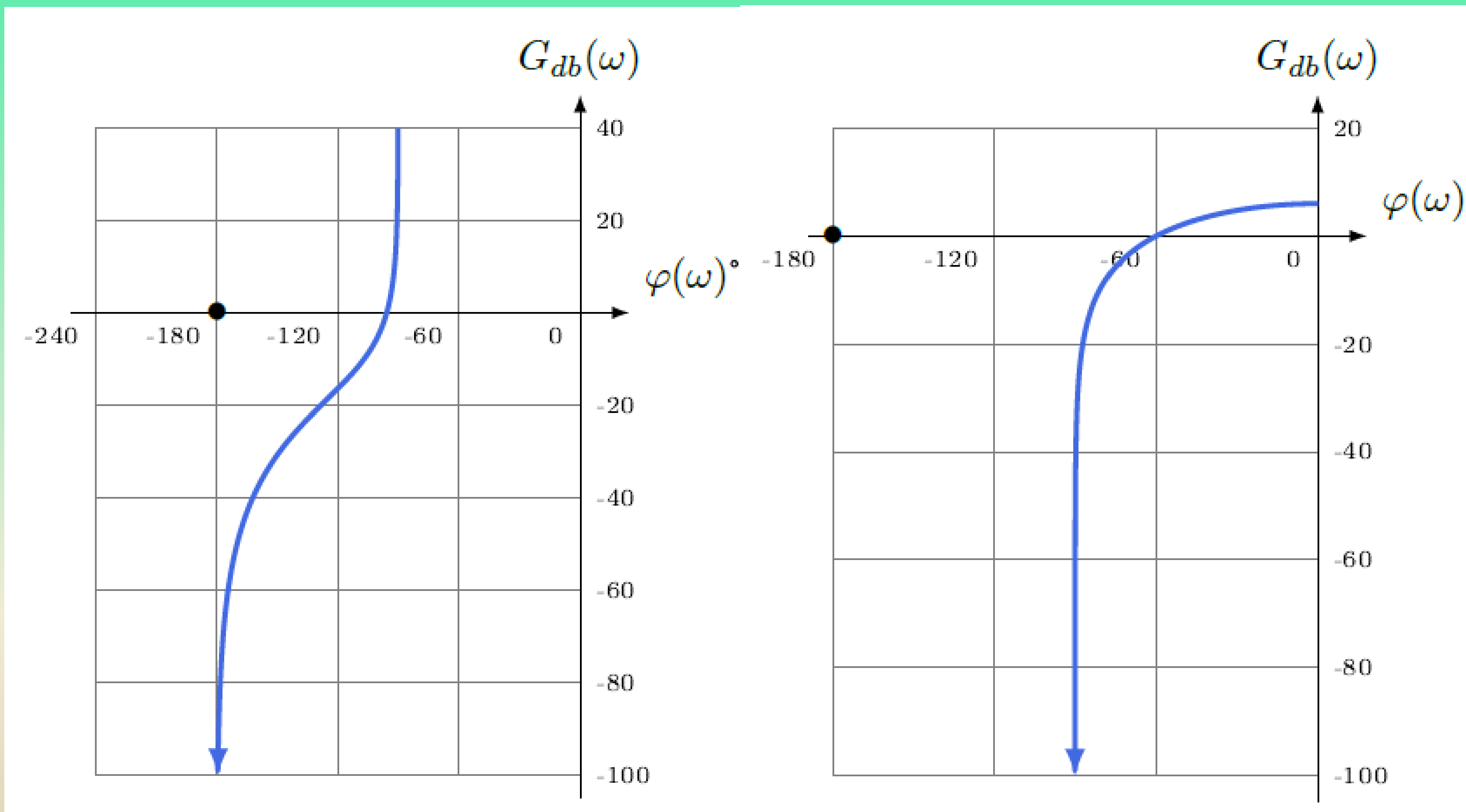
soumis à un échelon de consigne **d'amplitude E_0**, si son gain statique ($\omega \rightarrow 0$) est unitaire, cela signifie que la sortie tendra vers la consigne (erreur statique nulle).

Dans le cadre de **l'étude d'un système** en **boucle ouverte**, il est **possible de conclure sur sa précision en boucle fermée**.

En effet, pour que **le système soit précis en boucle fermée**, il suffit que **le gain statique ($\omega \rightarrow 0$)** de la **fonction de transfert en boucle ouverte soit infini**.

Cela est **obtenu** avec la **présence** d'un (ou de plusieurs) **intégrateur(s) pur(s)** dans la fonction de transfert de la boucle ouverte (caractérisée par la classe de la FTBO).

Correction et amélioration des performances des SLCI



Systèmes précis et non précis dans le domaine fréquentiel (plan de Black)

Correction et amélioration des performances des SLCI

3-4 Système idéal - compromis sur les performances

Le **système idéal** est un système dont les performances sont, une **très grande stabilité**, un système **extrêmement rapide**, et **précis**, quelque soit l'entrée (de consigne et/ou de perturbation). Malheureusement, ce système n'existe pas, et des compromis entre les 3 performances sont nécessaires. Celles-ci sont répertoriées dans la diagramme des exigences ou dans un cahier des charges fonctionnel.

Afin **d'améliorer certaines performances** des systèmes, on place un **bloc Correcteur** (Figure 22) permettant de corriger les défauts de performances. Celui-ci doit être dimensionné afin de satisfaire le cahier des charges fonctionnel.

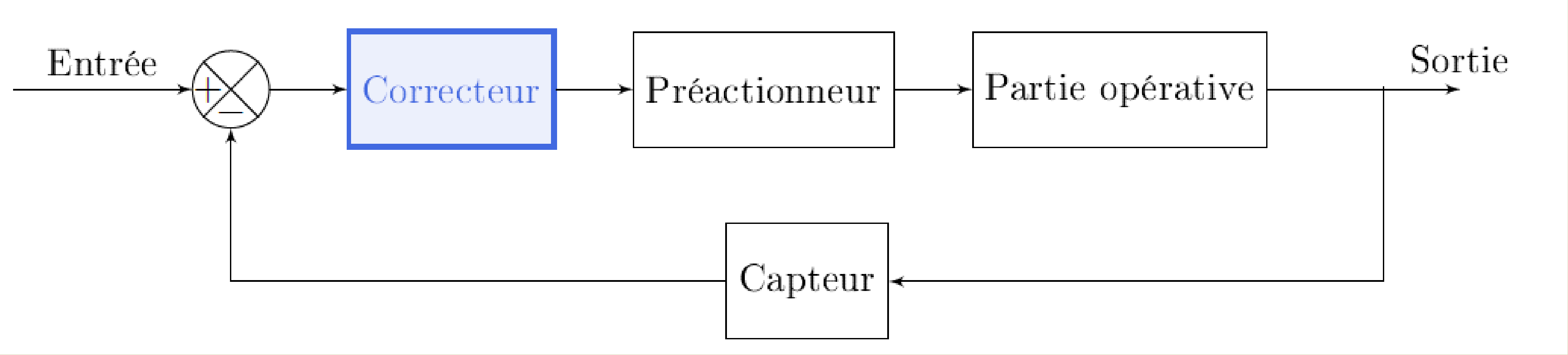


Schéma-blocs d'un système avec bloc Correcteur

Correction et amélioration des performances des SLCI

De nombreux correcteurs existent, permettant chacun d'améliorer une ou 2 performances, sans trop dégrader les autres performances.

Nous tâcherons d'étudier et d'analyser l'influence des paramètres de chaque correcteur sur les performances globales du système.

Les correcteurs à notre disposition sont les correcteurs du type :

- *Proportionnel (**P**) ;*
- *Proportionnel Intégral (**PI**) ;*
- *Proportionnel Dérivé (**PD**) ;*
- *Proportionnel Intégral Dérivé (**PID**) ;*
- *à Avance ou Retard de Phase (**AP** ou **RP**).*

Correction et amélioration des performances des SLCI

4 - Correction avec correcteur Proportionnel

4-1 Introduction sur la correction proportionnelle

Les **correcteurs** du type **Proportionnel** permettent **d'amplifier d'un coefficient K (K > 0) l'écart ε(t)** entre la consigne et la mesure de la grandeur à asservir, tels que **u(t) = K.ε(t)** où u(t) est la sortie du correcteur.

Ils possèdent une fonction de transfert C(p) telle que :

$$\boxed{C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K}$$

4-2 Influence d'une correction proportionnelle . . .

4.2.1 . . . sur la stabilité

Le domaine le plus approprié pour analyser l'influence d'un correcteur Proportionnel sur la stabilité est le domaine fréquentiel.

Correction et amélioration des performances des SLCI

Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ tel que $H_{BO}(p) = KG(p)$.

On donne sur la Figure 23 les diagrammes de Bode de $H_{BO}(p)$ pour différentes valeurs de K.

On remarque que la **valeur de K** permet une **translation verticale du gain**, sans modifier la courbe de la phase de la FTBO. Cette translation a pour conséquence de **diminuer la marge de phase M'** et **la marge de gain** MG (K>1), donc à **déstabiliser le système en boucle fermée.**

Cette **valeur du correcteur K** est généralement déterminée afin de **satisfaire un critère de marge de phase** du cahier des charges.

Dans le **lieu de Black**, la **variation du gain** engendre une **translation de la courbe suivant l'axe vertical** (voir Figure 24).

<u>Remarque</u>

Pour les systèmes du premier et du second ordre, leurs **marges de phases** respectives sont **toujours strictement supérieures à 90° et 0°,** donc **un correcteur Proportionnel ne pourra jamais les rendre instables**.

