Etude d'un robot marcheur

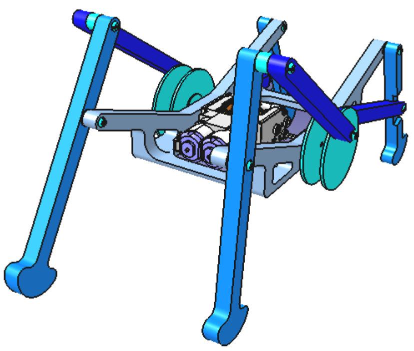
Ci-dessous est représenté un robot marcheur avec la manivelle OA (1) qui est animée d'un mouvement de rotation continu tel que : $\omega_{1/0} = \frac{d\theta}{dt}$ = constante

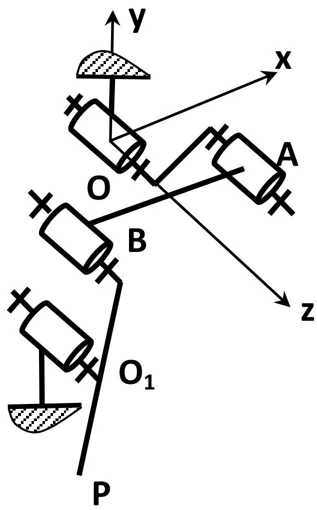
La partie fixe S_0 (support) est associée au référentiel R *(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$)*

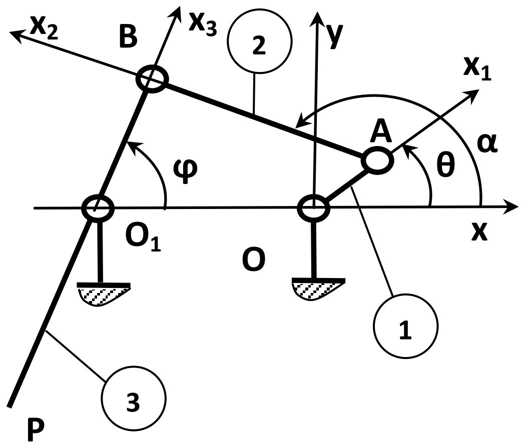
La manivelle OA (1) est liée au repère R_1 *(O, $\vec{x_1}$, $\vec{y_1}$, $\vec{z_1}$)* est en liaison pivot d'axe *O $\vec{z}$ par rapport à S_0 avec $\theta = (\vec{x}, \vec{x_1})$*

La biellette AB (2) est liée au repère R_2 *(A, $\vec{x_2}$, $\vec{y_2}$, $\vec{z_2}$)* est en liaison pivot d'axe *A $\vec{z}$ par rapport à S_1 avec $\alpha = (\vec{x}, \vec{x_2})$*

La patte BP (3) est liée au repère R_3 *(O_1, $\vec{x_3}$, $\vec{y_3}$, $\vec{z_3}$)* est en liaison pivot d'axe *O_1 $\vec{z}$ par rapport à S_0 avec $\varphi = (\vec{x_0}, \vec{x_1})$*







On pose : $\theta = (\vec{x}, \vec{x_1})$; $\alpha = (\vec{x}, \vec{x_2})$; $\varphi = (\vec{x}, \vec{x_3})$; $\overrightarrow{OA} = r.\vec{x_1}$; $\overrightarrow{AB} = a.\vec{x_2}$; $\overrightarrow{O_1B} = b.\vec{x_3}$; $\overrightarrow{O_1P} = -c.\vec{x_3}$; $\overrightarrow{OO_1} = -d.\vec{x}$

Solide S_1 (biellette OA): Masse M_1, centre de gravité G_1 tel que $\overrightarrow{OG_1} = \frac{r}{2}.\vec{x_1}$, Moment d'inertie en O $I_{Oz}(S_1) = C_1$

Solide S_2 (bielle AB): Masse M_2, centre de gravité G_2 tel que $\overrightarrow{AG_2} = \frac{a}{2}.\vec{x_2}$, Moment d'inertie en G_2 $I_{G2z}(S_2) = C_2$

Solide S_3 (levier BP): Masse M_3, centre de gravité G_3 tel que $\overrightarrow{O_1G_3} = e.\vec{x_3}$, Moment d'inertie en O_1 $I_{G3z}(S_3) = C_3$

