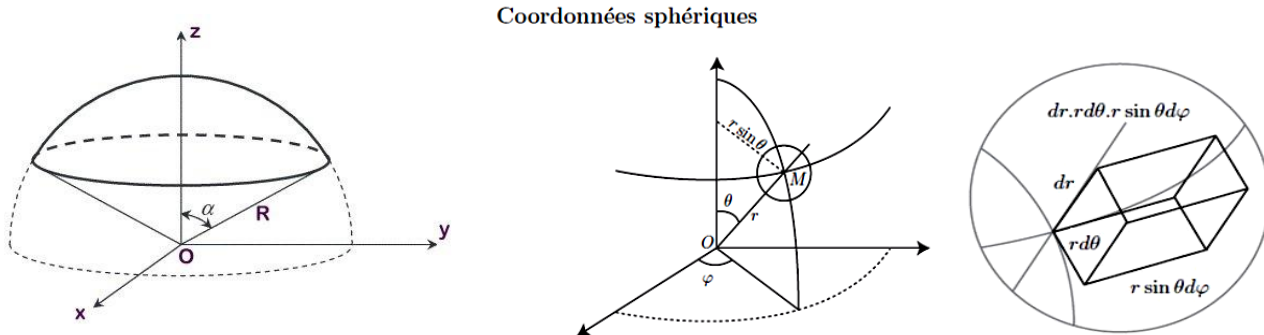


## Contrôle mécanique du solide

### 1 - Calotte sphérique



Pour la calotte sphérique représentée ci-dessus et définie le rayon extérieur  $R$ , l'épaisseur  $e$  et l'angle  $\alpha$  (masse volumique du solide :  $\rho$ )

- 1) Démontrer par calcul intégral que le volume est  $V = 2.\pi \left[ \frac{R^3}{3} - \frac{(R-e)^3}{3} \right] (1 - \cos\alpha)$
- 2) Déterminer la position du centre de masse  $G$  du solide en fonction de  $R$  et de  $\alpha$

La matrice d'inertie du solide est de la forme :

$$\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- 3) Justifier la forme de la matrice d'inertie dans le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
- 4) Déterminer le moment d'inertie  $I_z$  de  $S_1$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{z})$  en fonction  $R$ ,  $\alpha$  et  $\rho$
- 5) Déterminer le moment d'inertie  $I_{Oxy}$  du solide par rapport au plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  en fonction de  $R$ ,  $\alpha$  et  $\rho$
- 6) Déterminer l'expression de  $I_x$  à partir de  $I_z$  et de  $I_{Oxy}$

