Contrôle de mécanique du solide

1 - Cinématique

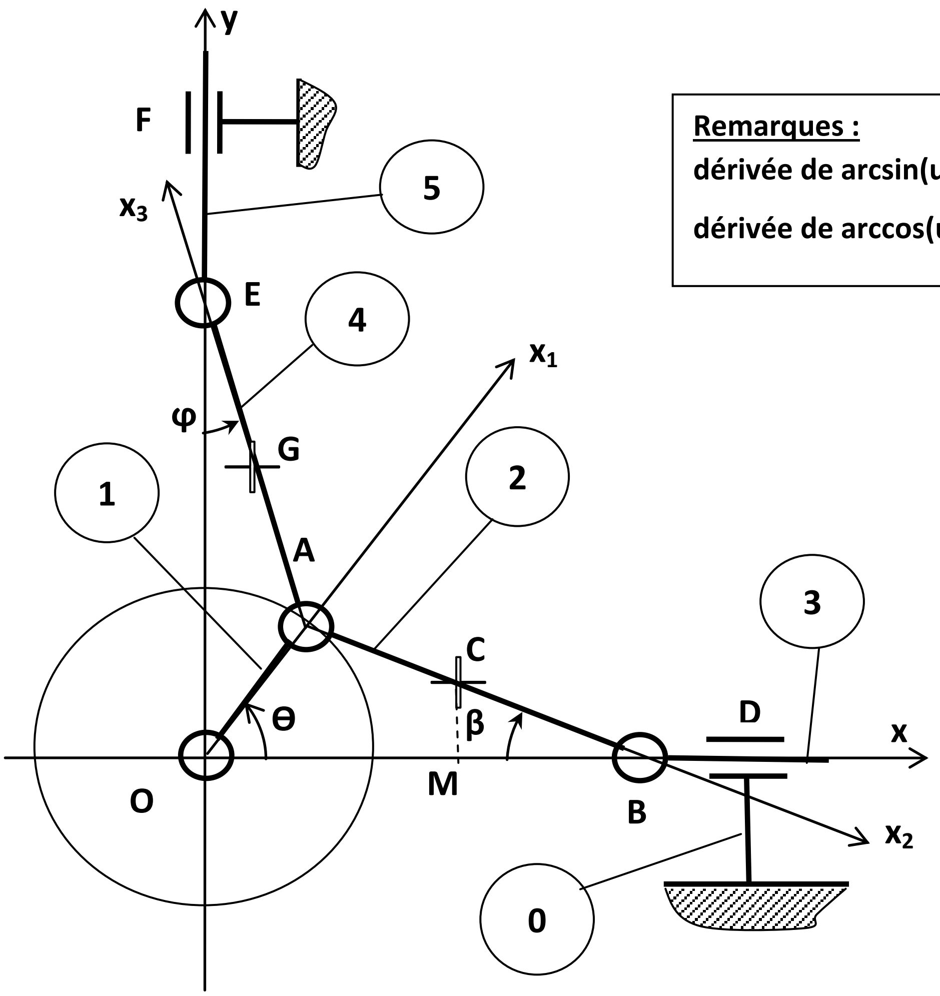
Dans le double système bielle-manivelle, l'extrémité d'une tige (OA) de longueur (R) a un mouvement circulaire uniforme avec la **vitesse angulaire (ω) constante**.

Elle entraîne :

- une bielle (AB) de longueur $L_1 > R$ dont l'extrémité B peut coulisser sur un axe Ox

- une bielle (AE) de longueur $L_2 > R$ dont l'extrémité E peut coulisser sur un axe Oy ;

à t = 0, Θ = 0. **Le point C est le milieu de [AB] . Le point G est le milieu de [AE]**

