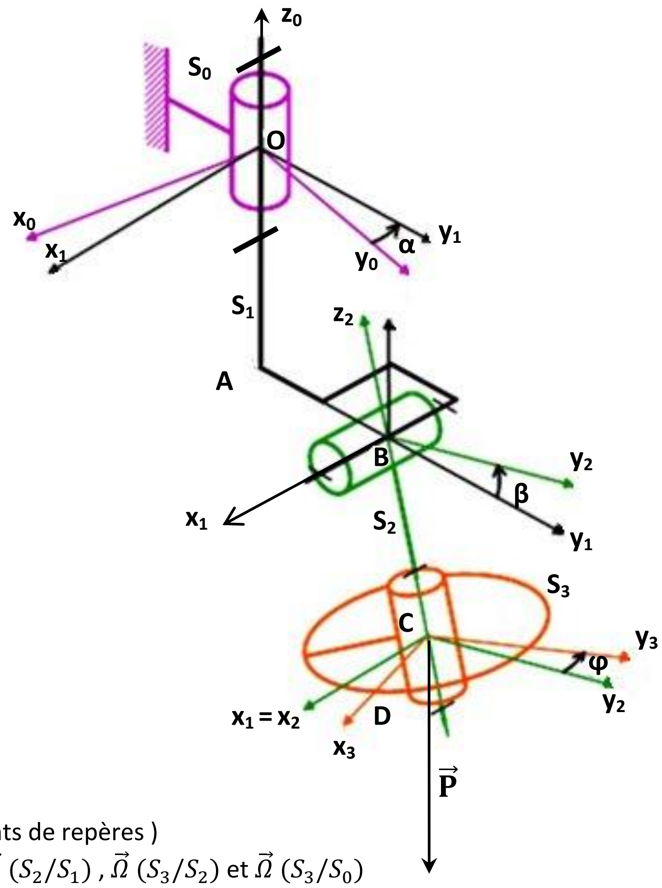
Contrôle de mécanique du solide

Manège



Soit la nacelle de manège ci-contre
Elle est composée des éléments suivants :
- l'ensemble (0) est fixe, c'est le bâti lié au repère R_0 (O, $\vec{x_0}$, $\vec{y_0}$, $\vec{z_0}$)
- l'ensemble (1) lié au repère R_1 (O, $\vec{x_1}$, $\vec{y_1}$, $\vec{z_1}$) est en liaison pivot d'axe O $\vec{z_0}$ par rapport au bâti (0) avec :
$\alpha = (\vec{x_0}, \vec{x_1})$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = -\boldsymbol{L}.\vec{\boldsymbol{z_0}}$
- l'ensemble (2) lié au repère R_2 (B, $\vec{x_2}$, $\vec{y_2}$, $\vec{z_2}$) est en liaison pivot d'axe B $\vec{x_1}$ par rapport à l'ensemble (1) avec :
$\beta = (\vec{y_1}, \vec{y_2})$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{b}.\vec{\boldsymbol{y_1}}$
- l'ensemble (3) lié au repère R_3 (C, $\vec{x_3}$, $\vec{y_3}$, $\vec{z_3}$) est en liaison pivot d'axe C $\vec{z_2}$ par rapport à l'ensemble (2) avec :
$\phi = (\vec{y_2}, \vec{y_3})$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = -\boldsymbol{c}.\vec{\boldsymbol{z_2}}$
- le point D est à la périphérie de (3) tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} = \boldsymbol{d}.\vec{\boldsymbol{x_3}}$

En C s'applique une charge (poids de la nacelle) telle que

$$\{\boldsymbol{T}_{g\to S_3}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{g\to S_3} \\ \vec{M}_{C\,g\to S_3} \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} -M.g.\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

Les masses des autres solides sont négligées

1) Représenter les figures des rotations planes (changements de repères)
2) Déterminer les vecteurs vitesse de rotation $\vec{\Omega}\,(S_1/S_0)$, $\vec{\Omega}\,(S_2/S_1)$, $\vec{\Omega}\,(S_3/S_2)$ et $\vec{\Omega}\,(S_3/S_0)$
3) Déterminer le vecteur vitesse du point B $\overrightarrow{V_{B/R}}$ en fonction de α et de ses dérivées.
4) Déterminer le vecteur vitesse du point C $\overrightarrow{V_{C/R}}$ en fonction de α , β et de leurs dérivées.
5) Déterminer le vecteur accélération du point B $\overrightarrow{\Gamma_{B/R}}$ en fonction de α et de ses dérivées.
6) Déterminer le vecteur accélération du point C $\overrightarrow{\Gamma_{C/R}}$ en fonction de α , β et de leurs dérivées

La matrice d'inertie en C de S_3 : $I_C\,(S_3) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})}$

7) Justifiez la forme de cette matrice d'inertie
   Déterminez le moment cinétique en O $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}(S_3/R_0)}$ du solide S_3 dans son mouvement par rapport à R_0
   On exprimera ses composantes dans le repère $(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$
8) Déterminez le moment dynamique en O $\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}(S_3/R_0)}$ du solide S_3 dans son mouvement par rapport à R_0
   On exprimera ses composantes dans le repère $(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$
9) Déterminer la forme du **torseur transmissible de S_1 sur S_0** au point O.

Le torseur $\{\tau_{(2\to1)}\}$ associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 sera noté :

$$\{\boldsymbol{T}_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{2\to1} \\ \vec{M}_{A\,2\to1} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_{21}.\vec{x} + Y_{21}.\vec{y} + Z_{21}.\vec{z} \\ L_{21}.\vec{x} + M_{21}.\vec{y} + N_{21}.\vec{z} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_A$$

10) On veut déterminer les composantes de l'action de liaison en O
Quels solide ou ensemble de solides faut-il isoler ?
Appliquer le principe fondamental de la dynamique à ce (ou ces) solide(s) puis écrire les équations d'équilibre en projections sur le repère R_2(O, $\vec{x_2}$, $\vec{y_2}$, $\vec{z_2}$), **on ne demande pas de les résoudre.**