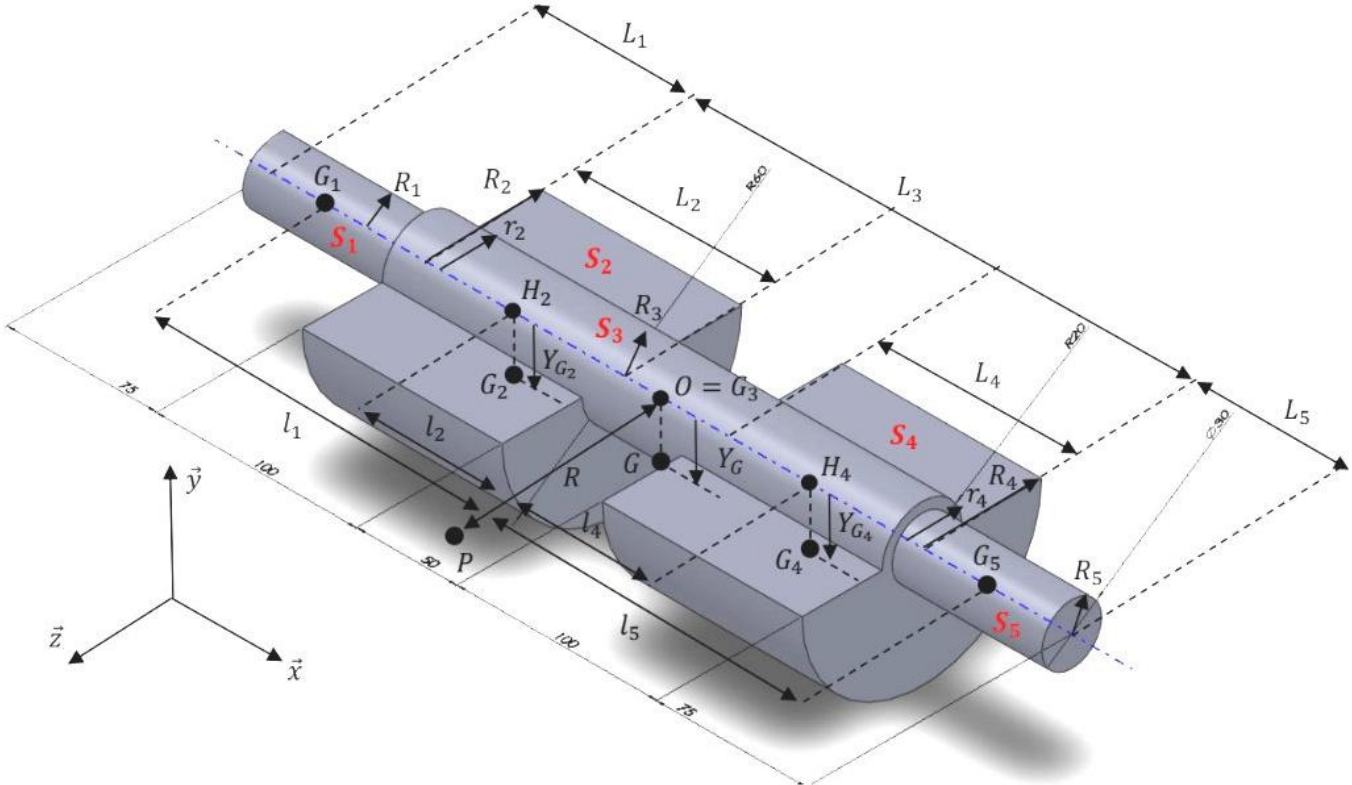
Contrôle mécanique du solide
Arbre vibrant

On s'intéresse aux caractéristiques cinétiques d'un arbre vibrant (1) représenté ci-après



On appelle G le centre de gravité de l'arbre 1 et on définit :

$\overrightarrow{OG} = Y_G.\overrightarrow{y_1}$ **; ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) repère lié à la partie fixe ; ($\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$) repère lié à (1)**

A tout instant, $\vec{x} = \overrightarrow{x_1}$.

On définit l'angle θ tel que $\theta=(\vec{y},\overrightarrow{y_1}) =(\vec{z},\overrightarrow{z_1})$ et on appelle $\omega=\theta$ la vitesse de rotation de l'arbre 1.

L'arbre est en acier de masse volumique $\rho=7850\ Kg/m^3$

L'accélération de la pesanteur vaut : $g=9.81\ m/s^2$.