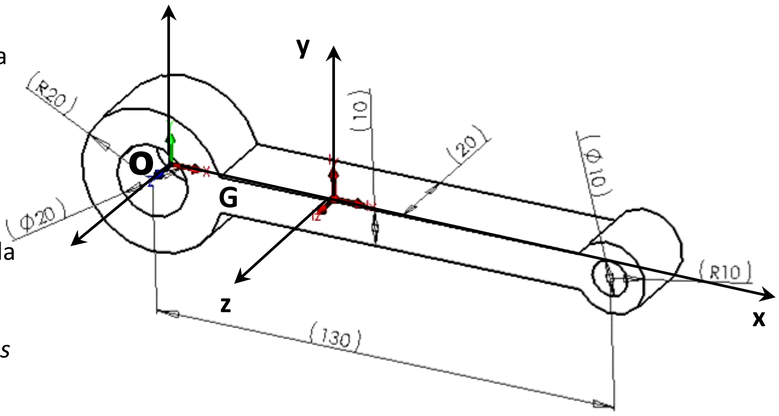


Remarques :
dérivée de arcsin(u) : $\arcsin(u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
dérivée de arccos(u) : $\arccos(u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

0 : Partie fixe
1 : Manivelle OA
2 : Bielle AB
3 : Coulisse horizontale
4 : Bielle AE
5 : Coulisse verticale

1) Quelle est l'équation horaire angulaire (Θ = f(t)) du point A ?
2) Exprimer β en fonction de Θ, R et L_1
3) Exprimer φ en fonction de Θ, R et L_2
4) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OC}$
5) En déduire OM(t) en fonction de Θ, R et L_1.
6) Déterminer la vitesse de rotation de la bielle $\vec{\Omega}\,(2/0)$ en fonction de Θ et de ses dérivées ainsi que de R et L.
7) Déterminer le vecteur vitesse du point A, $\overrightarrow{V_{A/R}}$ en fonction de Θ, R et de ses dérivées.
8) Déterminer le vecteur vitesse du point B (par changement de point), $\overrightarrow{V_{B/R}}$ en fonction de Θ, R et L_1 et de ses dérivées.
9) Déterminer le vecteur vitesse du point E (par changement de point), $\overrightarrow{V_{E/R}}$ en fonction de Θ, R et L_2 et de ses dérivées.
10) Déterminer le vecteur vitesse du point C (par changement de point), $\overrightarrow{V_{C/R}}$ en fonction de Θ, R et L_1 et de ses dérivées.
11) Déterminer $V_{Bx} = \overrightarrow{V_{B/R}}\,.\vec{x}$ la projection de sur Ox en fonction de Θ, R et L_1 et de ses dérivées.
12) Déterminer $\overrightarrow{V_{A/R}}\,.\,\overrightarrow{AB}$ ainsi que $\overrightarrow{V_{B/R}}\,.\,\overrightarrow{AB}$. Comparer le résultat
13) Déterminer $\Gamma_{Bx} = \overrightarrow{\Gamma_{B/R}}\,.\vec{x}$, l'accélération du point B en projection sur Ox en fonction de Θ, R et L_1 et de ses dérivées.

2 - Cinétique



On donne ci-après le dessin coté de la bielle (2) ainsi que sa matrice d'inertie.

1) Justifiez (calcul) les coordonnées de position du centre de gravité.

2) Quels sont les termes nuls de la matrice d'inertie ? Justifiez la forme de la matrice d'inertie.