<u>Questions</u>

1) Réalisez les figures de changement de repère

2) Déterminez les vecteurs rotation $\vec{\Omega}(S_1/R)$; $\vec{\Omega}(S_2/R)$; $\vec{\Omega}(S_3/R)$; $\vec{\Omega}(S_3/S_2)$; $\vec{\Omega}(S_2/S_1)$

3) Exprimez $\vec{V}_{A\,1/R}$. *Vous l'exprimerez dans le repère R_1 (O, $\vec{x_1}$, $\vec{y_1}$, $\vec{z_1}$)*

4) Exprimez $\vec{V}_{B\,3/R}$. *Vous l'exprimerez dans le repère R_3 (O, $\vec{x_3}$, $\vec{y_3}$, $\vec{z_3}$)*

5) Exprimez $\vec{V}_{B\,2/R}$

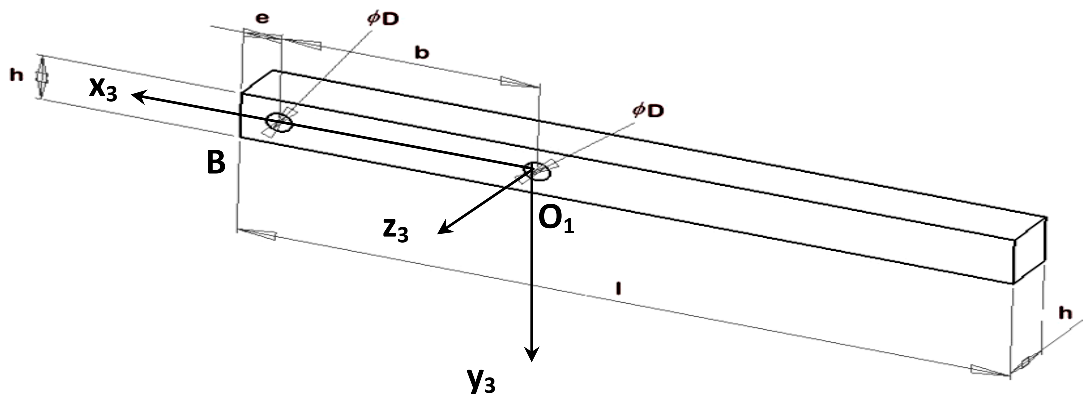
6) Que peut-on dire de $\vec{V}_{B\,2/R}$ et de $\vec{V}_{B\,3/R}$? Justifiez votre réponse.

En déduire une relation entre $\dot{\theta}$ et $\dot{\phi}$ en fonction de b, r, φ, α, θ

7) Exprimez $\vec{V}_{P\,3/R}$ par dérivation puis par changement de point. *Vous l'exprimerez dans le repère R_3 (O, $\vec{x_3}$, $\vec{y_3}$, $\vec{z_3}$)*

8) Exprimez $\vec{\Gamma}_{P\,3/R}$. *Vous l'exprimerez dans le repère R_3 (O, $\vec{x_3}$, $\vec{y_3}$, $\vec{z_3}$)*

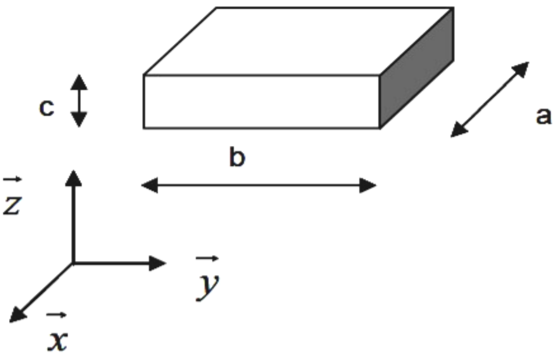
9) La patte (BP) peut être assimilée à un solide dont les caractéristiques sont données sur le croquis coté ci-après :



a) Calculer la masse du solide sachant que sa masse volumique sera notée ρ
b) Calculer les coordonnées de son centre d'inertie
c) Déterminer sa matrice d'inertie exprimée au point O_1 dans la base *($\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3}$)*

