Problème

On s'intéresse dans ce problème au mouvement d'un disque en contact avec une demi-circonférence. On considère le problème plan, c'est-à-dire que les vitesses et les efforts en jeu appartiennent au même plan vectoriel $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

Soit R_g un référentiel galiléen et $R_0 : (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ un repère orthonormé direct lié à ce référentiel, $\vec{y}_0$ étant vertical ascendant. Le disque *S*, de centre *G*, est homogène de rayon *r* et de masse *m*. la demi-circonférence *C* de centre *O*, de rayon R $(R > r)$ est contenue dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Outre les efforts de contact le disque *S* est soumis aux actions de la gravité, le champ de pesanteur étant noté $-g\vec{y}_0$.

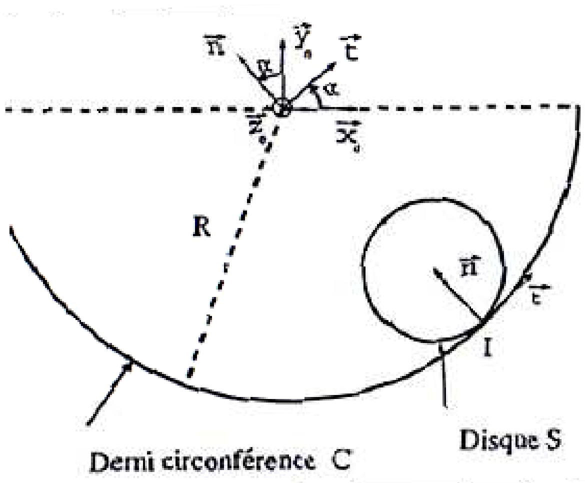
On note :

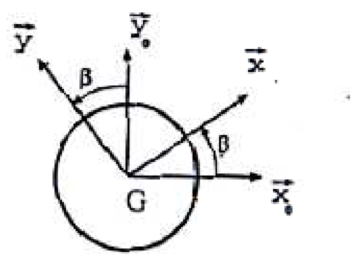
- *I* le point de contact de *S* avec *C*.
- $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à *C* en *I*.
- R_1 un repère orthonormé direct $(O, \vec{t}, \vec{n}, \vec{z}_0)$ où $\vec{t}$ est un vecteur unitaire tangent à *C* en *I*.
- R un repère orthonormé direct lié à $S\,(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$.

La position dans $R_0 : (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ de tout point lié à *S* est repère au moyen de deux angles $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ (fonctions du temps *t* et comptés positivement autour de $\vec{z}_0$), où:

$$\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{t}) = (\vec{y}_0, \vec{n})$$
$$\beta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}) = (\vec{y}_0, \vec{y})$$

Dans tout le problème, les résultats vectoriels sont à exprimer dans la base $(O, \vec{t}, \vec{n}, \vec{z}_0)$.





Etude cinématique :

a. Déterminer les vecteurs de rotations $\vec{\Omega}_{(R_1/R_g)};\vec{\Omega}_{(S/R_g)};\vec{\Omega}_{(S/R_1)}$.

b. Déterminer le vecteur $\vec{V}(G\in S/R_g)$ et $\vec{\Gamma}(G\in S/R_g)$.

c. Déterminer les torseurs cinématiques $V(R_1/R_g)$ et $V(S/R_g)$ par leurs éléments de réduction aux points de votre choix.

d. Déterminer la vitesse du point géométrique de contact *I* par rapport à R_g.

e. Déterminer la vitesse de glissement en *I* de *S* par rapport à *C*.

f. En déduire la vitesse du point géométrique de contact *I* par rapport à *S*.

g. Dans l'hypothèse d'un roulement sans glissement de *S* sur *C* déterminer l'expression de $\dot{\beta}$ en fonction de $\dot{\alpha}, R$ et r.

Etude cinétique :

a. Soit $J_G(S)$ l'opérateur d'inertie du disque *S* (d'épaisseur nulle). Expliquer pourquoi la matrice $I_G(S)$ de cet opérateur a pour expression dans toute base orthonormée du type $(-,-,\vec{z}_0)$:

$$I_G(S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$; exprimer *C*.

b. On admet que $C=\frac{1}{2}mr^2$, en déduire la valeur de *A*.

c. Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}_G(S/R_g)$ de *S* par rapport à R_g en *G*.

d. Déterminer le torseur cinétique $\sigma_G(S/R_g)$ de *S* par rapport à R_g.

Etude dynamique :

a. Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}_G(S/R_g)$ de *S* par rapport à R_g en *G*.

b. Déterminer le torseur dynamique $\delta_G(S/R_g)$ de *S* par rapport à R_g.

c. En déduire le moment dynamique $\vec{\delta}_I(S/R_g)$ de *S* par rapport à R_g en *I*.