Contrôle mécanique du solide

1 - Système à leviers

Dans le système bielle-manivelle ci-contre, l'extrémité d'une tige (OA) de longueur (R) a un mouvement circulaire uniforme avec la **vitesse angulaire (ω) constante**.

Elle entraîne :

- une bielle (AB) de longueur $L_1 > R$
- une bielle (CB) de longueur $L_2 > R$

à t = 0, $\Theta = 0$.

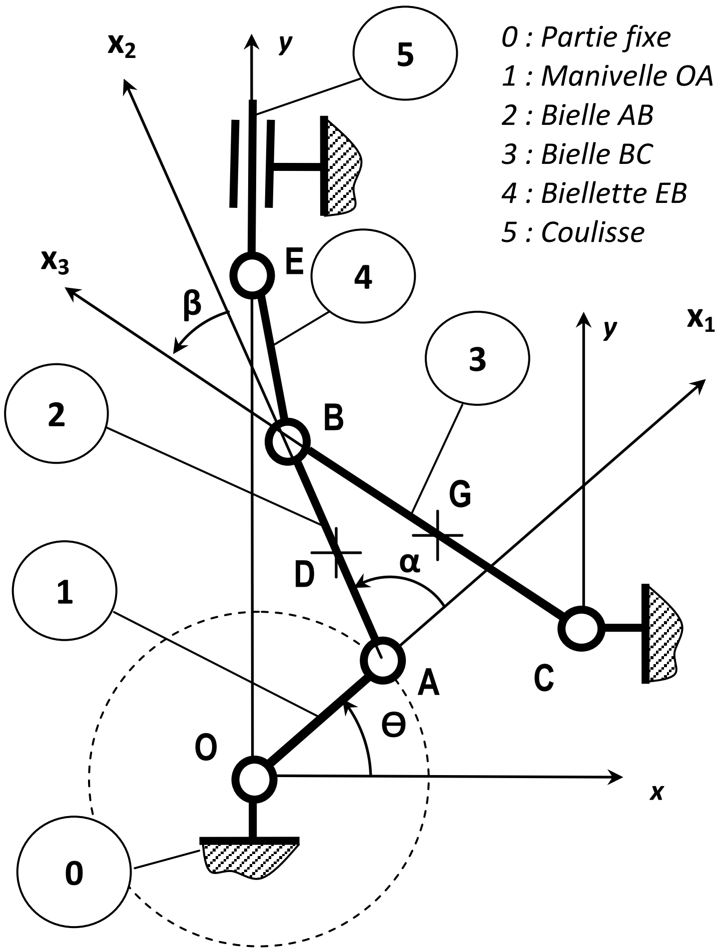
Le point D est le milieu de [AB] .

Le point G est le milieu de [BC]

On pose :

$$\overrightarrow{OC} = a.\vec{x} + b.\vec{y}$$

$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère lié à la partie fixe
$(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ repère lié à (1)
$(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ repère lié à (2)
$(\vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$ repère lié à (3)



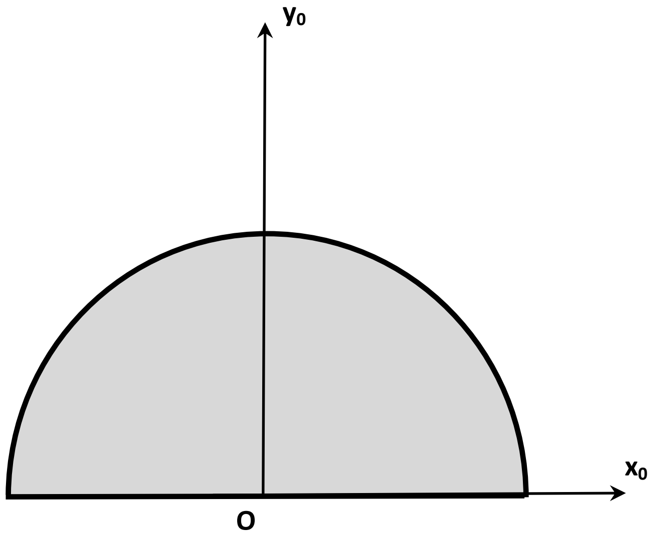
1) Représenter les figures de changement de repère faisant apparaitre les angles Θ, α et β
2) Quelle est l'équation horaire angulaire ($\Theta = f(t)$)?
3) Déterminer les vitesse de rotation $\vec{\Omega}\,(1/0)$, $\vec{\Omega}\,(2/0)$, $\vec{\Omega}\,(3/0)$ en fonction de Θ, β, α et de leurs dérivées
4) Déterminer le vecteur vitesse du point A, $\overrightarrow{V_{A/R}}$ en fonction de Θ, R et de ses dérivées.
5) Déterminer le vecteur vitesse du point B (par changement de point), $\overrightarrow{V_{B\,2/R}}$ en fonction de Θ, α, R et L_1 et de leurs dérivées.
(exprimer le vecteur dans le repère $\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2}$)
6) Déterminer le vecteur vitesse du point B (par dérivation), $\overrightarrow{V_{B\,3/R}}$ en fonction de Θ, α, β et L_2 et de leurs dérivées.
(exprimer le vecteur dans le repère $\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2}$)
7) En déduire deux relations entre Θ, α, β, R, L_1 et L_2
8) Ecrire les torseurs cinématiques suivants :
- Torseur cinématique du mouvement de 1 par rapport à R exprimé en A
- Torseur cinématique du mouvement de 2 par rapport à R exprimé en A puis en B
- Torseur cinématique du mouvement de 3 par rapport à R exprimé en C puis en B

Rappel : ***Le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{2/1)}\}$ du mouvement d'un solide 2 par rapport à un solide 1 exprimé au point A sera noté :***

$$\{\mathcal{V}_{(2\to 1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{2/1}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{V}_{A2/1}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{2/1}} = \omega_{x21}.\vec{x} + \omega_{y21}.\vec{y} + \omega_{z21}.\vec{z} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{V}_{A2/1}} = v_{Ax21}.\vec{x} + v_{Ay21}.\vec{y} + v_{Az21}.\vec{z} \end{Bmatrix}$$

9) Déterminer $\overrightarrow{\Gamma_{B\,2/R}}$, l'accélération du point B en fonction de Θ, R et L_1 et de ses dérivées.
10) Déterminer $\overrightarrow{\Gamma_{B\,3/R}}$, l'accélération du point B en fonction de β et L_2 et de ses dérivées.

2 - Demi-disque



Soit une plaque (P) en forme de demi-disque de rayon (a) et d'épaisseur négligeable devant le rayon (a)

On note µ la masse surfacique du matériau constituant la plaque (P)

Le référentiel R_0 est galiléen et est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$

1) Déterminer la masse M de la plaque (P) en fonction de µ et a

2) Déterminer la position du centre de gravité de la plaque (P) en fonction de a

3) Donnez la forme générale de la matrice d'inertie dans $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ en précisant :

- *les moments et les produits d'inertie qui sont nuls*

- *les moments et les produits d'inertie qui sont égaux*

4) Calculer les moments d'inertie Iox, Ioy et Ioz du demi-disque

(on utilisera les coordonnées polaires)

5) Calculer les produits d'inertie Ixy, Iyz et Ixz du demi-disque

(on utilisera les coordonnées polaires)

6) Ecrire la matrice d'inertie en G