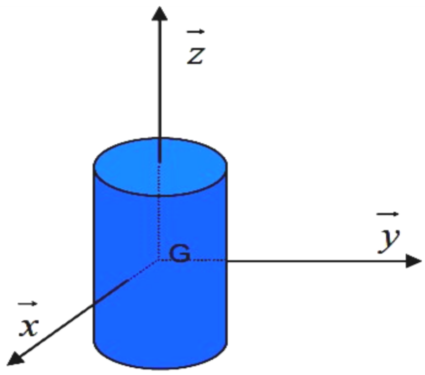
Pour information,page suivante, on donne la forme de la matrice d'inertie d'un pavé exprimée en G (centre de gravité)

$$I_{GS/R0} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{G,\,R0}$$



Ainsi que celle d'un cylindre (rayon R et longueur L) exprimée en G (centre de gravité)

$$I_{GS/R0} = \begin{bmatrix} \frac{m}{4}(R^2+\frac{L^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4}(R^2+\frac{L^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m.R^2}{2} \end{bmatrix}_{G,\,R0}$$



10)

a) Déterminez le moment cinétique en O_1 $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{O_1(S_3/R)}$ de la patte (BO_1).

On prendra pour matrice d'inertie en O_1 : $I_{O_1}(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})}$

b) Déterminez le moment cinétique en G_2 $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{G_2(S_2/R)}$ de la biellette AB (2).
Le moment d'inertie de la biellette en G_2 autour de l'axe Oz est C_2

c) Déterminez le moment cinétique en 0 $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{O(S_1/R)}$ de la manivelle OA (1).
Le moment d'inertie de la manivelle en O autour de l'axe Oz est C_1

11) Déterminez le moment dynamique en O $\vec{\boldsymbol{\delta}}_{O(S/R)}$ de l'ensemble { patte (BO_1), biellette (AB), manivelle (OA) }

12) Sachant : - *que l'action du moteur en O est modélisée par le torseur* $\{\mathcal{T}_{(moteur \to S_1)}\} = {}_O\left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{C_M} = C_M.\vec{z} \end{matrix} \right\}$

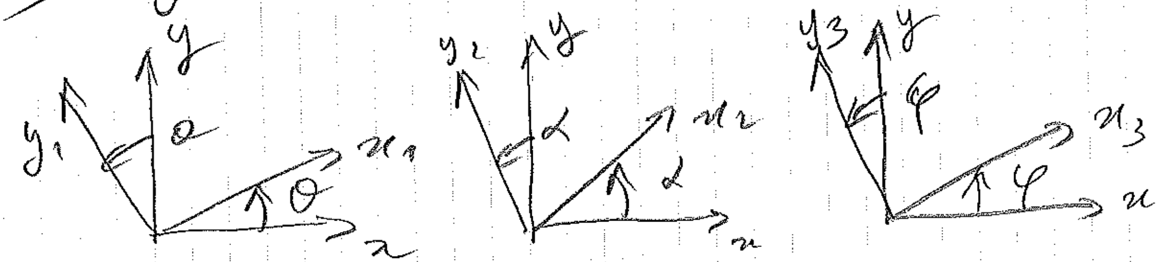
- *que l'action de contact en P est modélisée par le torseur* $\{\mathcal{T}_{(sol \to S_3)}\} = {}_P\left\{ \begin{matrix} \vec{R} = R.\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}$

- *que le poids propre des pièces est négligé*

Par application du théorème du moment dynamique en O, établissez l'équation permettant de déterminer le couple moteur C_M en fonction des masses, des inerties, des dimensions des solides en mouvement ainsi que des paramètres θ, φ, α et de leurs dérivées successives.

Etude d'un robot marcheur

1) Figures de changement de repère



2) Vecteurs rotation

$\vec{\Omega}_{S1/R} = \dot{\theta}\,\vec{z}$

$\vec{\Omega}_{S2/R} = \dot{\alpha}\,\vec{z}$

$\vec{\Omega}_{S3/R} = \dot{\varphi}\,\vec{z}$

$\vec{\Omega}_{S3/S2} = \vec{\Omega}_{S3/R} - \vec{\Omega}_{S2/R} = (\dot{\varphi} - \dot{\alpha})\,\vec{z}$