Correction et amélioration des performances des SLCI

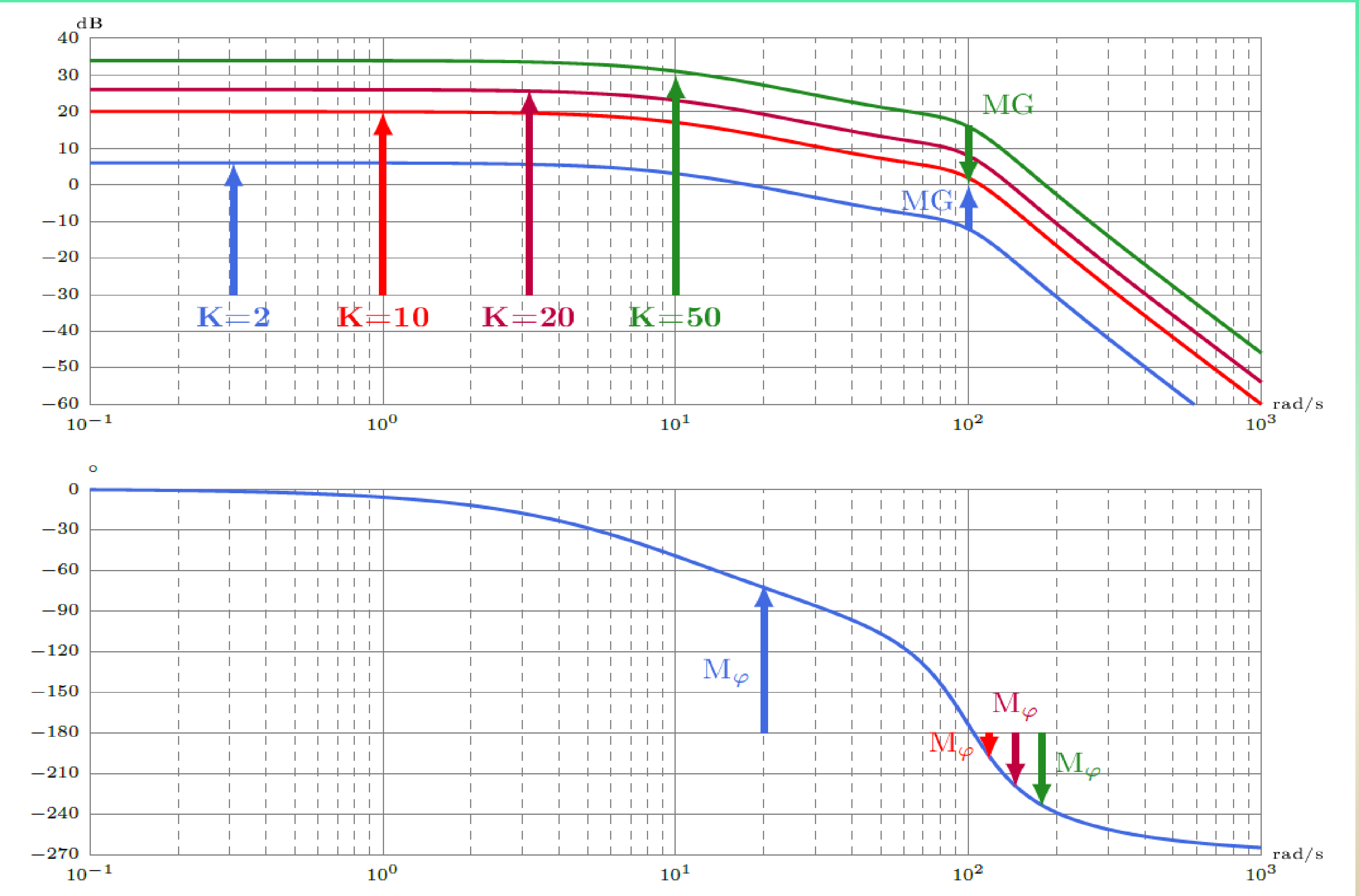


Figure 23 Influence d'un correcteur Proportionnel sur la stabilité (lieu de Bode)

Correction et amélioration des performances des SLCI

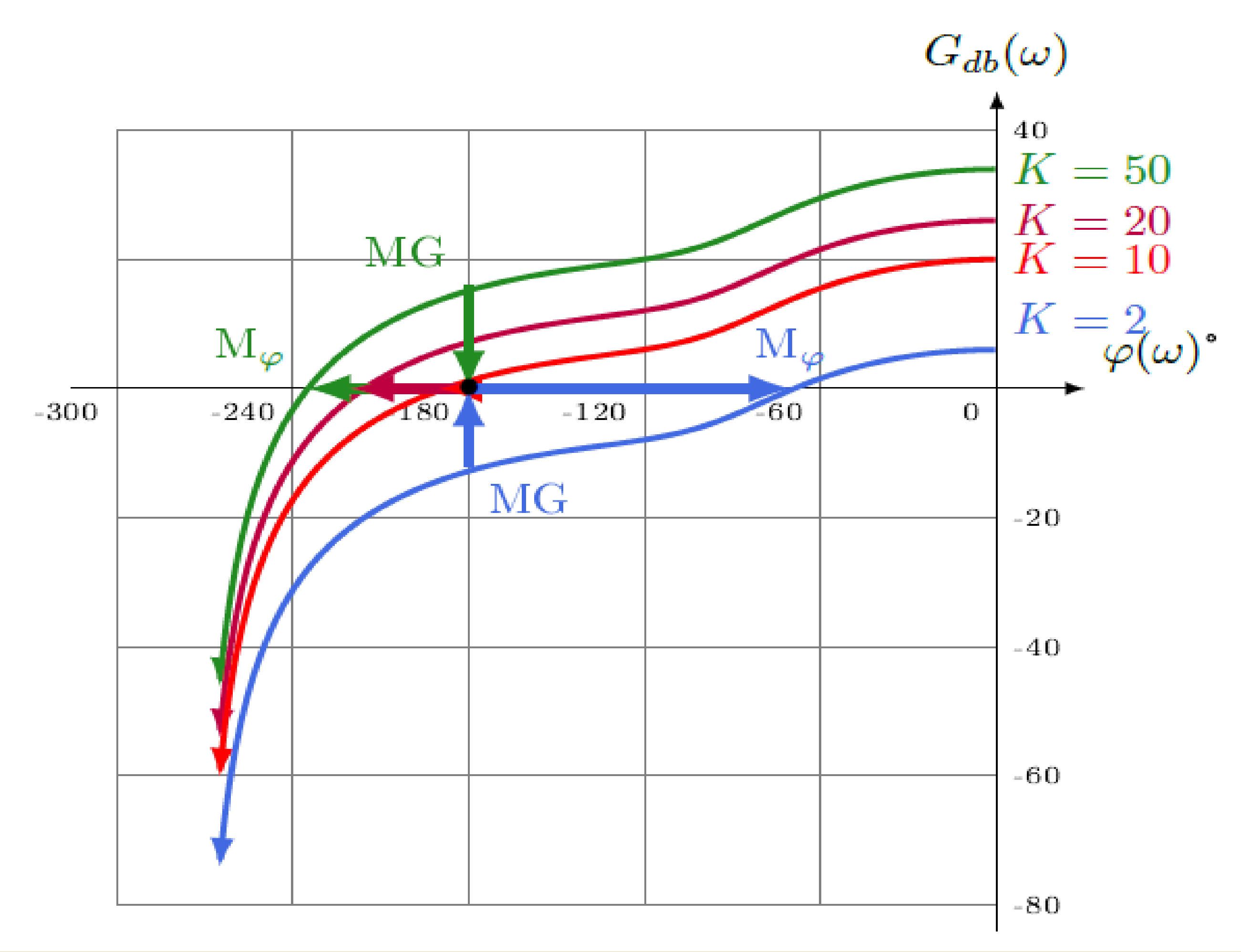


Figure 24 Influence d'un correcteur Proportionnel sur la stabilité (lieu de Black)

Correction et amélioration des performances des SLCI

<u>4.2.2 . . . sur la rapidité</u>

Le domaine le plus approprié pour analyser **l'influence d'un correcteur Proportionnel** sur **la rapidité** est le domaine de Laplace.

Considérons deux systèmes définis par les fonctions de transfert en boucle ouverte :

$$H_1(p) = \frac{K_0}{1+\tau p} \qquad \text{et} \qquad H_2(p) = \frac{K_0}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0{}^2}p^2}$$

Leurs fonctions de transfert en boucle fermée à retour unitaire, notées respectivement $H_{F1}(p)$ et $H_{F2}(p)$ s'écrivent, dans le cadre d'un correcteur Proportionnel d'amplification K :

$$H_{F1}(p) = \frac{KH_1(p)}{1+KH_1(p)} = \frac{KK_0}{1+KK_0}\frac{1}{1+\frac{\tau}{1+KK_0}p} = \frac{K_{BF}}{1+\tau_{BF}p} \quad \text{avec} \quad \tau_{BF} = \frac{\tau}{1+KK_0}$$

$$H_{F2}(p) = \frac{KH_2(p)}{1+KH_2(p)} = \frac{KK_0}{1+KK_0}\frac{1}{1+\frac{2\xi}{\omega_0(1+KK_0)}p+\frac{p^2}{\omega_0^2(1+KK_0)}} = \frac{K_{BF}}{1+\frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p+\frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$$

Correction et amélioration des performances des SLCI

On remarque immédiatement que pour le **système du premier ordre (H_{F1}),** la **constante de temps BF est inférieure à τ** , ce qui permet d'affirmer que le **système en boucle fermée est plus rapide**.

De plus, plus **la valeur de K est grande**, plus le **système** en **boucle fermée** sera **rapide**.

En ce qui concerne **le système du second ordre (H_{F2}),** l'analyse est plus complexe, car bien que **ω_{0BF} augmente**, le **coefficient d'amortissement δ_{BF} diminue,** pouvant **provoquer des oscillations importantes**.

Il est alors **nécessaire d'utiliser l'abaque du temps de réponse réduit** (**$t_{5\%} .\omega_0$**) pour déterminer précisément la rapidité du système.

Correction et amélioration des performances des SLCI

4.2.3 . . . sur la précision

Le domaine le plus approprié pour analyser **l'influence d'un correcteur Proportionnel sur la précision** est le domaine de Laplace.

Reprenons les 2 systèmes en boucle ouverte précédents, placés en boucle fermée par un retour unitaire et un correcteur Proportionnel d'amplication K (>0).

L'entrée de consigne est notée Ec(p) et la sortie S(p).

Le critère permettant de **caractériser la précision** est **l'erreur statique ε_S** ou **de traînage ε_T** , déterminée à partir du TVF (on suppose que les systèmes en boucle fermée sont stables).

On obtient alors pour une **entrée échelon d'amplitude E_0** et pour une **entrée rampe** :

$$\varepsilon_{1S} = \varepsilon_{2S} = \frac{E_0}{1 + K K_0} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{1T} = \varepsilon_{2T} = +\infty$$

On constate immédiatement que **l'erreur statique pour une entrée échelon est non nulle,** mais qu'il est possible **de la limiter en agissant sur K**. Cependant**, l'erreur de traînage n'est pas réglable par action sur K.**

Correction et amélioration des performances des SLCI

4.3 Conclusion sur l'action proportionnelle

A savoir : Correcteur Proportionnel

Un correcteur Proportionnel :

- peut permettre **d'améliorer la rapidité** d'un système ;
- permet de **translater verticalement le diagramme de Bode du gain** sans modifier la phase (translation de la courbe paramétrée dans le lieu Black) ;
- **déstabilise le système** en diminuant la marge de phase notamment ;
- **permet d'améliorer la précision** en terme d'erreur statique si celle-ci n'était pas déjà assurée.

Correction et amélioration des performances des SLCI

<u>5 - Correction avec correcteur Proportionnel Intégral</u>

<u>5-1 Introduction sur la correction intégrale</u>

Les correcteurs du type Proportionnel Intégral permettent d'amplifier d'un coefficient Ki (Ki > 0) l'écart ε(t) entre la consigne et la mesure de la grandeur à asservir et de l'intégrer dans le domaine temporel, tel que

$$u(t) = K_I \varepsilon(t) + \frac{K_I}{T_I} \int_0^t \varepsilon(y) dy$$

où u(t) est la sortie du correcteur. **T_I** est appelée **constante de temps d'intégration**. Ils possèdent une fonction de transfert C(p) telle que :

$$\boxed{C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_I \left(1 + \frac{1}{T_I p}\right)}$$

Le diagramme de Bode d'un correcteur Proportionnel Intégral est fourni sur la Figure 25

Un correcteur **Proportionnel Intégral** permet **d'augmenter le gain** pour les **faibles pulsations**, et **introduit une phase de -90° aux basses pulsations**.