On note M la masse d'un arbre

On découpe l'arbre en 5 solides tels que : ($d_i=2r_i$ et $D_i=2R_i$)

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Cylindre	Demi-cylindre	Cylindre	Demi-cylindre	Cylindre
$D_1 = 30\ mm$ $L_1 = 75\ mm$	$D_2 = 120\ mm$ $d_2 = 40\ mm$ $L_2 = 100\ mm$	$D_3 = 40\ mm$ $L_3 = 250\ mm$	$D_4 = 120\ mm$ $d_4 = 40\ mm$ $L_4 = 100\ mm$	$D_5 = 30\ mm$ $L_5 = 75\ mm$
$\overrightarrow{OG_1} = \begin{bmatrix} -l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$ $l_1 = 162.5\ mm$	$\overrightarrow{OG_2} = \begin{bmatrix} -l_2 \\ Y_{G2} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$ $l_2 = 75\ mm$	$\overrightarrow{OG_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$	$\overrightarrow{OG_4} = \begin{bmatrix} l_4 \\ Y_{G4} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$ $l_4 = 75\ mm$	$\overrightarrow{OG_5} = \begin{bmatrix} l_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$ $l_5 = 162.5\ mm$

On appelle

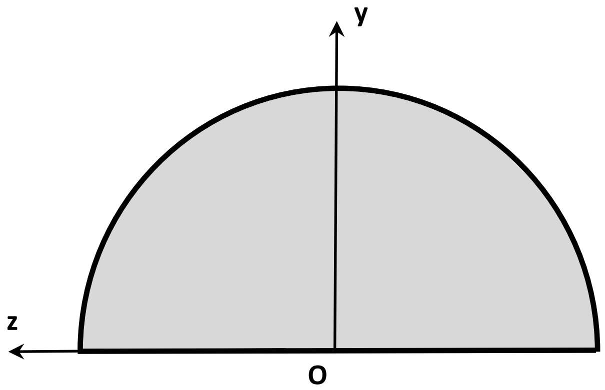
- H_i les projections H_2 et H_4 des centres de gravité des parties S_2 et S_4 sur l'axe $(O,\vec{x})$
- R_i et r_i les rayons associés aux diamètres D_i et d_i
- Mi la masse du Si

I - Centre de gravité

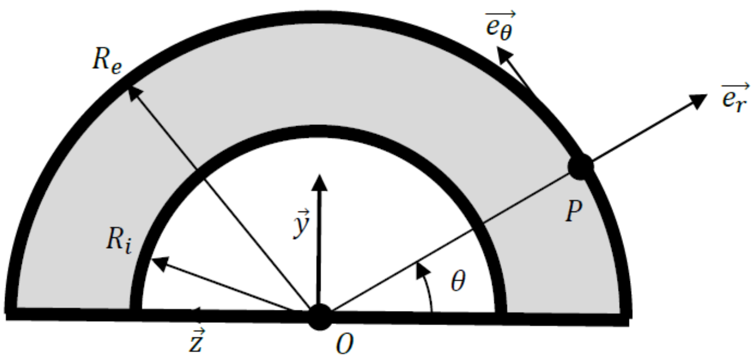
On considère la forme en demi-disque de rayon (R) tel que ci-contre

1) Déterminer l'ordonnée $\boldsymbol{Y}$ du centre de gravité de cette surface

Vérifiez que vous trouvez : $Y = \frac{4R}{3\pi}$



On considère la surface comprise entre les demi-disques de rayons Ri et Re



2) En exploitant le résultat d'un demi-disque plein, retrouvez $\boldsymbol{Y}$ en exploitant 2 demi-disques
3) En déduire la valeur numérique de la coordonnée $\boldsymbol{Y}$ des centres de gravité des volumes $\boldsymbol{S_2}$ et $\boldsymbol{S_4}$
4) Déterminer les masses $\boldsymbol{M_i}$ et ordonnées $\boldsymbol{Y_{Gi}}$ des solides $\boldsymbol{S_i}$, puis la masse totale $\boldsymbol{M}$ de l'arbre $\mathbf{1}$

Volume 1	Volume 2	Volume 3	Volume 4	Volume 5
Cylindre	Demi-cylindre	Cylindre	Demi-cylindre	Cylindre
$D_1 = 30\ mm$ $L_1 = 75\ mm$	$D_2 = 120\ mm$ $d_2 = 40\ mm$ $L_2 = 100\ mm$	$D_3 = 40\ mm$ $L_3 = 250\ mm$	$D_4 = 120\ mm$ $d_4 = 40\ mm$ $L_4 = 100\ mm$	$D_5 = 30\ mm$ $L_5 = 75\ mm$
$Y_{G_1} =$	$Y_{G_2} =$	$Y_{G_3} =$	$Y_{G_4} =$	$Y_{G_5} =$
$M_1 =$	$M_2 =$	$M_3 =$	$M_4 =$	$M_5 =$
$M =$				