$\vec{\Omega}_{S2/S1} = \vec{\Omega}_{S2/R} - \vec{\Omega}_{S1/R} = (\dot{\alpha} - \dot{\theta})\,\vec{z}$

3) $\vec{V}_{A1/R} = \vec{\Omega}_{1/R} \wedge \vec{OA} = \dot{\theta}\,\vec{z} \wedge r\,\vec{x}_1 = r\dot{\theta}\,\vec{y}_1$

4) $\vec{V}_{B3/R} = \vec{\Omega}_{3/R} \wedge \vec{O_1B} = \dot{\varphi}\,\vec{z} \wedge b\,\vec{x}_3 = b\dot{\varphi}\,\vec{y}_3$

5) $\vec{V}_{B2/R} = \vec{V}_{A2/0} + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{AB} = \vec{V}_{A1/0} + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{AB}$

$\vec{V}_{B2/R} = r\dot{\theta}\,\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\,\vec{z} \wedge a\,\vec{x}_2$

$\vec{V}_{B2/R} = r\dot{\theta}\,\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\,a\,\vec{y}_2$

6) $\vec{V}_{B2/R} = \vec{V}_{B3/R}$ car B est le centre de l'articulation 2/3 et $\vec{V}_{B2/3} = \vec{0}$

6) (suite)

$$\vec{y_1} = -\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y}$$

$$\vec{y_2} = \cos\alpha\,\vec{y} - \sin\alpha\,\vec{x}$$

$$\vec{y_3} = \cos\varphi\,\vec{x} + \sin\varphi\,\vec{y}$$

$$r\dot\theta\,\vec{y_1} + \dot\alpha a\,\vec{y_2} = b\dot\varphi\,\vec{y_3} \quad \left(\text{car } \overrightarrow{V_{B2/R}} = \overrightarrow{V_{B3/R}}\right)$$

$$r\dot\theta(-\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y}) + \dot\alpha a(\cos\alpha\,\vec{y} - \sin\alpha\,\vec{x})$$

$$= b\dot\varphi(\cos\varphi\,\vec{x} + \sin\varphi\,\vec{y})$$

$$\Rightarrow -r\dot\theta\sin\theta - a\dot\alpha\sin\alpha = b\dot\varphi\cos\varphi$$

$$r\dot\theta\cos\theta + a\dot\alpha\cos\alpha = b\dot\varphi\sin\varphi$$

$$r\dot\theta(-\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) = b\dot\varphi(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha)$$

$$r\dot\theta\sin(\alpha-\theta) = b\dot\varphi\cos(\varphi-\alpha)$$

$$\boxed{\frac{\dot\theta}{\dot\varphi} = \frac{b\cos(\varphi-\alpha)}{r\sin(\alpha-\theta)}}$$

7) $$\overrightarrow{V_{P3/R}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_1P}) = \frac{d}{dt}(-c\,\vec{x_3}) = -c\left(\frac{d\vec{x_3}}{dt}\right) = -c\dot\varphi\,\vec{y_3}$$

$$\overrightarrow{V_{P3/R}} = \overrightarrow{V_{B3/R}} + \overrightarrow{\Omega_{3/R}} \wedge \overrightarrow{BP} = b\dot\varphi\,\vec{y_3} + \dot\varphi\,\vec{z} \wedge (-b-c)\,\vec{x_3}$$

$$\overrightarrow{V_{P3/R}} = -c\dot\varphi\,\vec{y_3}$$

8) $$\overrightarrow{\Gamma_{P3/R}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_{P3/R}}) = -c(\ddot\varphi\,\vec{y_3} - \dot\varphi^2\,\vec{x_3})$$

9) a) Volume et masse du solide

$$V = h^2 l - \left(\frac{2\pi D^2 h}{4}\right) = h^2 l - \frac{\pi D^2 h}{2}$$

$$M = \rho\left[h^2 l - \frac{\pi D^2 h}{2}\right]$$

b) G est sur l'axe x_3

$$x_G = \frac{\left(e+b-\frac{l}{2}\right)\left[h^2 l\right] - b\pi\frac{D^2 h}{4}}{h^2 l - \frac{\pi D^2 h}{2}} = \frac{\left(e+b-\frac{l}{2}\right)hl - b\pi\frac{D^2}{4}}{hl - \frac{\pi D^2}{2}}$$

c) Matrice d'inertie du parallélépipède en son centre d'inertie

$$I(G_P, P) = m_P \begin{bmatrix} A_P & & \\ & B_P & \\ & & C_P \end{bmatrix}_{R_3} = m_P \begin{bmatrix} \frac{2h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2+l^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2+l^2}{12} \end{bmatrix}_{R_3}$$