Correction et amélioration des performances des SLCI

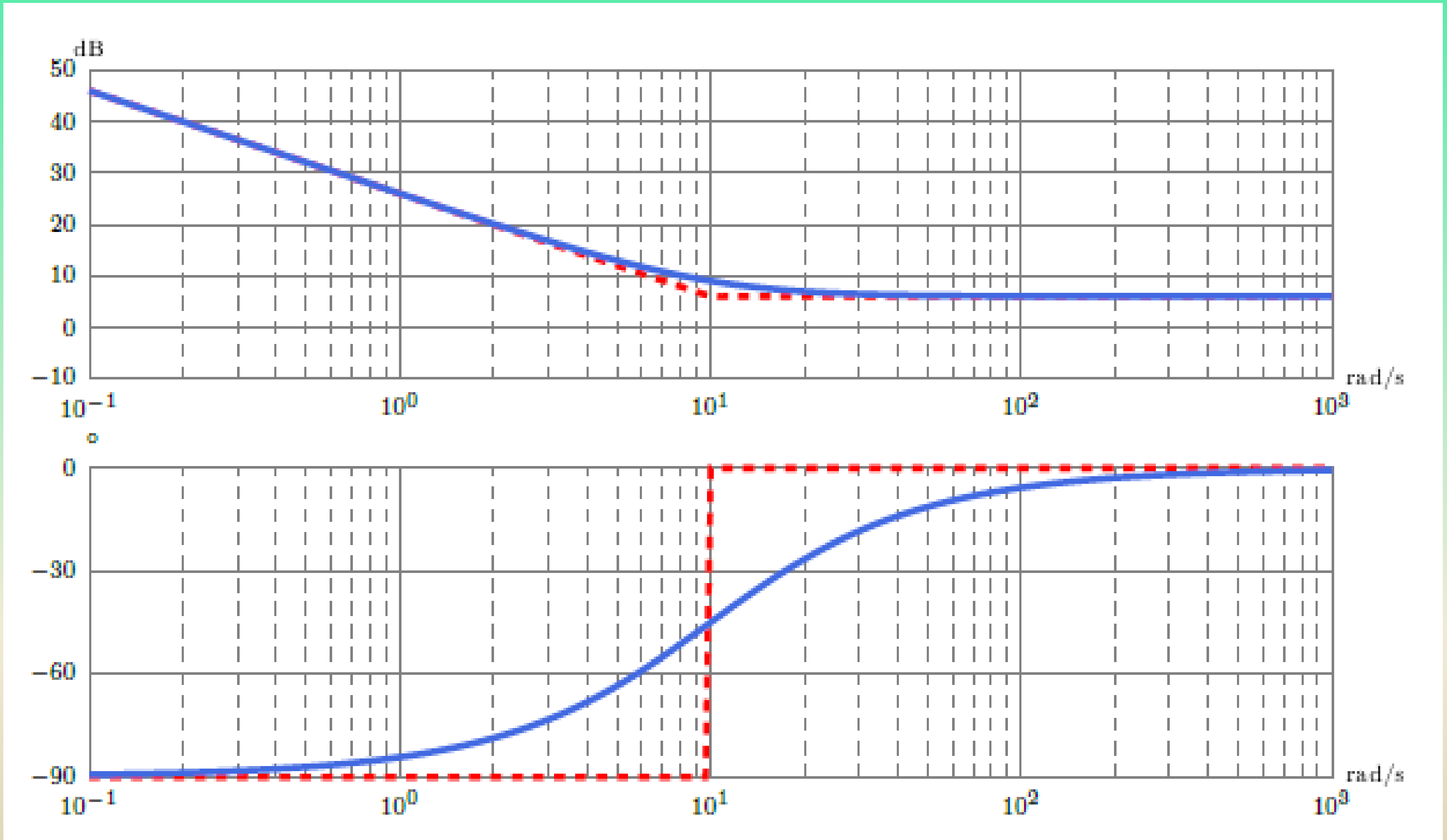


Figure 25 Diagramme de Bode d'un correcteur Proportionnel Intégral

Correction et amélioration des performances des SLCI

5.2 Influence d'une correction intégrale . . .

5.2.1 . . . sur la stabilité

Le domaine le plus approprié pour analyser **l'influence d'un correcteur Proportionnel Intégral sur la stabilité** est le **domaine fréquentiel.**

Considérons deux systèmes définis par les fonctions de transfert en boucle ouverte :

$$H_1(p) = \frac{K_0}{1+\tau p} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{K_0}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$$

Soit le correcteur de fonction de transfert :

$$C(p) = K_I\left(1+\frac{1}{T_I p}\right)$$

En fixant une valeur de K_I , les diagrammes de Bode des boucles ouvertes avec un correcteur Proportionnel Intégral sont fournis sur la Figure 26 (1er ordre à gauche, 2^{e} ordre à droite).

Correction et amélioration des performances des SLCI

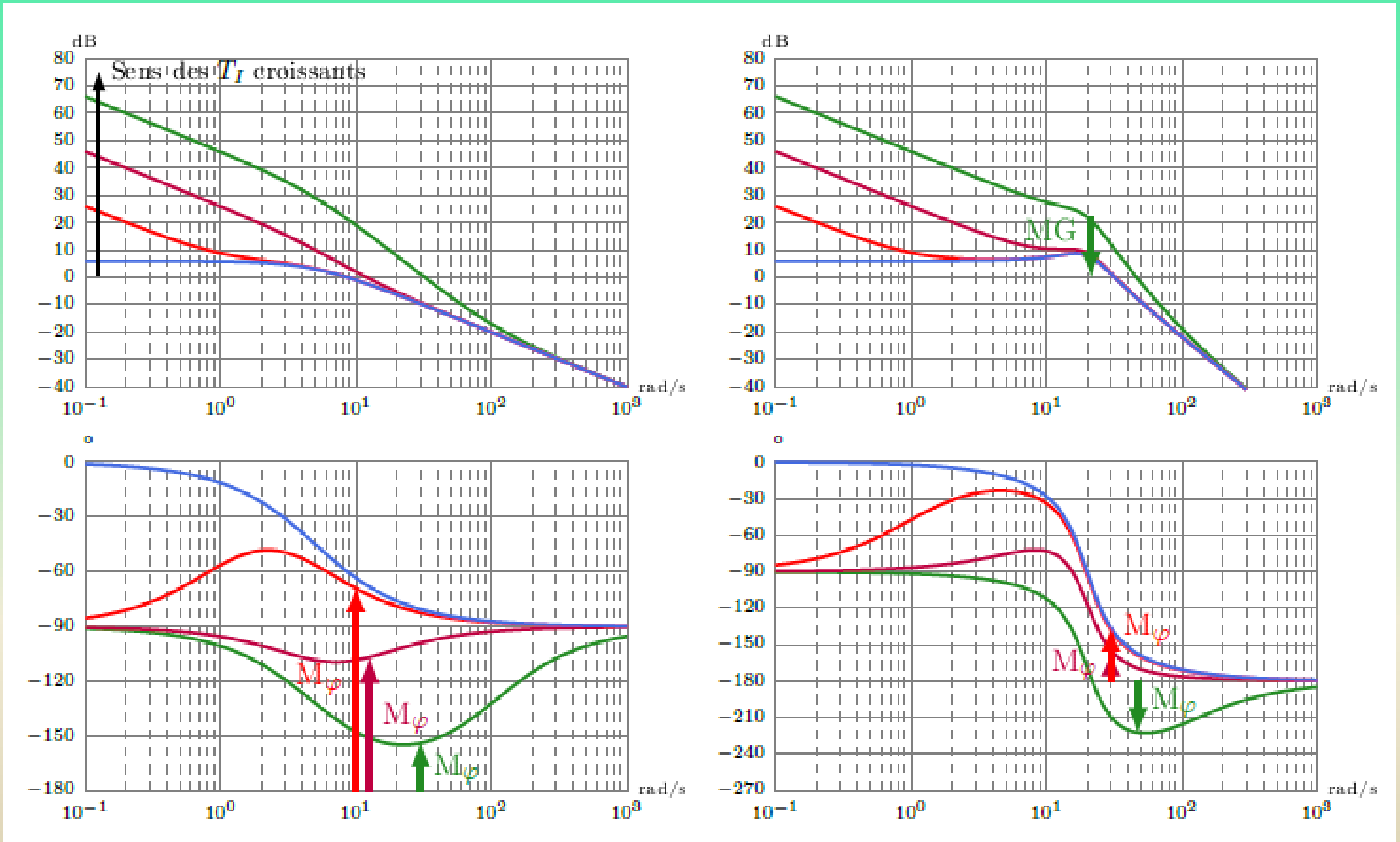


Figure 26 Influence d'un correcteur PI sur le diagramme de Bode de la boucle ouverte à K_I fixé

Correction et amélioration des performances des SLCI

On remarque rapidement que la **marge de phase est diminuée** dans **tous les cas,** ce qui a **tendance à déstabiliser** le système en boucle fermée.
Dans le cas des systèmes **d'ordre supérieur ou égal à 2** en boucle ouverte, un **risque d'instabilité** existe en boucle fermée.
Le **réglage de la partie proportionnelle** du correcteur (**K_I**) doit permettre de **s'assurer de la stabilité**, en réglant les marges de phase et de gain, lorsque la constante de temps d'intégration T_I est fixée.