5) En déduire la position $\boldsymbol{G}$ du centre d'inertie de l'arbre 1 dans $\mathfrak{B}\mathbf{1}$

II – Matrice d'inertie

6) Proposer la forme (en la justifiant) de la matrice d'inertie de l'arbre 1 en O dans la base $\boldsymbol{B_1}$

La matrice d'inertie $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{Gi},\boldsymbol{Si})$ en son centre $\boldsymbol{Gi}$ d'un cylindre plein $\boldsymbol{Si}$ de rayon $\boldsymbol{Ri}$, de longueur $\boldsymbol{Li}$ et de masse $\boldsymbol{Mi}$, d'axe $(\boldsymbol{Gi}, \overrightarrow{z_i})$ dans la base $\boldsymbol{Bi}$ est :

La matrice d'inertie en Gi de S_i :

$$I_{Gi}\,(S_i) = \begin{bmatrix} Mi(\frac{Ri^2}{4}+\frac{Li^2}{12}) & 0 & 0 \\ 0 & Mi(\frac{Ri^2}{4}+\frac{Li^2}{12}) & 0 \\ 0 & 0 & Mi\frac{Ri^2}{2} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{y_i},\overrightarrow{z_i})}$$

7) En déduire la matrice d'inertie $\boldsymbol{I_{Gi}}\,(\boldsymbol{Si})$ en son centre $\boldsymbol{Gi}$ d'un cylindre plein $\boldsymbol{Si}$ de rayon $\boldsymbol{Ri}$, de longueur $\boldsymbol{Li}$ et de masse $\boldsymbol{Mi}$, d'axe $(\boldsymbol{Gi}, \overrightarrow{\boldsymbol{x_i}})$ dans la base $\boldsymbol{Bi}$

Sachant que les matrices d'inertie des cylindres S_1, S_3 et S_5 sont telles que :

$$I_{G_1}\,(S_1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})} ;\ I_{G_3}\,(S_3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})} ;\ I_{G_5}\,(S_5) = \begin{bmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$$

Et que le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{OG_i}}$ est tel que :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OG_i}} = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})} \quad \text{donc} \quad I_O\,(S_i) = I_{G_i}\,(S_i) + M_i \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & -a_i.b_i & -a_i.c_i \\ -a_i.b_i & a_i^2 + c_i^2 & b_i.c_i \\ -a_i.c_i & -b_i.c_i & a_i^2 + b_i^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$$

<u>Rappel :</u> $\overrightarrow{\boldsymbol{OG_1}} = -\mathbf{l_1}.\overrightarrow{\boldsymbol{x_1}}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{OG_3}} = \vec{\mathbf{0}}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{OG_5}} = \mathbf{l_5}.\overrightarrow{\boldsymbol{x_1}}$ avec $l_1 = l_5$

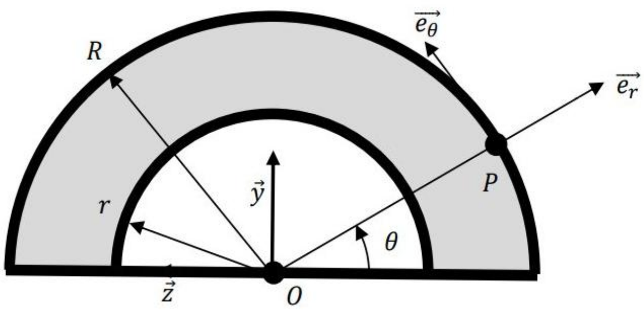
8) En déduire la matrice $\boldsymbol{I}_0(\boldsymbol{S_1}+\boldsymbol{S_3}+\boldsymbol{S_5})$ des parties $\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{S_3}$ et $\boldsymbol{S_5}$ de l'arbre 1 en O dans la base $\boldsymbol{B_1}$

9) Justifier le fait que nous allons préférer calculer la matrice des deux cylindres creux en leurs points $\boldsymbol{H_i}$ plutôt qu'en leurs points $\boldsymbol{G_i}$