Matrice d'inertie des cylindres en leur centre d'inertie

$$I(G_C, C) = m_C \begin{bmatrix} A_C & & \\ & B_C & \\ & & C_C \end{bmatrix}_{R_3} = m_C \begin{bmatrix} \frac{D^2}{16}+\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D^2}{16}+\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & D^2/8 \end{bmatrix}$$

Théorème d'Huyghens pour déplacer la matrice du parallélépipède de G_P en O_1 $\overrightarrow{O_1G_3} = d_3 \cdot \overrightarrow{x_3}$

$$I(O_1, P) = I(G_P, P) + m_P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^2 \end{bmatrix}$$

$$I(O_1, P) = m_P \begin{bmatrix} \frac{2h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2+l^2}{12}+d_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2+l^2}{12}+d_3^2 \end{bmatrix}$$

9) Suite

pour le cylindre en B

$$I_{O_1,C} = I_{(B,C)} + m_C \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

Matrice d'inertie de la pièce complète (S)

$$I_{(O_1,S)} = I_{(O_1,P)} - I_{(O_1,C_{O_1})} - I_{(O_1,C_B)}$$

$$= m_P \begin{bmatrix} \frac{2h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2+e^2}{12}+d_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2+e^2}{12}+d_3^2 \end{bmatrix} - m_C \begin{bmatrix} \frac{D^2}{8}+\frac{h^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D^2}{8}+\frac{h^2}{6}+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D^2}{4}+b^2 \end{bmatrix}$$

10) $\vec{\sigma}_{O_1 S_3/R} = [I(O_1,S)] \cdot \vec{\Omega}_{S_3/R} + \underbrace{M_3 \vec{O_1 G_3} \wedge \vec{V}_{O_1/R}}_{0}$

$\vec{\Omega}_{S_3/R} = \dot{\varphi} \vec{z}$ $\qquad \vec{\sigma}_{O_1 S_3/R} = C_3 \dot{\varphi} \vec{z}$

$\vec{\sigma}_{G_2 S_2/R} = I_{G_2 z} \vec{\Omega}_{S_2/R} = C_2 \dot{\alpha} \vec{z}$

$\vec{\sigma}_{O S_1/R} = I_{Oz} \vec{\Omega}_{S_1/R} = C_1 \dot{\theta} \vec{z}$

11) $\vec{\delta}_{O S_1/R} = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_{O S_1/R}) = C_1 \ddot{\theta} \vec{z}$

$\vec{\delta}_{G_2 S_2/R} = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_{G_2 S_2/R}) = C_2 \ddot{\alpha} \vec{z}$

$\vec{\delta}_{O S_2/R} = \vec{\delta}_{G_2 S_2/R} + m_2 \vec{\Gamma}_{G_2 S_2/R} \wedge \vec{G_2 O}$

11) (suite)

calcul de $\overrightarrow{\Gamma}_{G_2 S_2/R}$

$\vec{y_1} \wedge \vec{x_2} = \sin(\alpha - \theta - \pi/2)\vec{z}$

$\vec{y_1} \wedge \vec{x_2} = -\cos(\alpha - \theta)\vec{z}$

$\vec{x_1} \wedge \vec{x_2} = \sin(\alpha - \theta)\vec{z}$

$$\vec{V}_{G_2 S_2/R} = \vec{V}_{A S_2/R} + \vec{\Omega}_{S_2/R} \wedge \overrightarrow{AG_2}$$

$$= r\dot{\theta}\vec{y_1} + \dot{\alpha}\vec{z} \wedge \frac{a}{2}\vec{x_2}$$

$$\vec{V}_{G_2 S_2/R} = r\dot{\theta}\vec{y_1} + \frac{a}{2}\dot{\alpha}\vec{y_2}$$