Correction et amélioration des performances des SLCI

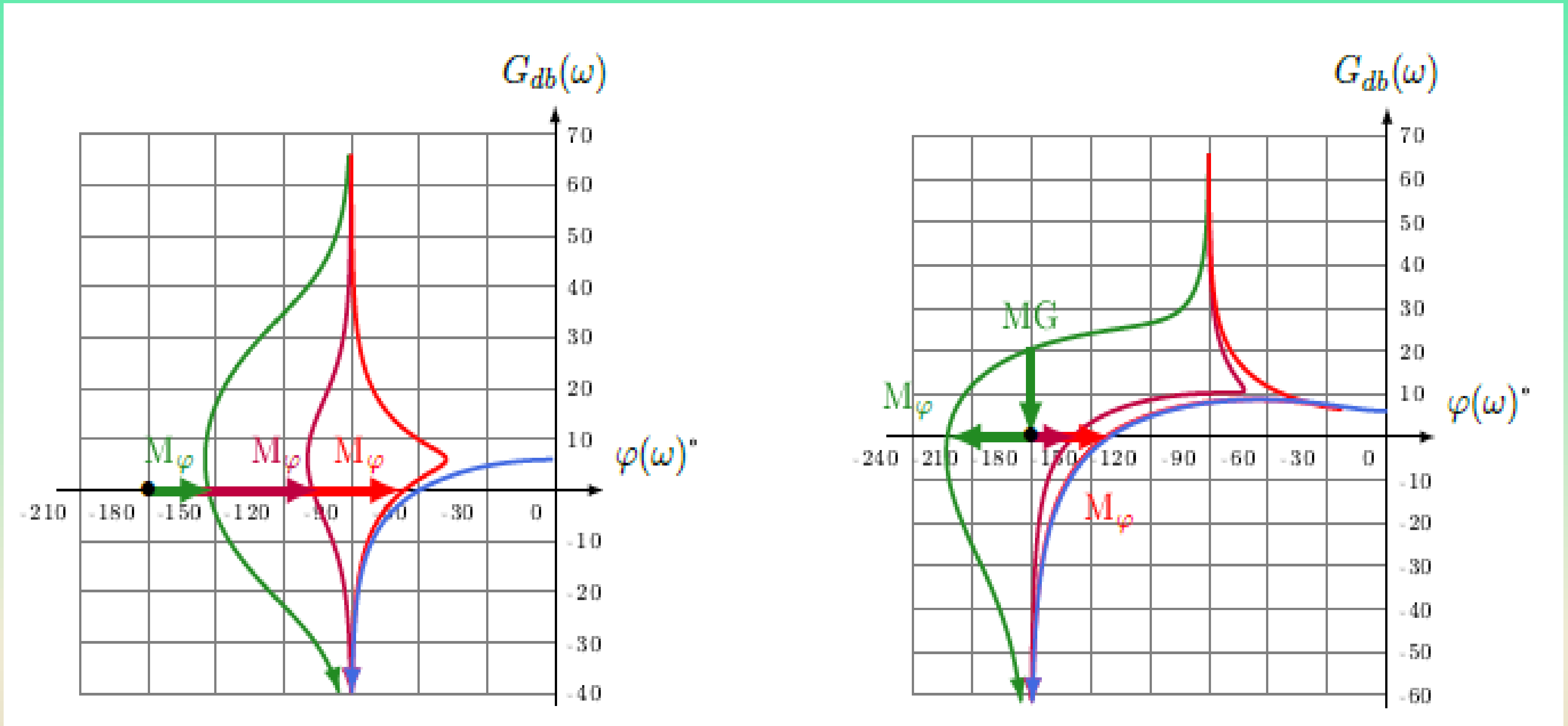


Figure 27 Influence d'un correcteur PI sur la stabilité (lieu de Black)

Correction et amélioration des performances des SLCI

<u>5.2.2 . . . sur la rapidité</u>

Il est impossible de conclure simplement sur l'influence d'un correcteur Proportionnel Intégral sur la performance de rapidité.

Considérons un système en boucle ouverte du premier ordre et un correcteur tels que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_0}{1+\tau p} \qquad \text{et} \qquad C(p) = K_I\left(1+\frac{1}{T_I p}\right)$$

Avec un retour unitaire, la FTBF s'écrit alors :

$$\mathrm{FTBF}(p) = \frac{C(p)H(p)}{1+C(p)H(p)} = \frac{1+T_I p}{1+T_i\frac{1+K_I K_0}{K_I K_0}p+\frac{T_I \tau}{K_I K_0}p^2}$$

Correction et amélioration des performances des SLCI

Ce système est du second ordre dont le **critère de rapidité** est **fixé par la bande passante à - 3 dB**, qui **dépend** elle-même de $\boldsymbol{\omega_0}$.
Retenons alors pour critère la valeur de ω_0, pulsation propre du système non amortie.
Celle-ci dépend des paramètres du correcteur, c'est-à-dire des valeurs prises par K_I et T_I , et s'exprime par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_I K_0}{T_I \tau}}$$

Pour une valeur de K_I fixée, on remarque que la **pulsation propre** du système non amortie varie **inversement proportionnellement à T_I** .
Cela signifie que **plus T_I est grand**, **plus le système est lent**.
L'analyse est cependant plus difficile, car il faut étudier le temps de réponse réduit pour caractériser précisément la rapidité du système en boucle fermée.
On retiendra cependant qu'un **correcteur Proportionnel Intégral** a tendance à **ralentir le système** en **boucle fermée**, mais que la partie proportionnelle (**K_I bien choisie**) peut permettre de le **ré-accélérer** .

Correction et amélioration des performances des SLCI

5.2.3 . . . sur la précision

La **précision** d'un système **dépend** à la fois de son **entrée principale** (**entrée de consigne) Ec(p)**, mais aussi de l'éventuelle **perturbation (P(p))**.

Afin de **caractériser la précision**, il est donc nécessaire **d'analyser celles-ci séparément**. Ceci est bien évidemment rendu **possible**, du fait de la **linéarité des systèmes étudiés**.

On considère le schéma-blocs de la Figure 28 où C(p) est la fonction de transfert du **correcteur Proportionnel Intégral** tel que : $C(p) = K_I\left(1 + \frac{1}{T_I p}\right).$

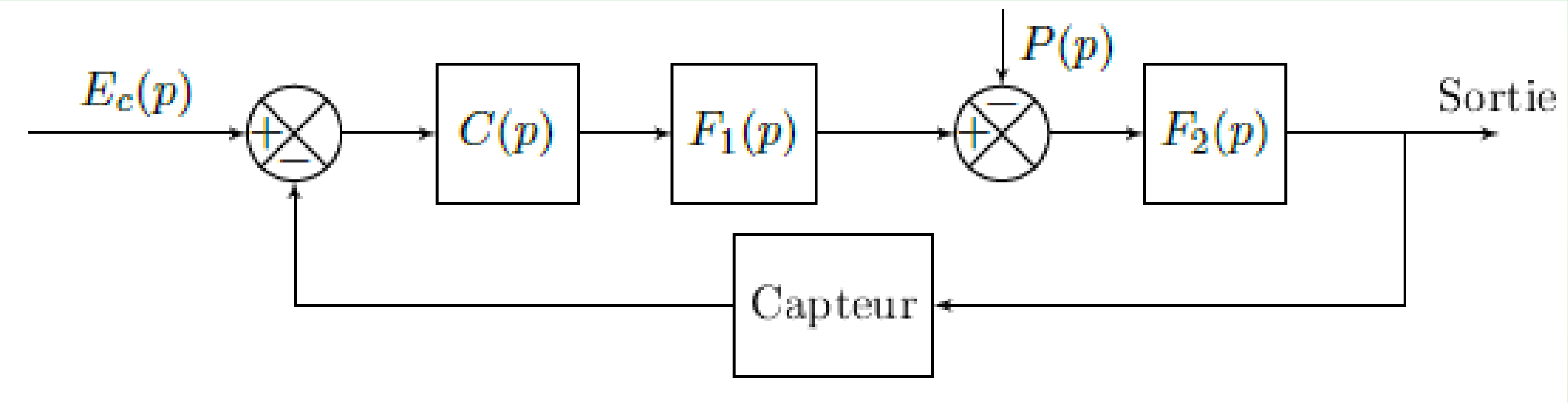


Figure 28 Schéma-blocs d'un système avec bloc correcteur et perturbation

Correction et amélioration des performances des SLCI

Dans le cadre de cette étude, on considère que la FTBO du système non corrigée (C(p) = 1) s'écrit sous la forme générale telle que :

$$\mathrm{FTBO}_{nc}(p) = F_1(p)F_2(p) = \frac{K_0}{p^\alpha}\frac{N(p)}{D(p)} \text{ avec } N(0) = D(0) = 1$$

où α est la classe de la FTBO non corrigée.

<u>Étude en présence de la **consigne seule** :</u>

On considère l'absence de perturbation.

La FTBF s'écrit alors dans ces conditions (avec retour unitaire) :

$$\mathrm{FTBF}(p) = \frac{S(p)}{E_c(p)} = \frac{C(p)\mathrm{FTBO}_{nc}(p)}{1 + C(p)\mathrm{FTBO}_{nc}(p)} = \frac{K_iK_0N(p)(1+T_ip)}{T_ip^{\alpha+1}D(p) + K_iK_0N(p)(1+T_ip)}$$

Correction et amélioration des performances des SLCI

Déterminons **l'erreur statique ε_S** dans le cadre d'une **entrée de consigne du type échelon d'amplitude E_0**.

$$\varepsilon_S = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon_S(t) = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon_S(p) = \lim_{p \to 0} p(E_c(p) - S(p)) = \lim_{p \to 0} p(1 - \mathrm{FTBF}(p))E_c(p) = 0 \quad \forall \alpha$$

Cela signifie que quelque soit la classe de $\mathrm{FTBO}_{nc}(p)$, **l'erreur statique est nulle**.

Déterminons **l'erreur de traînage ε_T** dans le cadre d'une **entrée de consigne du type rampe de pente a_0.**

$$\varepsilon_T = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon_T(t) = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon_T(p) = \lim_{p \to 0} p(\mathrm{FTBF}(p) - 1)E_c(p) = \begin{cases} \dfrac{K_i K_0 a_0}{1 + K_i K_0} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Cela signifie que si **la classe de FTBO_{nc}(p) est nulle** alors **l'erreur de traînage est bornée**, sinon **dans les autres cas** ($\alpha \geq 1$), **l'erreur de traînage est nulle**.

Correction et amélioration des performances des SLCI

<u>Important !</u>
Si la **FTBO est de classe 1**, alors le **système en boucle fermée** possède un **écart statique nul** pour une **entrée de consigne du type échelon** et **l'écart de traînage est borné**.

<u>Étude **avec perturbation** :</u>
On considère **l'entrée de consigne nulle**.
Supposons que le ou les intégrateurs purs soient dans F1(p) et aucun dans $F_2(p)$. Posons $G_1(p)$ =$C(p)F_1(p)$ telle que :

$$G_1(p) = \frac{K_1}{p^\alpha}\frac{N_1(p)}{D_1(p)} \quad \text{et} \quad F_2(p) = K_2\frac{N_2(p)}{D_2(p)}$$

avec $N_1(0) = D_1(0) = N_2(0) = D_2(0) = 1$

La fonction de transfert en régulation $F_R(p)$ est telle que :

$$F_R(p) = \frac{S(p)}{P(p)} = -\frac{F_2(p)}{1 + G_1(p)F_2(p)}$$

Correction et amélioration des performances des SLCI

La **valeur finale de la sortie** pour une **entrée échelon** de la **perturbation P(p) d'amplitude P_0** vaut :

$$S = \lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0} p\mathrm{FTBF}(p)P(p) = \begin{cases} -\dfrac{K_1 K_2 P_0}{K_1 K_2 + 1} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Important !

