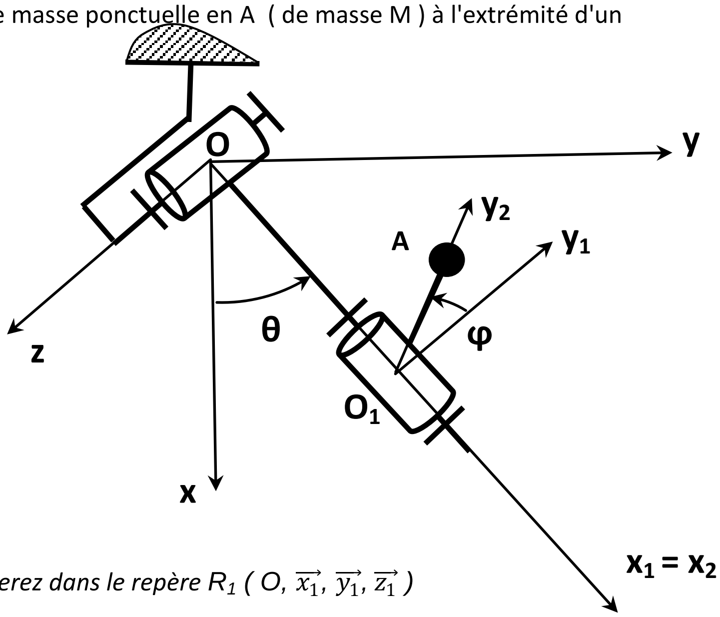
Contrôle de dynamique du solide

1 - Etude du mouvement d'une masse ponctuelle M

On considère un système mécanique représenté ci-dessous avec une masse ponctuelle en A (de masse M) à l'extrémité d'un système mécanique constitué de deux liaisons pivots :

- *une liaison pivot en O et d'axe $\vec{z}$ (angle de rotation :* **θ** *)*
- *une liaison pivot en O_1 et d'axe $\overrightarrow{x_1}$ (angle de rotation :* **φ** *)*



$OO_1 = L$ et $O_1A = R$

La partie fixe est liée au repère R *(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$)*

La barre OO_1 (solide S_1) est liée au repère R_1 *(O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$)*

La barre O_1A (solide S_2) est liée au repère R_2 *(O_1, $\overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{z_2}$)*

Questions

1) Réalisez les figures de changement de repère
2) Déterminez le vecteur rotation $\vec{\Omega}\,(S_2/R)$

3) Déterminez la vitesse de O_1 $\vec{V}_{O_1\,1/R}$ par dérivation. *Vous l'exprimerez dans le repère R_1 (O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$)*

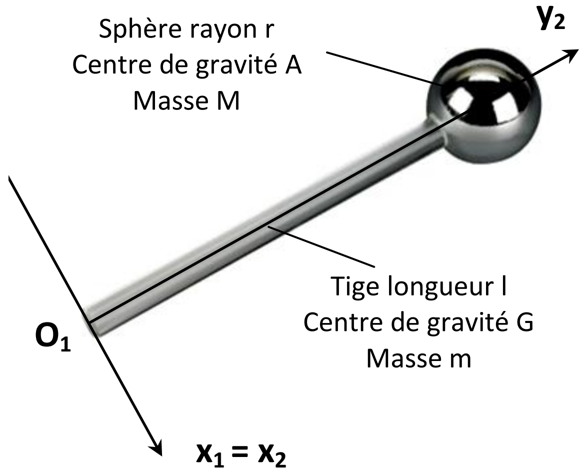
4) Déterminez l'accélération de O_1 $\vec{\Gamma}_{O_1\,1/R}$ par dérivation. *Vous l'exprimerez dans le repère R_1 (O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$)*

5) Déterminez la vitesse de A $\vec{V}_{A\,2/R}$ par dérivation. *Vous l'exprimerez dans le repère R_1 (O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$)*

6) Déterminez la vitesse de A $\vec{V}_{A\,2/R}$ par changement de point . *Vous l'exprimerez dans le repère R_1 (O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$)*

7) Déterminez l'accélération de A $\vec{\Gamma}_{A\,2/R}$ par dérivation. *Vous l'exprimerez dans le repère R_1 (O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$)*