$$\overrightarrow{\Gamma}_{G_2 S_2/R} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_{G_2 S_2/R}}\right) = r\ddot{\theta}\vec{y_1} - r\dot{\theta}^2\vec{x_1} + \frac{a}{2}\ddot{\alpha}\vec{y_2} - \frac{a}{2}\dot{\alpha}^2\vec{x_2}$$

$$m_2\overrightarrow{\Gamma}_{G_2 S_2/R} \wedge \overrightarrow{G_2O} = m_2\left(r\ddot{\theta}\vec{y_1} - r\dot{\theta}^2\vec{x_1} + \frac{a}{2}\ddot{\alpha}\vec{y_2} - \frac{a}{2}\dot{\alpha}^2\vec{x_2}\right) \wedge (-a\vec{x_2})$$

$$m_2\overrightarrow{\Gamma}_{G_2 S_2/R} \wedge \overrightarrow{G_2O} = a m_2\left(-r\ddot{\theta}\cos(\alpha-\theta) - r\dot{\theta}^2\sin(\alpha-\theta) + \frac{a}{2}\ddot{\alpha}\right)\vec{z}$$

$$\vec{\delta}_{O S_2/R} = C_2\ddot{\alpha}\vec{z} + m_2 . a\left[-r\ddot{\theta}\cos(\alpha-\theta) - r\dot{\theta}^2\sin(\alpha-\theta) + \frac{a}{2}\ddot{\alpha}\right]\vec{z}$$

$$\vec{\delta}_{O S_3/R} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{O_1 S_3/R}\right) + m_3\overrightarrow{\Gamma}_{G_3 S_3/R} \wedge \overrightarrow{O_1O}$$

calcul de $\overrightarrow{\Gamma}_{G_3 S_3/R}$ avec $\overrightarrow{O_1G_3} = d_3\vec{x_3}$

$$\vec{V}_{G_3 S_3/R} = d_3\dot{\varphi}\vec{y_3} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Gamma}_{G_3 S_3/R} = d_3\left(\ddot{\varphi}\vec{y_3} - \dot{\varphi}^2\vec{x_3}\right)$$

$$\vec{\delta}_{O S_3/R} = C_3\ddot{\varphi}\vec{z} + m_3 d_3\left(\ddot{\varphi}\vec{y_3} - \dot{\varphi}^2\vec{x_3}\right) \wedge (-d\vec{x})$$

$$\vec{\delta}_{O S_3/R} = C_3\ddot{\varphi}\vec{z} + m_3 d_3\left(-\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\vec{z}$$

12) $\{\mathcal{T}_{moteur \to S_1}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m \vec{z} \end{matrix} \right\}_O$ $\qquad \vec{x}_3 \wedge \vec{y} = -\sin(\pi/2 - \varphi)$

$\vec{x}_3 \wedge \vec{y} = -\cos\varphi$

$\{\mathcal{T}_{sol \to S_3}\} = \left\{ \begin{matrix} R\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_P = \left\{ \begin{matrix} R\vec{y} \\ \vec{OP} \wedge R\vec{y} = (-d\vec{x} - c\vec{x}_3) \wedge R\vec{y} \end{matrix} \right\}_O$

$\{\mathcal{T}_{sol \to S_3}\} = \left\{ \begin{matrix} R\vec{y} \\ -R(d + c\cos\varphi)\vec{z} \end{matrix} \right\}_O$

On isole l'ensemble {1+2+3}

Il est soumis - à l'action du moteur $\{\mathcal{T}_{moteur \to S_1}\}$

- à l'action du sol $\{\mathcal{T}_{sol \to S_3}\}$

On applique le PFD à {1+2+3} en O

$\vec{\delta}_{O(S_1+S_2+S_3)/R} = C_m\vec{z} - R(d + c.\cos\varphi)\vec{z}$

ce qui donne l'équation en projection sur Oz :

$$\boxed{\begin{aligned} &C_1\ddot{\theta} + C_2\ddot{\alpha} + m_2 a\left[-r\ddot{\theta}\cos(\alpha-\theta) - r\dot{\theta}^2\sin(\alpha-\theta) + \frac{a}{2}\ddot{\alpha}\right] \\ &+ C_3\ddot{\varphi} + m_3 d_3(-\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = C_m - R(d + c\cos\varphi) \end{aligned}}$$