Si la **FTBO est de classe 1**, et que cet **intégrateur est placé en amont** (avant) de la **perturbation du type échelon**, alors le système **rejette cette perturbation.**

Correction et amélioration des performances des SLCI

5-3 Conclusion sur l'action intégrale

Important ! *Correcteur Proportionnel Intégral*

Un correcteur Proportionnel Intégral :

- **détériore la rapidité** d'un système, mais **peut être réglée en agissant sur Ki** ;
- **déstabilise le système** en **diminuant la marge de phase** notamment, ce qui peut rendre le système instable ;
- **permet d'annuler l'écart statique** dans le cas d'une **entrée échelon** de la consigne si celui-ci n'était pas déjà assuré (FTBO de classe 1) ;
- **permet de rejeter une perturbation** du type échelon lorsque **l'intégrateur est placé en amont (avant) la perturbation**, si celle-ci n'était pas déjà assurée.

Correction et amélioration des performances des SLCI

6 - Correction avec correcteur Proportionnel Dérivé

6-1 Introduction sur la correction dérivée

Les correcteurs du type **Proportionnel Dérivé** permettent **d'amplifier d'un coefficient Kd (Kd > 0) l'écart ε(t)** entre la consigne et la mesure de la grandeur à asservir et de dériver dans le domaine temporel, tel que :

$$u(t) = K_D \varepsilon(t) + K_D T_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

où **u(t) est la sortie du correcteur**.

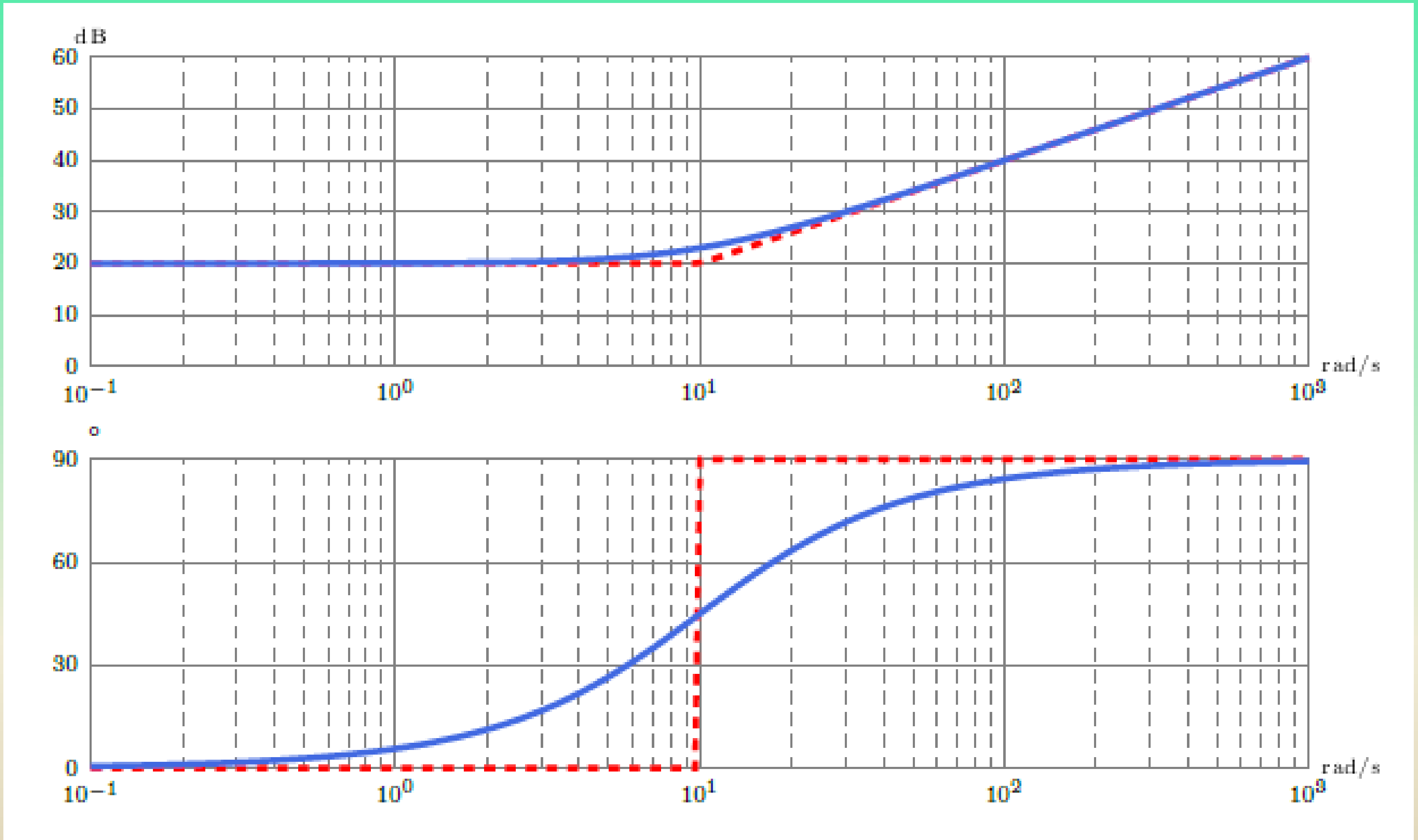
T_D est appelée **constante de temps de dérivation**.

Ils possèdent une fonction de transfert C(p) telle que :

$$\boxed{C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_D(1 + T_D p)}$$

Le diagramme de Bode d'un correcteur Proportionnel Dérivé est fourni sur la Figure 29.

Correction et amélioration des performances des SLCI



<u>Figure 29</u> Diagramme de Bode d'un correcteur Proportionnel Dérivé

Correction et amélioration des performances des SLCI

Un **correcteur Proportionnel Dérivé** permet **d'augmenter le gain** pour les **hautes pulsations**, et **introduit une phase de 90° aux hautes pulsations**.
Ce type de correcteur **n'est pas réalisable pratiquement** car non causal, mais il est possible d'approcher son comportement par la fonction de transfert

$$C(p) = K_D \frac{1 + T_D p}{1 + N T_D p} \text{ avec } N < 1.$$

Correction et amélioration des performances des SLCI

6-2 Influence d'une correction dérivée . . .

6.2.1 . . . sur la stabilité

Le correcteur **Proportionnel Dérivé** rajoutant de la phase ($\varphi(\omega) > 0$), il permet **d'augmenter la marge de phase**.

Cela permet donc de **stabiliser le système en boucle fermée**.

La Figure 30 montre l'influence d'un correcteur Proportionnel Dérivé sur les marges de phase et de gain d'un système du second ordre en boucle ouverte.

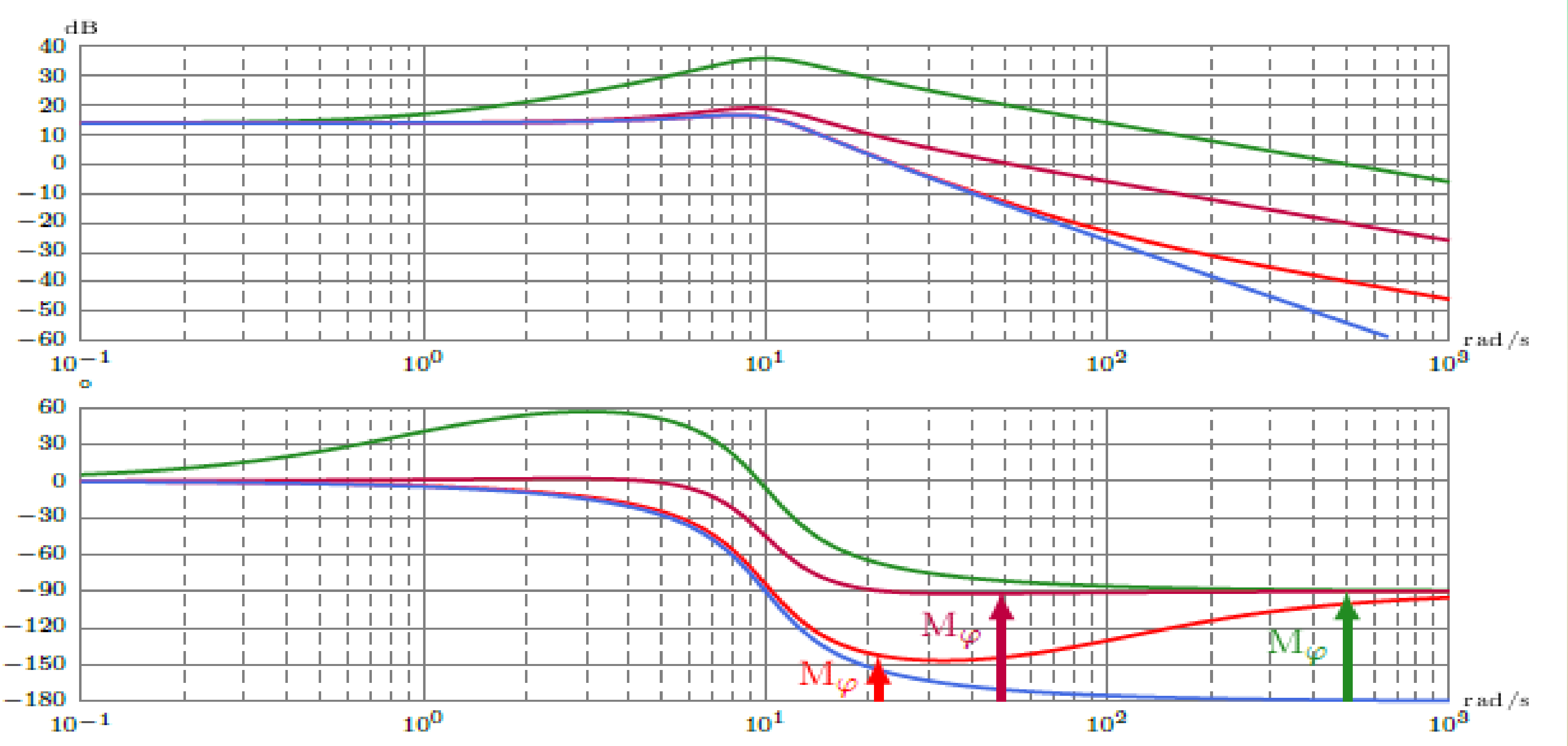


Figure 30 Influence d'un correcteur Proportionnel Dérivé sur la stabilité

Correction et amélioration des performances des SLCI

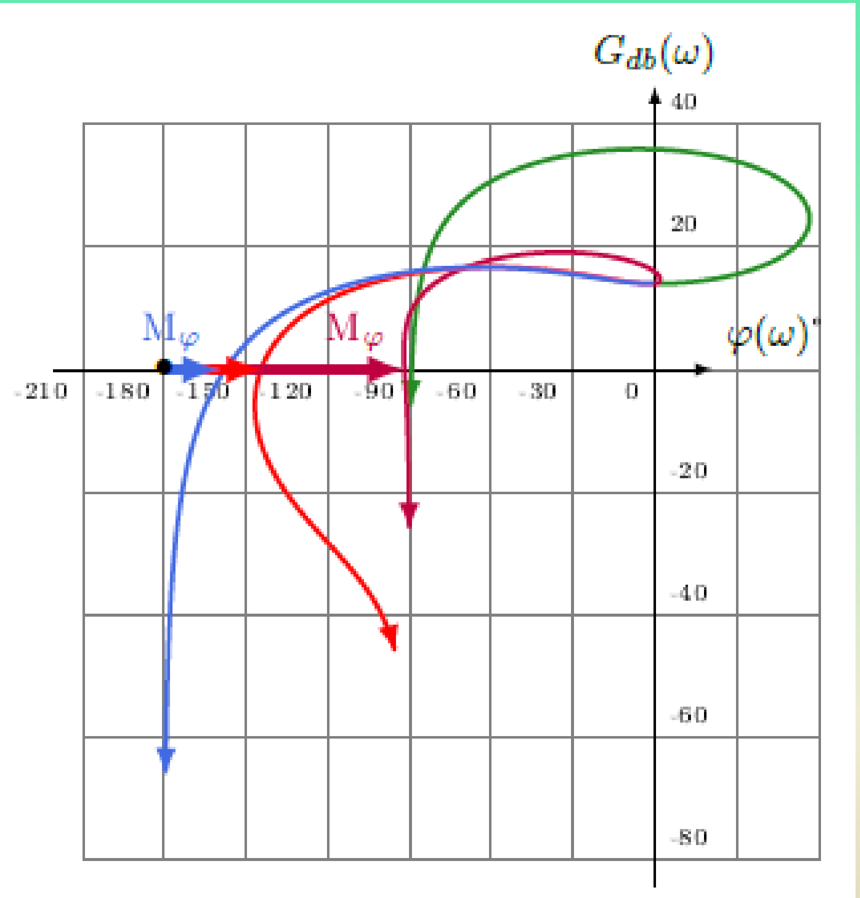


Figure 31 Influence d'un correcteur Proportionnel sur la stabilité (lieu de Black)

