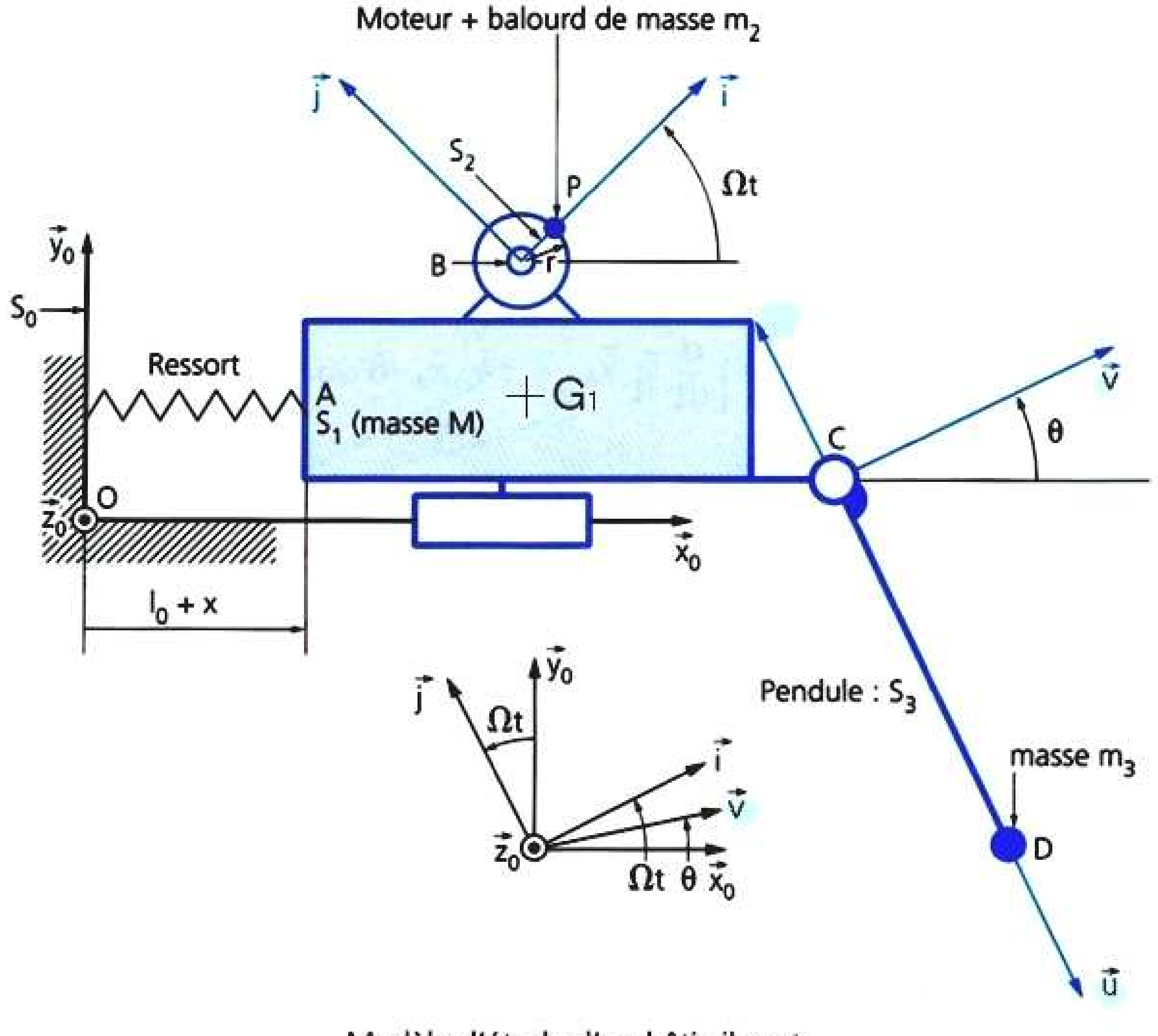
Problème

La figure proposée ci-après représente un modèle d'un bâti vibrant et son paramétrage.
Une modélisation plane a été retenue. Le **bâti vibrant** est modélisé par un solide **S_1**, de masse ***M*** et de **centre de gravité G_1** en liaison glissière parfaite avec un support **S_0**, fixe par rapport à un repère ***R_0*** supposé galiléen.
Le solide **S_1** est rappelé par un **ressort de longueur libre *l_0*** et de **raideur *k***.
Une masse ponctuelle ***m_2*** excentrée, placée en *P*, tourne sur un **rayon *r*** et est entraînée à vitesse constante **Ω**. Elle modélise le **balourd du rotor** d'un moteur **S_2**.
Un **pendule simple** de longueur ***L***, porte à son extrémité *D* une **masse** concentrée ***m_3***, l'ensemble constitue le solide S_3, en liaison pivot parfaite d'axe (C, $\overrightarrow{\mathbf{z_0}}$) avec S_1. Les masses autres que *M*, *m_2* et *m_3* sont négligées.



