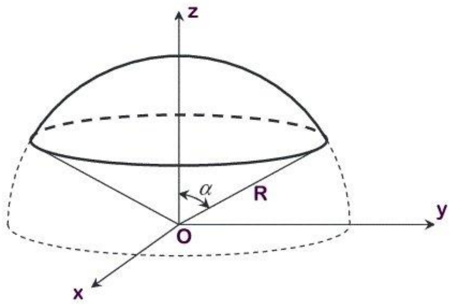
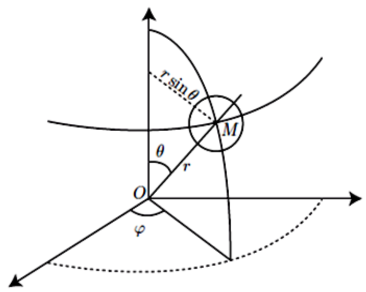
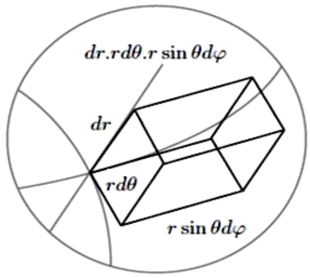
Contrôle mécanique du solide

1 - Calotte sphérique



Coordonnées sphériques





Pour la calotte sphérique représentée ci-dessus et définie le rayon extérieur R, l’épaisseur e et l’angle α
(*masse volumique du solide : ρ*)

1) Démontrer par calcul intégral que le volume est **V = 2.π** $\left[\frac{R^3}{3} - \frac{(R-e)^3}{3}\right]$**(1 – cosα)**
2) Déterminer la position du centre de masse G du solide en fonction de R et de α

   La matrice d'inertie du solide est de la forme :

$$\begin{bmatrix} Ix & 0 & 0 \\ 0 & Ix & 0 \\ 0 & 0 & Iz \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

3) Justifier la forme de la matrice d'inertie dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$
4) Déterminer le moment d'inertie Iz de S_1 par rapport à l'axe $(O,\vec{z})$ en fonction R, α et ρ
5) Déterminer le moment d'inertie I_{Oxy} du solide par rapport au plan $(O,\vec{x},\vec{y})$ en fonction de R, α et ρ
6) Déterminer l’expression de Ix à partir de Iz et de I_{Oxy}

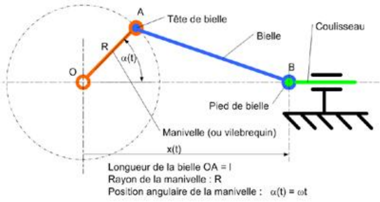
2 - Système bielle-vilebrequin

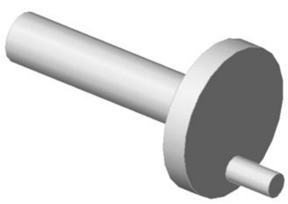
Le système bielle-vilebrequin ou bielle-manivelle est un système plan de solides articulés. Il permet de transformer, par l'intermédiaire d'une bielle, le mouvement de rotation continu d'une manivelle (également appelée vilebrequin) en mouvement de translation alternatif du coulisseau (à vitesse non constante).

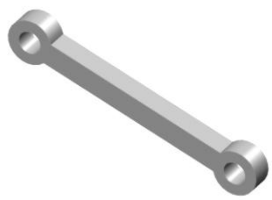
On qualifie respectivement pour une bielle de "tête" et de "pied" les parties de cette bielle en liaison avec la manivelle d'une part et avec le coulisseau (qui est souvent un piston) d'autre part.

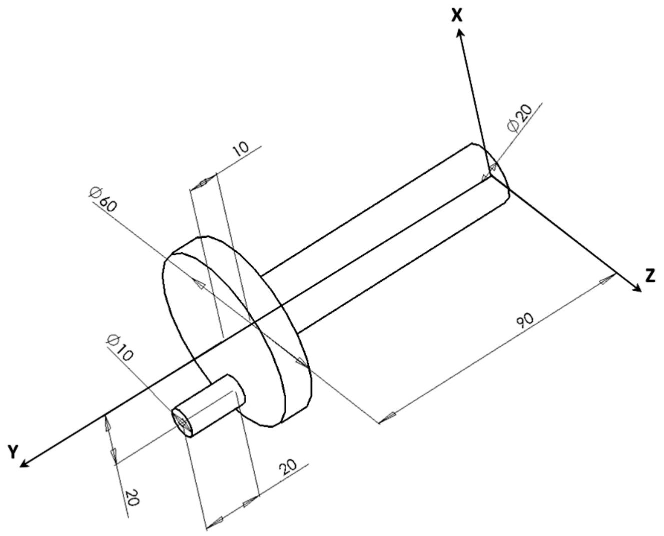
Parmi les nombreux mécanismes utilisant le principe cinématique de l'association bielle-manivelle, on trouve :