Correction et amélioration des performances des SLCI

6.2.2 . . . sur la rapidité

Considérons un système de fonction de transfert du second ordre

$$H(p) = \frac{K_0}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0{}^2}p^2}$$

$$C(p) = K_D(1 + T_D p)$$

placé en boucle fermée à retour unitaire avec un correcteur Proportionnel Dérivé C(p). La fonction de transfert en boucle fermée est donc :

$$\mathrm{FTBF}(p) = \frac{K_0 K_D}{1 + K_0 K_D} \frac{1 + T_D\, p}{1 + \frac{2\xi + K_0 K_D T_D \omega_0}{\omega_0(1 + K_0 K_D)}p + \frac{p^2}{\omega_0^2(1 + K_0 K_D)}}$$

La **pulsation propre** du système non amortie en boucle fermée ω_{0BF} vaut $\omega_0\sqrt{1 + K_0 K_D}$ est donc **augmentée si K_D > 0**, ce qui tend à laisser penser que le **système en boucle fermée est plus rapide**.

Cependant, **seule une analyse précise du temps de réponse réduit** peut permettre de vérifier cette affirmation, donc au cas par cas.

Correction et amélioration des performances des SLCI

6.2.3 . . . sur la précision

L'étude de la stabilité ci-dessus a permis de montrer que le gain statique du système en boucle fermée s'écrit sous la forme :

$$K_{BF} = \frac{K_0 K_D}{1 + K_0 K_D}$$

Cela permet d'affirmer que **la partie proportionnelle du correcteur** Proportionnel Dérivé peut permettre **d'améliorer la précision**.
En effet, un système précis possède un gain unitaire.

6-3 Conclusion sur l'action dérivée

À retenir ! Correcteur Proportionnel Dérivé

Un correcteur Proportionnel Dérivé :

- **modifie peu la rapidité** d'un système, mais peut la régler en agissant sur K_D ;
- **stabilise** le système en **augmentant la marge de phase** notamment ;
- **modifie très peu la précision** (uniquement l'influence de K_D).

Correction et amélioration des performances des SLCI

7 - Correction avec correcteur Proportionnel Intégral Dérivé

7.1 Introduction sur la correction proportionnelle intégrale dérivée

Les correcteurs du type **Proportionnel Intégral Dérivé** permettent d'allier les avantages des correcteurs Proportionnel, Proportionnel Intégral et Proportionnel Dérivé. Ils permettent de délivrer un signal de commande u(t) tel que :

$$\boxed{C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_P(1 + T_D p)\frac{1 + T_I p}{T_I p}}$$

Le diagramme de Bode d'un correcteur Proportionnel Intégral Dérivé est fourni sur la Figure 32 avec $T_I > T_D$.

Correction et amélioration des performances des SLCI

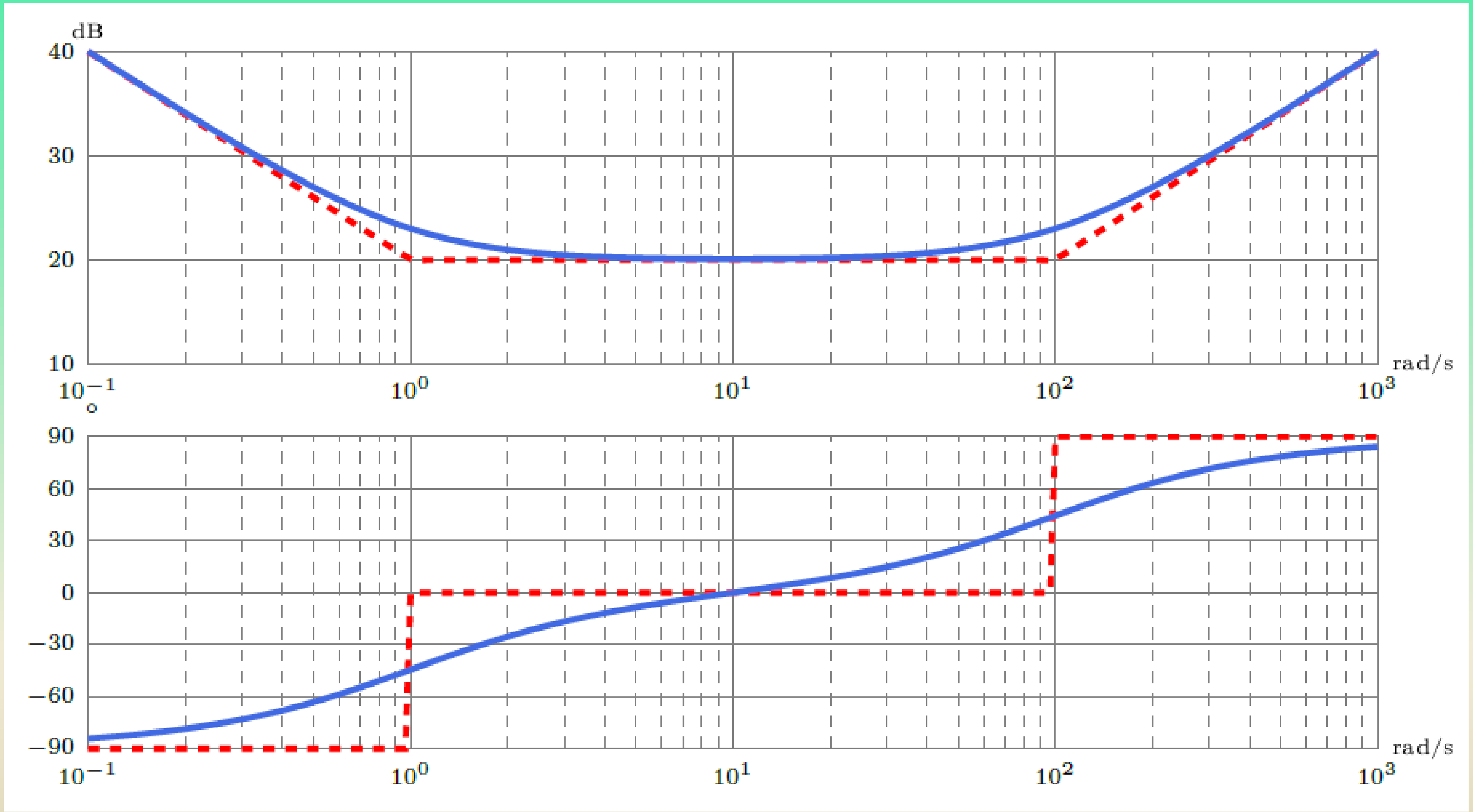


Figure 32 Diagramme de Bode d'un correcteur Proportionnel Intégral Dérivé

Correction et amélioration des performances des SLCI

Un correcteur **Proportionnel Intégral Dérivé** permet **d'augmenter le gain** pour les **basses** et **hautes pulsations**, et **introduit une phase de 90°** aux **hautes pulsations** et de **- 90° aux basses pulsations**.
Il permet ainsi de **s'assurer** d'une **erreur statique nulle** pour une **entrée de consigne du type échelon**, et de **limiter l'impact de la descente de 90°** de la phase

À retenir *Correcteur Proportionnel Intégral Dérivé*
Un correcteur Proportionnel Intégral Dérivé :

- peut **améliorer la rapidité** d'un système en agissant sur K_P ;
- **influe peu sur la stabilité** si les paramètres sont correctement choisis, sinon le système en boucle fermée ;
- **permet d'annuler l'erreur statique** dans **le cas d'une entrée échelon** de la consigne si celle-ci n'était pas déjà assurée (FTBO de classe 1) ;
- **permet d'annuler l'erreur statique due à une perturbation du type échelon** lorsque **l'intégrateur est placé en amont (avant) la perturbation**, si celle-ci n'était pas déjà assurée ;
- est **difficile à synthétiser à la main**. Seul un logiciel de simulation peut permettre de déterminer efficacement les paramètres du correcteur.