En fait O_1A est une tige de longueur l et une sphère de rayon r



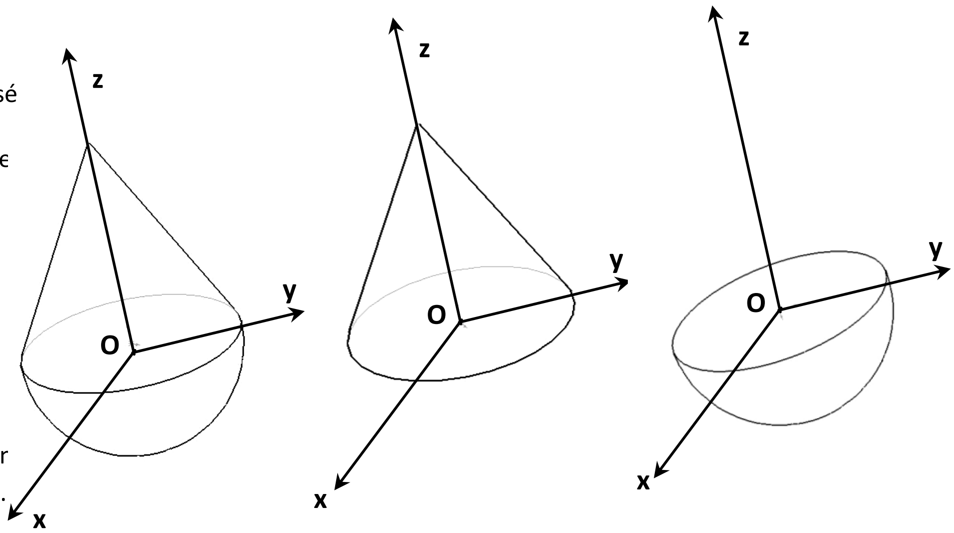
8) Sachant que :
- le moment d'inertie d'un cylindre de **diamètre d** et de **longueur l** par rapport à un axe passant par son centre de gravité est $I_{cylindre} = \frac{m.l^2}{12} + \frac{m.d^2}{16}$
- le moment d'inertie de la sphère par rapport à un axe passant par son centre de gravité est $I_{sphère} = \frac{2M.r^2}{5}$

En déduire le moment d'inertie de la tige par rapport à son axe de rotation O_1x_1 . Justifiez vos calculs

Déterminez le moment d'inertie de l'ensemble {tige+sphère} par rapport à son axe de rotation O_1x_1 . Justifiez vos calculs

2 - Cône et demi-sphère

Ci-contre est représenté un volume composé d'un cône et d'une demi-sphère.
On cherche à déterminer la matrice d'inertie de ce volume composé.
La base du cône a pour rayon R qui a pour hauteur H.
M_1 est la masse du cône.
La sphère est de rayon R et a une masse M_2



Questions

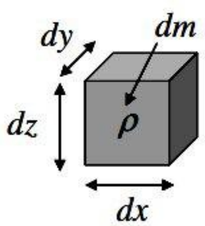
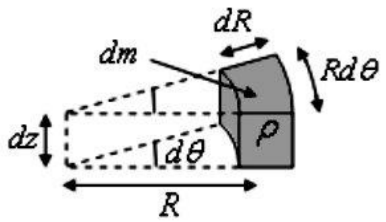
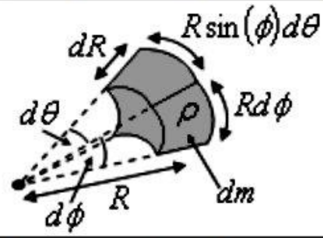
1) Précisez la forme de la matrice d'inertie en indiquant les termes qui sont nuls ou égaux . Justifiez.

2) Déterminez les termes de la matrice d'inertie du cône en O en détaillant les calculs.

3) Déterminez les termes de la matrice d'inertie de la demi-sphère en O en détaillant les calculs.

4) En déduire la matrice d'inertie du volume composé (cône + demi-sphère)

Rappel : Eléments de volumes pour calculer les intégrales

Coordonnées cartésiennes $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$	Coordonnées cylindriques $dm = \rho\, R\, dR\, d\theta\, dz$	Coordonnées sphériques $dm = \rho\, R^2 \sin(\phi) dR\, d\theta\, d\phi$
		

Remarque : $x, y, z \in [-\infty..\infty]$ et $R \in [0..\infty]$ $\theta \in [0..2\pi]$ $\phi \in [0..\pi]$

θ : Longitude θ : Axe parallèle à x « Rotation plan xy »

ϕ : Colatitude ϕ : Axe parallèle à z « Rotation $+z$ à $-z$ »

Rappel :

Volume d'une sphère de rayon R : $\mathbf{V_{sphère}} = \dfrac{4\,\pi.R^3}{3}$

Volume d'un cône de rayon R et de hauteur H : $\mathbf{V_{cône}} = \dfrac{\pi.H.R^2}{3}$