10) Déterminer la matrice d'inertie $\boldsymbol{I}_{\mathrm{Hi}}(\boldsymbol{Si})$ en $\boldsymbol{Hi}$ d'un demi-cylindre creux dans le demi plan $\boldsymbol{y}>\boldsymbol{0}$, de rayon intérieur $\boldsymbol{r_i}$, de rayon extérieur $\boldsymbol{R_i}$ et de longueur $\boldsymbol{L_i}$, d'axe $(\boldsymbol{H_i}, \vec{x})$ dans la base $\boldsymbol{B_i}$ *(voir figure ci-contre)*

<u>Remarque :</u> Le solide étant un solide de « demi » révolution, sa matrice d'inertie se simplifie de la manière suivante

$$\mathrm{I_{H_i}}\,(\mathrm{S_i}) = \begin{bmatrix} \mathrm{A_i} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B_i} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{B_i} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})} \quad \text{avec } \mathrm{B_i} = \frac{\mathrm{A_i}}{2} + \int x^2.\mathrm{dm}$$



11) En déduire la matrice d'inertie de chaque cylindre creux 2 et 4 aux points $\boldsymbol{H_i}$ dans la base $\boldsymbol{B_1}$ Justifier le fait que $\boldsymbol{y}<\boldsymbol{0}$ ne change pas le résultat précédent

Sachant que l'on a :

$$I_{H_2}(S_2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})} \quad \text{et} \quad I_{H_4}(S_4) = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H_iG_i}} = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})} \quad \text{donc} \quad I_{H_i}(S_i) = I_{G_i}(S_i) + M_i \begin{bmatrix} \beta_i^2 + \gamma_i^2 & -\alpha_i.\beta_i & -\alpha_i.\gamma_i \\ -\alpha_i.\beta_i & \alpha_i^2 + \gamma_i^2 & -\beta_i.\gamma_i \\ -\alpha_i.\gamma_i & -\beta_i.\gamma_i & \alpha_i^2 + \beta_i^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OG_i}} = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})} \quad \text{donc} \quad I_O(S_i) = I_{G_i}(S_i) + M_i \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & -a_i.b_i & -a_i.c_i \\ -a_i.b_i & a_i^2 + c_i^2 & b_i.c_i \\ -a_i.c_i & -b_i.c_i & a_i^2 + b_i^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$$

12) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{H_2G_2}}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{H_4G_4}}$ en fonction de y_{G2} et y_{G4} , en déduire $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{OG_2}}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{OG_4}}$ en fonction de l_2 et l_4 , en déduire $a_2, b_2, b_2, a_4, b_4, c_4$
Démontrer que la matrice d'inertie $\boldsymbol{I}_O(\boldsymbol{S_2}+\boldsymbol{S_4})$ des cylindres creux 2 et 4 au point $\boldsymbol{O}$ dans la base $\boldsymbol{B_1}$ est :

$$I_O(S_2 + S_4) = \begin{bmatrix} 2A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2B_2 + 2M_2 l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2B_2 + 2M_2 l_2^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$$

13) En déduire la matrice $\boldsymbol{I}_O(\boldsymbol{1})$ en O de l'arbre 1 dans la base $\boldsymbol{B_1}$.

14) En déduire la matrice $\boldsymbol{I}_G(\boldsymbol{1})$ en G de l'arbre 1 dans $\boldsymbol{B_1}$.

Pour la suite, on donne : $Y_G = -19{,}46\ mm$; $M = 11.19\ Kg$

$$I_G(1) = \begin{bmatrix} 1{,}21.10^{-2}\ kg.m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}44.10^{-2}\ kg.m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 9{,}01.10^{-2}\ kg.m^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$$

III – Torseur dynamique

Dans cette partie, on appelle G le centre de gravité de l'arbre 1 complet.

15) Déterminer la vitesse et l'accélération du centre de gravité G puis en déduire l'expression de la résultante dynamique $\overrightarrow{\boldsymbol{R_{d\ 0\to 1}}}$ dans la base $\boldsymbol{B_1}$ $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$

16) Déterminer le moment cinétique de l'arbre 1 en G $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G(1/R_0)}}$ dans la base $\boldsymbol{B_1}$.

17) Déterminer le moment dynamique de l'arbre 1 en G $\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{G(1/R)}}$ dans la base $\boldsymbol{B_1}$.

18) Déterminer le torseur dynamique de l'arbre 1 en G $\{\boldsymbol{\mathcal{D}}_{(\boldsymbol{1/R})}\}$ dans la base $\boldsymbol{B_1}$.