Correction et amélioration des performances des SLCI

8 - Correction avec Retard ou Avance de Phase

8.1 Introduction sur la correction avec retard ou avance de phase

Les correcteurs à Avance de Phase ou à Retard de Phase sont caractérisés par une fonction de transfert, respectivement C_{AP} (p) et C_{RP} (p), tels que :

$$\begin{cases} \boxed{C_{AP}(p) = K_P \dfrac{1+aTp}{1+Tp}} & \text{avec } a > 1 \\ \\ \boxed{C_{RP}(p) = K_P \dfrac{1+Tp}{1+aTp}} & \text{avec } a > 1 \end{cases}$$

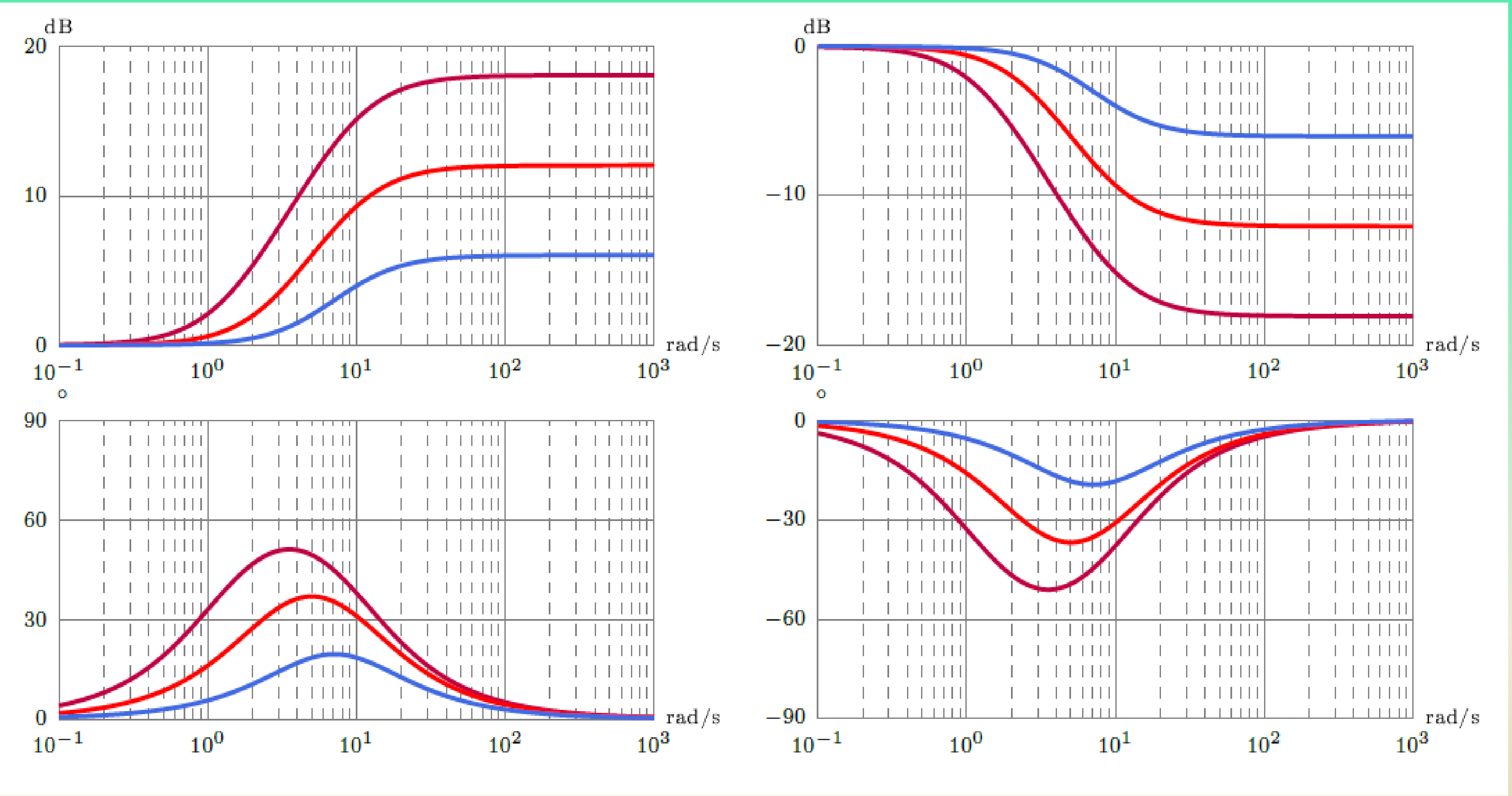
Les diagrammes de Bode de ces correcteurs sont représentés sur la Figure 34.

Correction et amélioration des performances des SLCI

Avance de phase		Retard de phase	
Gain max	$20 \log aK_P$	Gain min	$-20 \log aK_P$
Pulsation à phase max	$\omega_m = \dfrac{1}{T\sqrt{a}}$	Pulsation à phase min	$\omega_m = \dfrac{1}{T\sqrt{a}}$
Gain à ω_m	$10 \log aK_P^2$	Gain à ω_m	$-10 \log aK_P^2$
Phase max	$\sin \varphi_{max} = \dfrac{a-1}{a+1}$	Phase min	$\sin \varphi_{max} = \dfrac{1-a}{a+1}$

<u>Figure 33</u> Propriétés remarquables de la réponse fréquentielle des correcteurs AP et RP

Correction et amélioration des performances des SLCI



<u>Figure 34</u> Diagrammes de Bode de correcteurs à Avance et Retard de Phase en fonction de a

Correction et amélioration des performances des SLCI

8-2 Influence d'une correction avec retard ou avance de phase . . .

8.2.1 . . . sur la stabilité

Les **correcteurs** à **Avance de Phase** permettent de **remonter localement, autour de ω_m, la phase de la FTBO**. Par conséquent, ils **améliorent la stabilité de la boucle fermée** en **augmentant la marge de phase** (Figure 35).

Les **correcteurs** à **Retard de Phase** permettent de **descendre localement, autour de ω_m, la phase de la FTBO**. Par conséquent, ils **déstabilisent la boucle fermée en diminuant la marge de phase.**

Correction et amélioration des performances des SLCI

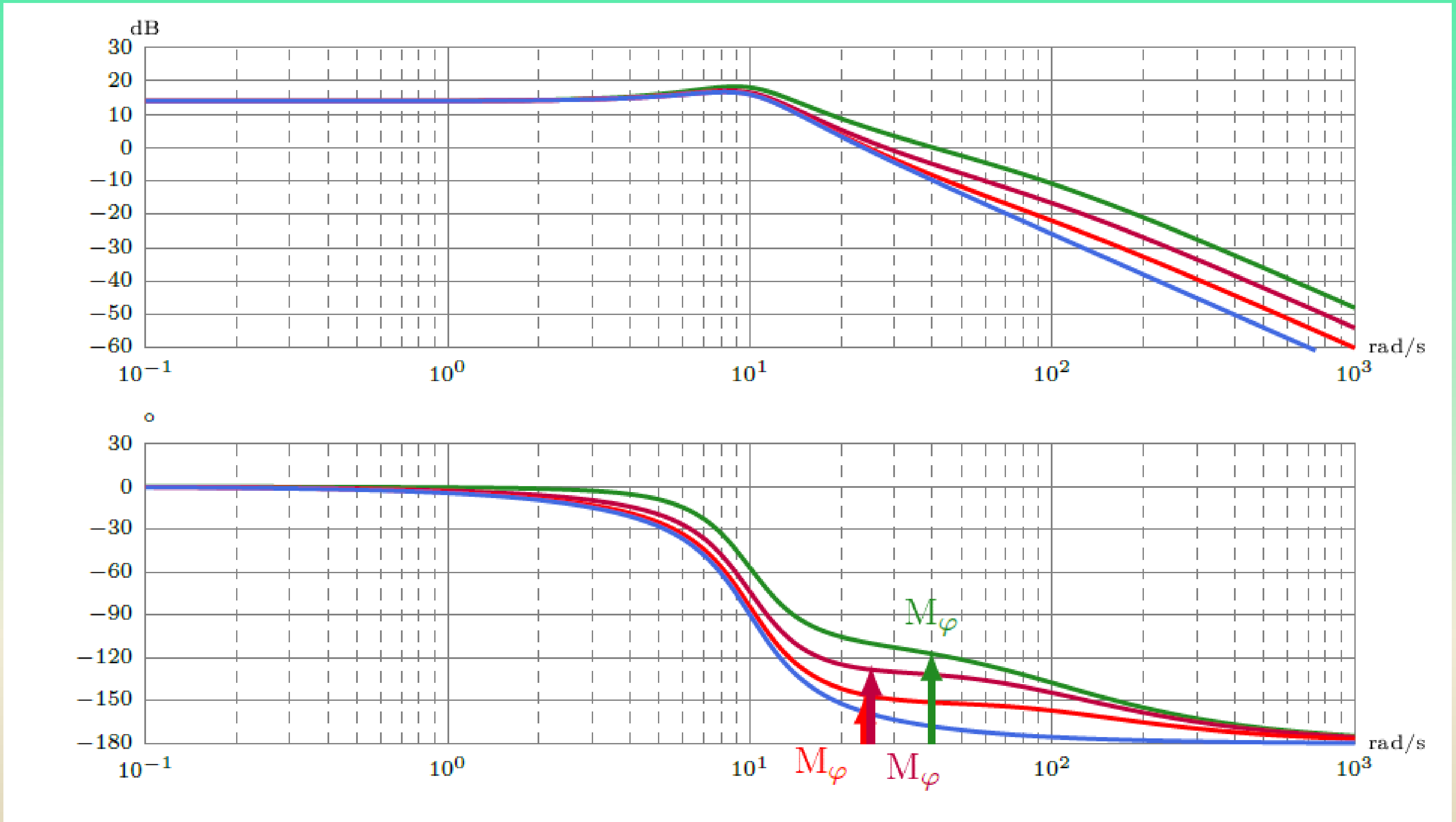
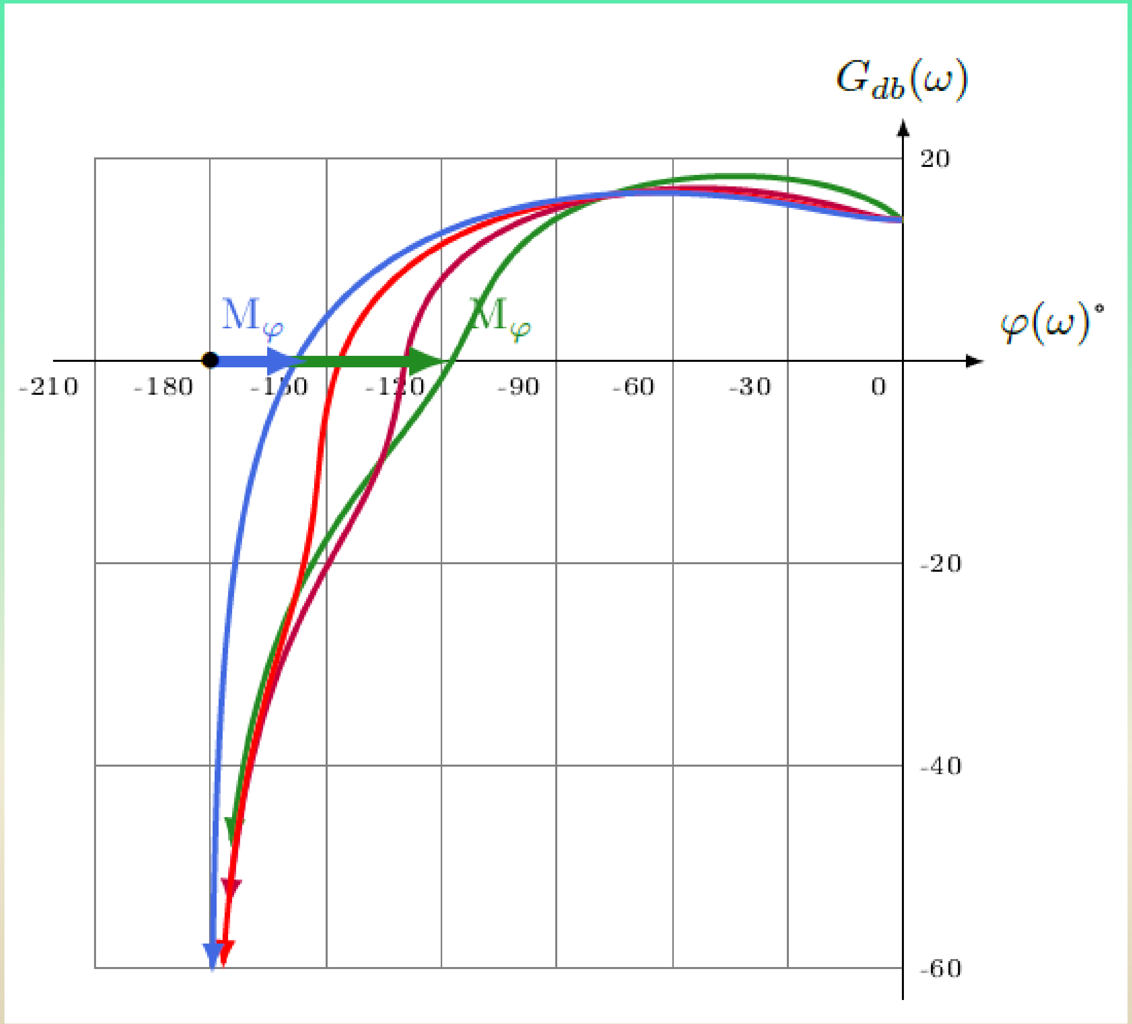