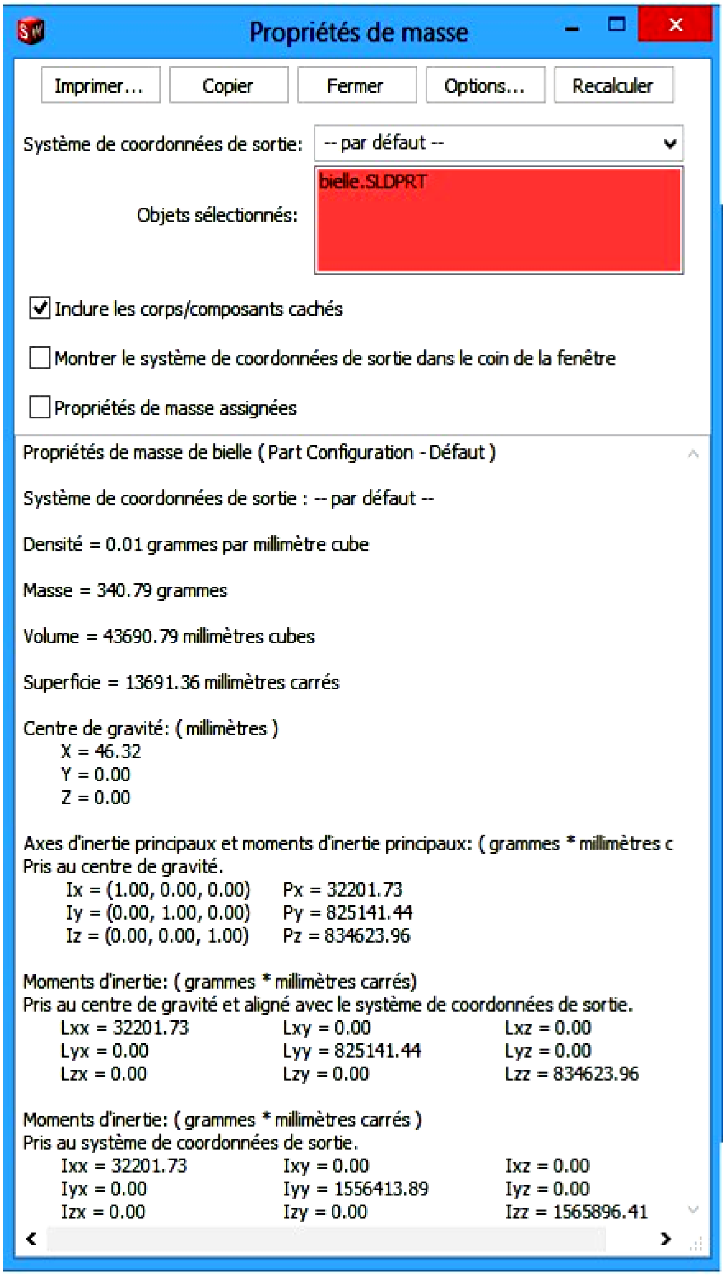
3) Proposez une démarche pour déterminer les termes de la matrice d'inertie.

On précisera :

- *comment on décompose le solide en volumes élémentaires*
- *les dimensions des volumes élémentaires*
- *comment et en quel(s) point(s) sont déterminés les moments d'inertie de chaque volume élémentaire*
- *comment obtient-on les moment d'inertie à partir des moments d'inertie de chaque volume élémentaire*

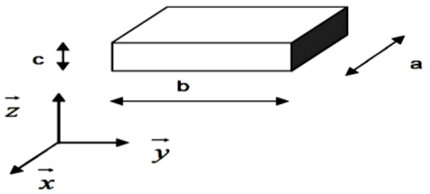
4) Détaillez le calcul du moment d'inertie du solide par rapport à G, $\vec{x}$

Comparez la valeur trouvée avec la valeur donnée ci-contre.



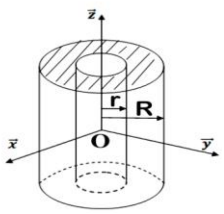
Pour information on donne :

- la matrice d'inertie d'un pavé exprimée en G (centre de gravité)



$$I_{GS/R0} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{G,\,R0}$$

- la matrice d'inertie d'un cylindrecreux (rayon extérieur R , rayon intérieur r et hauteur H) exprimée en O (centre de gravité)



$$[I_{(S)}]_O = \begin{bmatrix} \frac{M}{4}(R^2+r^2)+\frac{MH^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{4}(R^2+r^2)+\frac{MH^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{2}(R^2+r^2) \end{bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

5) Détaillez le calcul de la matrice d'inertie du cylindre creux donnée ci-dessus