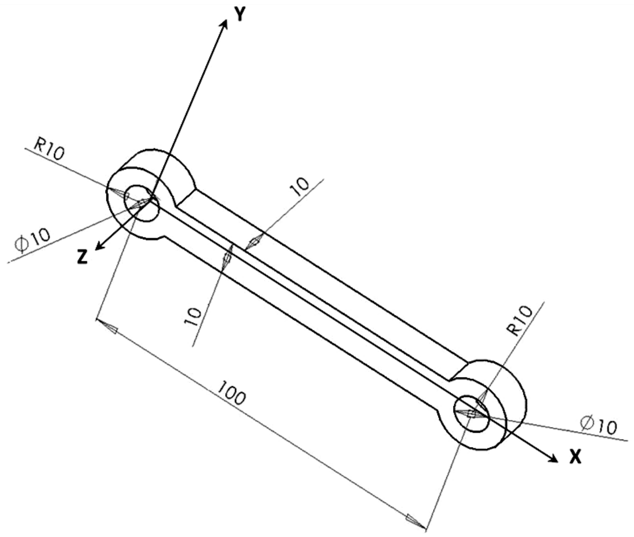
- les moteurs à combustion interne pour lesquels la translation du piston due à la combustion du carburant est transformée en rotation du vilebrequin,
- les compresseurs et les pompes au sein desquels le mouvement de rotation du moteur est transformé en mouvement de translation du ou des pistons qui vont comprimer le fluide.











Vilebrequin composé :
- *D'un cylindre diamètre d_1 = 20 mm et longueur L_1 = 90 mm*
- *D'un cylindre diamètre d_2 = 60 mm et longueur L_2 = 10 mm*
- *D'un cylindre diamètre d_3 = 10 mm et longueur L_3 = 20 mm*

Bielle composée :
- *De deux cylindres diamètre extérieur De = 20 mm et diamètre intérieur Di = 10 mm avec une longueur de e = 10 mm*
- *D'un pavé de dimensions : L = 80 mm, e = 10 mm, e = 10 mm*

Questions

1) Déterminer la position du centre de gravité de la bielle , on donnera ses trois coordonnées exprimées dans le repère (O, x, y, z) lié à la bielle.
Comparez les valeurs trouvées avec celles données par le logiciel de CAO (voir à la fin du sujet)

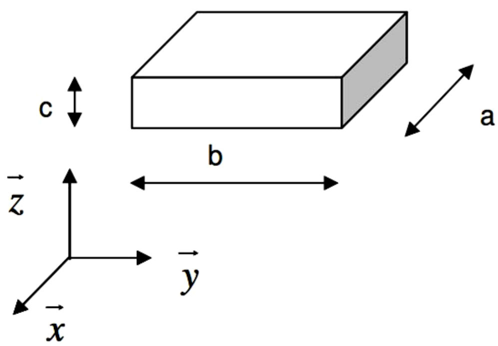
2) Déterminer la position du centre de gravité du vilebrequin , on donnera ses trois coordonnées exprimées dans le repère (O, x, y, z) lié au vilebrequin
Comparez les valeurs trouvées avec celles données par le logiciel de CAO ci-après (voir à la fin du sujet)

3) Donner , en la justifiant la forme de la matrice d'inertie de la bielle exprimée dans le repère (O, x, y, z) lié à la bielle
4) Donner , en la justifiant la forme de la matrice d'inertie du vilebrequin exprimée dans le repère (O, x, y, z) lié au vilebrequin

On donne les matrices d'inertie du pavé et du cylindre

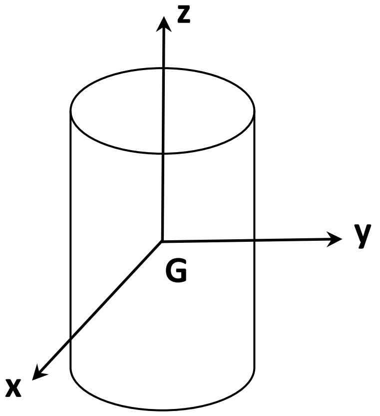
Pour le pavé de largeur a, longueur b et hauteur c, la matrice d'inertie exprimée en son centre de gravité est :

$$\mathbf{I_{G,S/R}} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



Pour le cylindre de rayon R et de longueur L, la matrice d'inertie exprimée en son centre de gravité est :

$$\mathbf{I}_{G,S/R} = \begin{bmatrix} \dfrac{m}{4}(R^2 + \dfrac{L^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m}{4}(R^2 + \dfrac{L^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m.R^2}{2} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



5) Préciser la démarche à suivre (en la détaillant) pour déterminer les éléments des matrices d'inertie de la bielle et du vilebrequin.