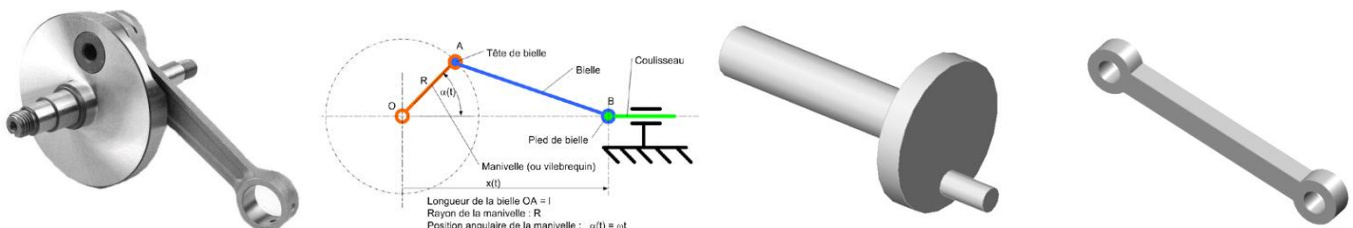
### 2 - Système bielle-vilebrequin

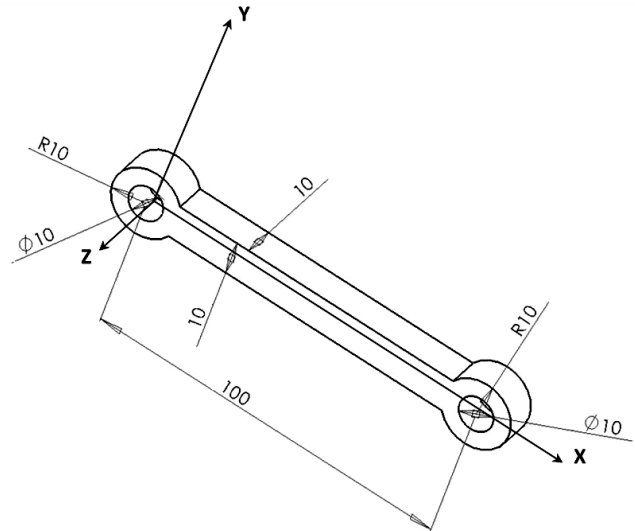
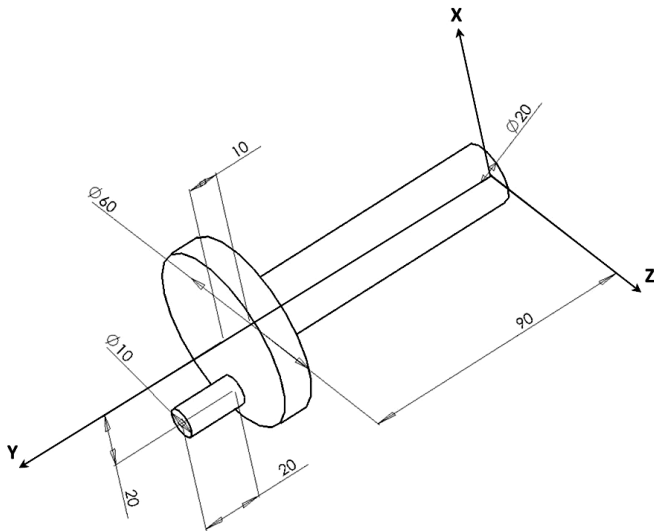
Le système bielle-vilebrequin ou bielle-manivelle est un système plan de solides articulés. Il permet de transformer, par l'intermédiaire d'une bielle, le mouvement de rotation continu d'une manivelle (également appelée vilebrequin) en mouvement de translation alternatif du coulisseau (à vitesse non constante).

On qualifie respectivement pour une bielle de "tête" et de "pied" les parties de cette bielle en liaison avec la manivelle d'une part et avec le coulisseau (qui est souvent un piston) d'autre part.

Parmi les nombreux mécanismes utilisant le principe cinématique de l'association bielle-manivelle, on trouve :

- les moteurs à combustion interne pour lesquels la translation du piston due à la combustion du carburant est transformée en rotation du vilebrequin,
- les compresseurs et les pompes au sein desquels le mouvement de rotation du moteur est transformé en mouvement de translation du ou des pistons qui vont comprimer le fluide.





Vilebrequin composé :

- D'un cylindre diamètre  $d_1 = 20$  mm et longueur  $L_1 = 90$  mm
- D'un cylindre diamètre  $d_2 = 60$  mm et longueur  $L_2 = 10$  mm
- D'un cylindre diamètre  $d_3 = 10$  mm et longueur  $L_3 = 20$  mm

Bielle composée :

- De deux cylindres diamètre extérieur  $D_e = 20$  mm et diamètre intérieur  $D_i = 10$  mm avec une longueur de  $e = 10$  mm
- D'un pavé de dimensions :  $L = 80$  mm,  $e = 10$  mm,  $e = 10$  mm

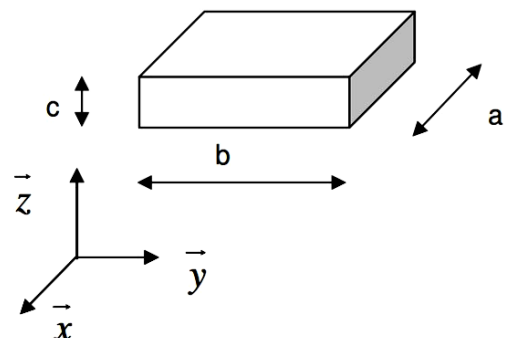
### Questions

- Déterminer la position du centre de gravité de la bielle , on donnera ses trois coordonnées exprimées dans le repère  $(O, x, y, z)$  lié à la bielle.  
Comparez les valeurs trouvées avec celles données par le logiciel de CAO ( voir à la fin du sujet )
- Déterminer la position du centre de gravité du vilebrequin , on donnera ses trois coordonnées exprimées dans le repère  $(O, x, y, z)$  lié au vilebrequin  
Comparez les valeurs trouvées avec celles données par le logiciel de CAO ci-après ( voir à la fin du sujet )
- Donner , en la justifiant la forme de la matrice d'inertie de la bielle exprimée dans le repère  $(O, x, y, z)$  lié à la bielle
- Donner , en la justifiant la forme de la matrice d'inertie du vilebrequin exprimée dans le repère  $(O, x, y, z)$  lié au vilebrequin