Figure 35 *Influence d'un correcteur à Avance de Phase sur la stabilité (plan de Bode)*

Correction et amélioration des performances des SLCI



<u>Figure 36</u> Influence d'un correcteur à Avance de Phase sur la stabilité (lieu de Black)

Correction et amélioration des performances des SLCI

8.2.2 . . . sur la rapidité

Les **correcteurs à avance** ou **retard de phase** n'ont que **peu d'influence sur la rapidité**. **Seul le paramètre K_P** peut parfois permettre de **régler la rapidité de la boucle fermée**.

8.2.3 . . . sur la précision

De la même façon que pour la rapidité, les **correcteurs à avance** ou **retard de phase** n'ont que **peu d'influence sur la pr**écision. **Seul le paramètre K_P** peut parfois permettre de **régler la précision de la boucle fermée**.

8.3 Conclusion sur l'action avance ou retard de phase

À retenir *Correcteur à Avance (ou Retard) de phase*

Un correcteur à Avance (ou Retard) de phase :

- **modifie peu la rapidité** du système en boucle fermée ;
- **améliore (avance de phase)** ou **diminue (retard de phase)** la **stabilité** du système en boucle fermée en modifiant la marge de phase ;
- **modifie peu la précision**.

Correction et amélioration des performances des SLCI

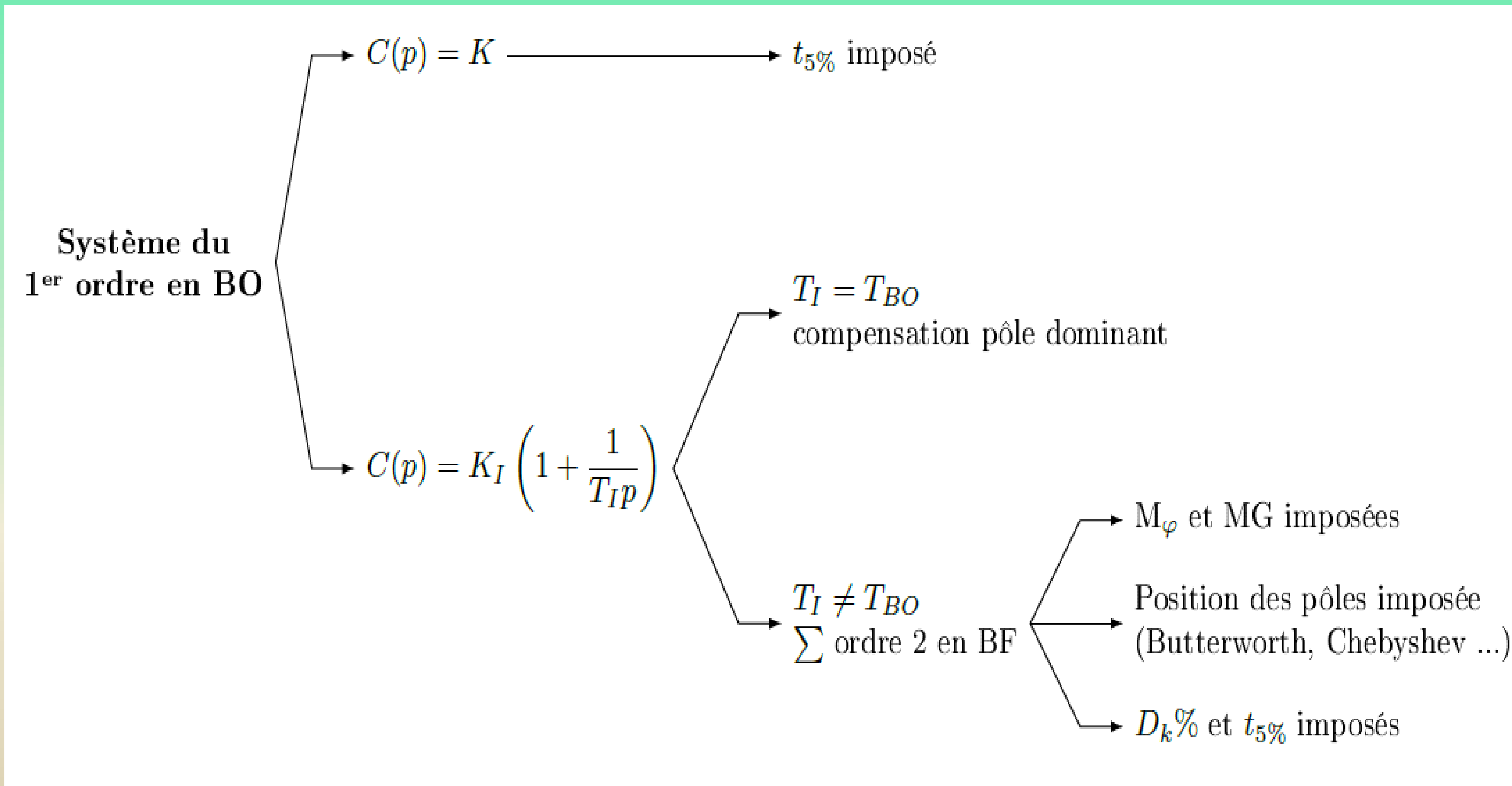
9 - Synthèse sur les correcteurs

	Stabilité	Rapidité	Précision
Correcteur **P**	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
Correcteur **PI**	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
Correcteur **PD**	$\oplus$	$\oslash$	$\oslash$
Correcteur **PID**	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
Correcteur **AP**	$\oplus$	$\oslash$	$\oslash$
Correcteur **RP**	$\ominus$	$\oslash$	$\oslash$

Correction et amélioration des performances des SLCI

10 - Critères de détermination des paramètres d'un correcteur

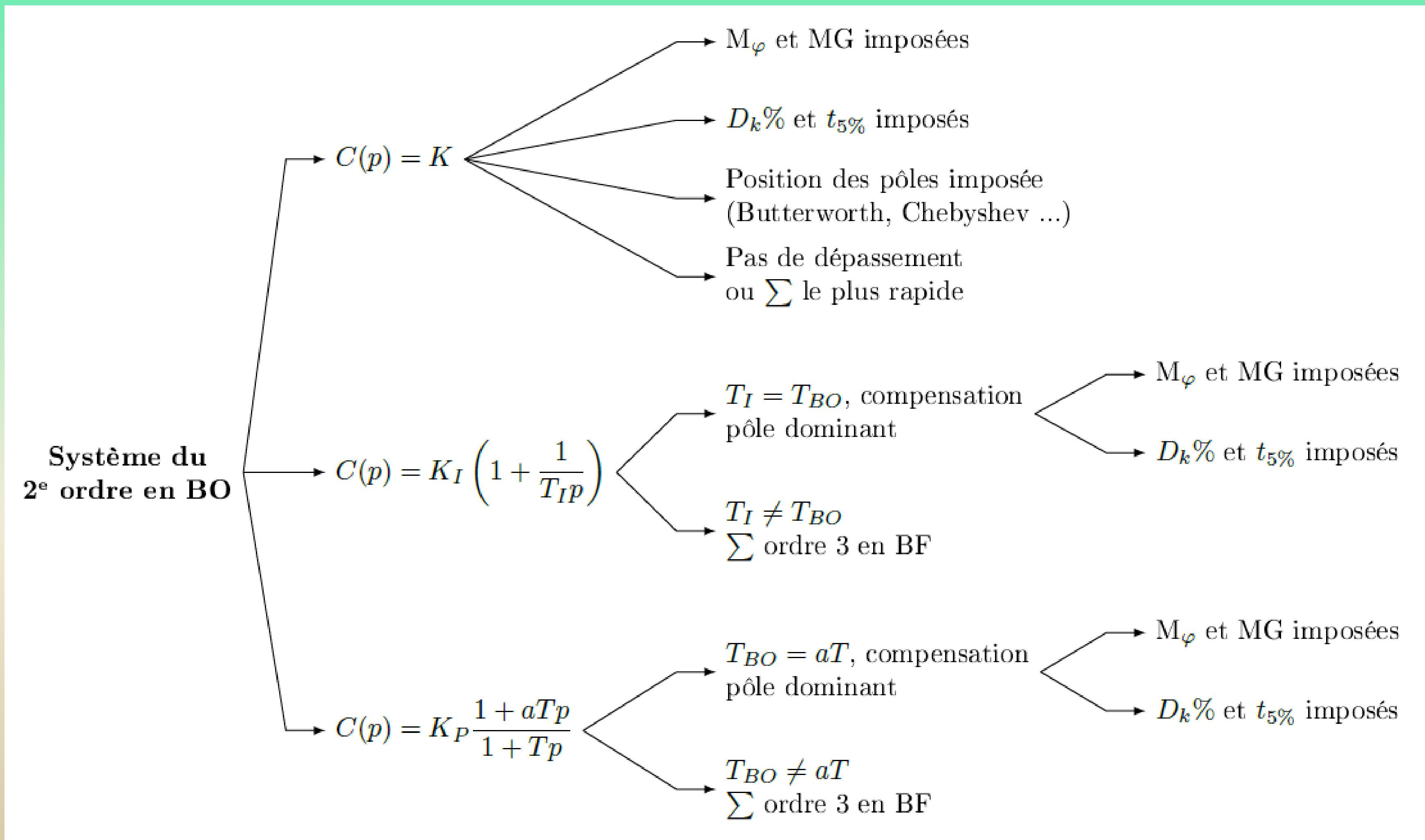
10.1 Systèmes du 1er ordre



Correction et amélioration des performances des SLCI

10 - Critères de détermination des paramètres d'un correcteur

10.1 Systèmes du 2eme ordre



Correction et amélioration des performances des SLCI

<u>Références</u>

Cours CPGE - Lycée Jean Zay – Thiers

Cours CPGE - Lycée Carnot - Dijon