Modèle d'étude d'un bâti vibrant

L'objectif est de déterminer les deux équations différentielles liant les degrés de liberté *x* et *Θ*.
Le système possède deux degrés de liberté, il faut donc rechercher deux équations différentielles liant les inconnues x et Θ
On pose $\overrightarrow{\mathbf{AG_1}}$ = a. $\overrightarrow{\mathbf{x_0}}$ **;** $\overrightarrow{\mathbf{OG_1}}$ = [(l_0 + x) + a]. $\overrightarrow{\mathbf{x_0}}$ + b. $\overrightarrow{\mathbf{y_0}}$; $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ = (a + c.). $\overrightarrow{\mathbf{x_0}}$ - b. $\overrightarrow{\mathbf{y_0}}$ **;** $\overrightarrow{\mathbf{G_1B}}$ = d. $\overrightarrow{\mathbf{y_0}}$
(a, b, c , d sont des constantes du temps)
Le centre de gravité de S_3 est confondu avec D.

Questions

1) Calculer la vitesse et l'accélération de G_1 par rapport au repère R_0 ($\overrightarrow{V_{G_1/R_0}}$ et $\overrightarrow{\Gamma_{G_1/R_0}}$)

2) Calculer la vitesse et l'accélération de P par rapport au repère R_0 ($\overrightarrow{V_{P/R_0}}$ et $\overrightarrow{\Gamma_{P/R_0}}$)

3) Calculer la vitesse et l'accélération de D par rapport au repère R_0 ($\overrightarrow{V_{D/R_0}}$ et $\overrightarrow{\Gamma_{D/R_0}}$)

4) Calculer le moment cinétique en C de S_3 par rapport à R_0 ($\overrightarrow{\sigma_{C,S_3/R_0}}$)

5) Calculer le moment dynamique en C de S_3 par rapport à R_0 ($\overrightarrow{\delta_{C,S_3/R_0}}$)

6) Isoler l'ensemble {S_1, S_2, S_3}, faire le bilan des actions mécaniques et écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{\mathbf{x_0}}$
En déduire une relation entre m_2, m_3, L, M, $\ddot{x}$, Ω et θ et ses dérivées successives

7) Isoler S_3 , faire le bilan des actions mécaniques et écrire le théorème du moment dynamique au point C et en projection sur $\overrightarrow{\mathbf{z_0}}$
En déduire une relation entre g, L, θ, $\ddot{\theta}$ et $\ddot{x}$

8) On se place dans le cas de petits mouvements , donc $\sin\theta = \theta$ et $\cos\theta = 1$ et on néglige les termes θ^2 et $\dot{\theta}^2$
Récrire les équations obtenues aux questions 6) et 7)

On obtient donc un système de deux équations différentielles
La solution générale de ce système est donnée par la solution générale du système sans second membre à laquelle il faut rajouter la solution particulière du système avec second membre.
La solution générale du système sans second membre correspond aux vibrations libres du système ; celles-ci concernent le régime transitoire et disparaitront au bout d'un certain temps en régime établi.
*La **solution particulière** du **système avec second membre** correspond aux vibrations forcées, entretenues par le moteur. Ce sont les **seules vibrations qui subsistent** lors du fonctionnement en régime établi.*
Cette solution doit être recherchée sous la forme : $x = A.\cos(\Omega.t)$ et $\Theta = B.\cos(\Omega.t)$

9) En remplaçant x et Θ par leurs solutions particulières, déterminer la relation qui lie L, g et Θ , sachant qu'on cherche à supprimer les mouvements du bâti (x = 0 donc A =0)

10) On cherche à retrouver l'équation trouvée à la question 7) par application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble {S_1, S_2, S_3}
a) Déterminer l'énergie cinétique de S_1 dans son mouvement par rapport à R_0
b) Déterminer l'énergie cinétique de S_2 dans son mouvement par rapport à R_0
c) Déterminer l'énergie cinétique de S_3 dans son mouvement par rapport à R_0
d) Déterminer les énergies potentielles
e) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble {S_1, S_2, S_3}
On précise que l'application du théorème du moment dynamique appliqué en B au solide S_2 permet d'obtenir l'équation : $m_2.r.\ddot{x}.\sin(\Omega.t) + m_2.g.r.\cos(\Omega.t) = 0$
Vérifier que l'on retrouve bien l'équation obtenue à la question 7)