On donne les matrices d'inertie du pavé et du cylindre

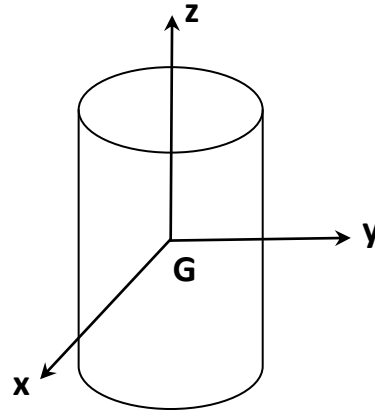
Pour le pavé de largeur  $a$ , longueur  $b$  et hauteur  $c$ , la matrice d'inertie exprimée en son centre de gravité est :

$$I_{G,S/R} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



Pour le cylindre de rayon R et de longueur L, la matrice d'inertie exprimée en son centre de gravité est :

$$I_{G,S/R} = \begin{bmatrix} \frac{m}{4} \left( R^2 + \frac{L^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4} \left( R^2 + \frac{L^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m \cdot R^2}{2} \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



- 5) Préciser la démarche à suivre ( en la détaillant ) pour déterminer les éléments des matrices d'inertie de la bielle et du vilebrequin.

Propriétés de masse

Système de coordonnées de sortie: -- par défaut --

Objets sélectionnés: bielle.SLDPRT

Inclure les corps/composants cachés

Montrer le système de coordonnées de sortie dans le coin de la fenêtre

Propriétés de masse assignées

Propriétés de masse de bielle ( Part Configuration - Défaut )

Système de coordonnées de sortie : -- par défaut --

Densité = 0.01 grammes par millimètre cube

Masse = 93.43 grammes

Volume = 12799.17 millimètres cubes

Superficie = 5888.94 millimètres carrés

Centre de gravité: ( millimètres )

X = 50.00  
Y = 0.00  
Z = 0.00

Axes d'inertie principaux et moments d'inertie principaux: ( grammes \* millimètres carrés )  
Pris au centre de gravité.

Ix = (1.00, 0.00, 0.00) Px = 2349.87  
Iy = (0.00, 1.00, 0.00) Py = 120035.22  
Iz = (0.00, 0.00, 1.00) Pz = 120827.86

Moments d'inertie: ( grammes \* millimètres carrés )  
Pris au centre de gravité et aligné avec le système de coordonnées de sortie.

Lxx = 2349.87 Lxy = 0.00 Lxz = 0.00  
Lyx = 0.00 Lyy = 120035.22 Lyz = 0.00  
Lzx = 0.00 Lzy = 0.00 Lzz = 120827.86

Moments d'inertie: ( grammes \* millimètres carrés )  
Pris au système de coordonnées de sortie.

Ixx = 2349.87 Ixy = 0.00 Izx = 0.00  
Iyx = 0.00 Iyy = 353620.00 Iyz = 0.00  
Izx = 0.00 Izy = 0.00 Izz = 354412.64

Propriétés de masse

Système de coordonnées de sortie: -- par défaut --

Objets sélectionnés: vilebrequin.SLDPRT

Inclure les corps/composants cachés

Montrer le système de coordonnées de sortie dans le coin de la fenêtre

Propriétés de masse assignées

Propriétés de masse de vilebrequin ( Part Configuration - Défaut )

Système de coordonnées de sortie : -- par défaut --

Densité = 0.01 grammes par millimètre cube

Masse = 424.27 grammes

Volume = 58119.46 millimètres cubes

Superficie = 13823.01 millimètres carrés

Centre de gravité: ( millimètres )

X = -0.54  
Y = 71.08  
Z = 0.00

Axes d'inertie principaux et moments d'inertie principaux: ( grammes \* millimètres carrés )  
Pris au centre de gravité.

Ix = (-0.02, 1.00, 0.00) Px = 107586.96  
Iy = (-1.00, -0.02, 0.00) Py = 469171.15  
Iz = (0.00, 0.00, 1.00) Pz = 473413.45

Moments d'inertie: ( grammes \* millimètres carrés )  
Pris au centre de gravité et aligné avec le système de coordonnées de sortie.

Lxx = 468950.69 Lxy = -8925.52 Lxz = 0.00  
Lyx = -8925.52 Lyy = 107807.41 Lyz = 0.00  
Lzx = 0.00 Lzy = 0.00 Lzz = 473413.45

Moments d'inertie: ( grammes \* millimètres carrés )  
Pris au système de coordonnées de sortie.

Ixx = 2612593.94 Ixy = -25226.99 Izx = 0.00  
Iyx = -25226.99 Iyy = 107931.38 Iyz = 0.00  
Izx = 0.00 Izy = 0.00 Izz = 2617180.66