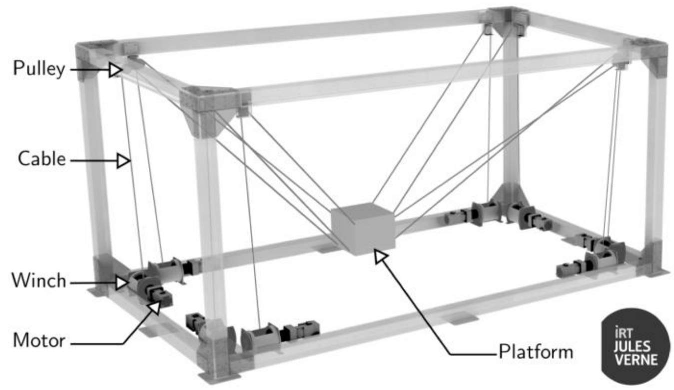
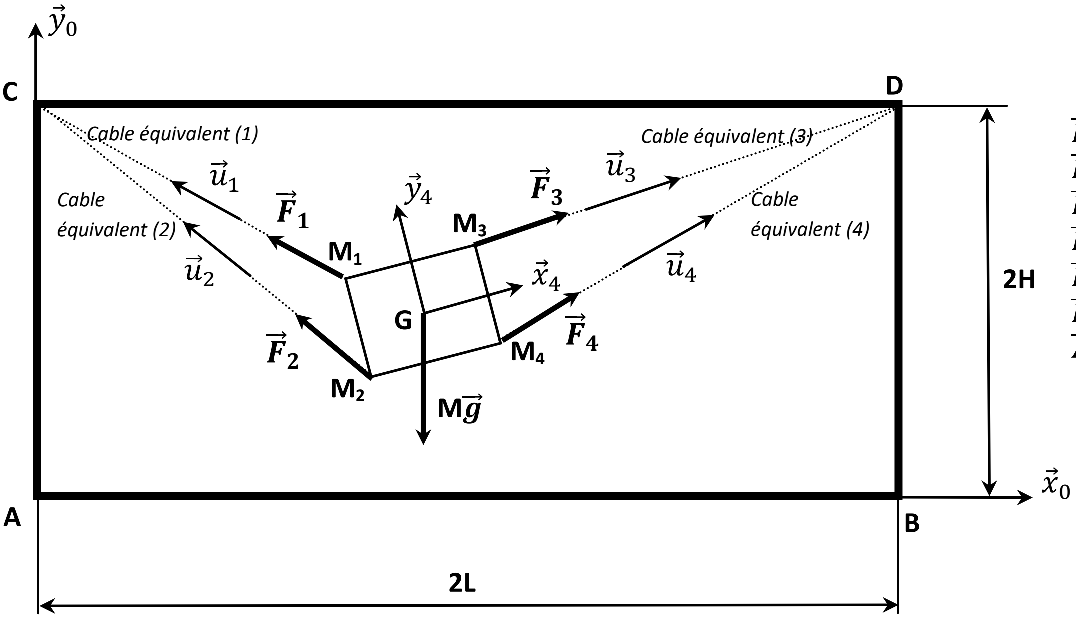
# Contrôle continu de mécanique du solide

Les robots parallèles à câbles sont une nouvelle structure de robots apparus au début des années 2000 et encore en développement actif. Dans ce système, la plate-forme est déplacée et orientée par rapport à une référence fixe dans toutes les directions de l'espace par l'enroulement ou le déroulement de plusieurs câbles Cette structure permet à la plate-forme d'atteindre une grande zone de travail avec, en tenant compte de l'inévitable déformation des câbles, une très grande précision dans le positionnement comme dans l'orientation.

Torseur associé à l'action de la charge :

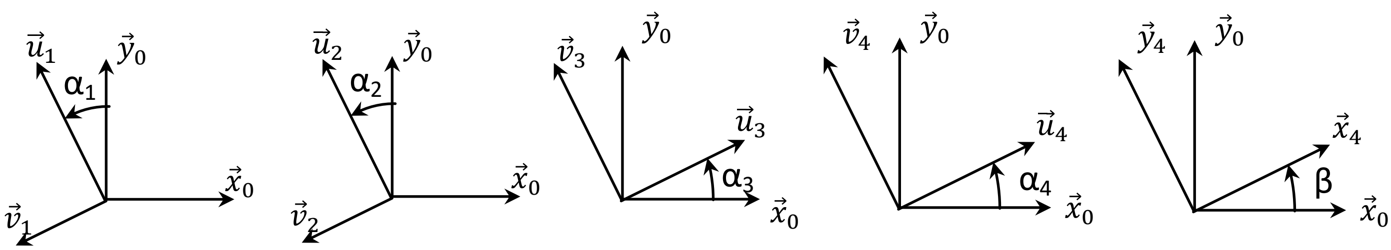
$$\{\mathcal{T}_{(g\to ch)}\} = {}_G\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{g\to pr}} = -Mg.\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{M_{G_{g\to ch}}} = \vec{0} \end{matrix}\right\}$$




$\overrightarrow{M_1C} = \lambda_1.\overrightarrow{u_1}$
$\overrightarrow{M_2C} = \lambda_2.\overrightarrow{u_2}$
$\overrightarrow{M_3D} = \lambda_3.\overrightarrow{u_3}$
$\overrightarrow{M_4D} = \lambda_4.\overrightarrow{u_4}$
$\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{M_2M_4} = 2\ell.\overrightarrow{x_4}$
$\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{M_4M_3} = 2\hbar.\overrightarrow{y_4}$
$\overrightarrow{AG} = x.\overrightarrow{x_0} + y.\overrightarrow{y_0}$

Position des différentes bases mobiles par rapport à la base fixe :



La plate-forme est de dimensions $2\ell \times 2h$ selon respectivement $\overrightarrow{\boldsymbol{x_4}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{y_4}}$.
Le centre géométrique $G$ de la plate-forme est donc situé à une distance $\pm\ell$ (selon $\overrightarrow{\boldsymbol{x_4}}$ ) et $\pm h$ (selon $\overrightarrow{\boldsymbol{y_4}}$ ) des quatre coins $M_1$ à $M_4$.
Pour trouver la relation entre les quatre longueurs $\lambda_1$ à $\lambda_4$, la géométrie des éléments (longueurs $L$ et $H$ pour le portique et longueurs $\ell$ et $h$ pour la plate-forme) et les paramètres $x$, $y$ et $\beta$ définissant la position du centre géométrique $G$ et l'orientation de la plate-forme dans le plan médian, il est nécessaire de déterminer les équations issues des fermetures géométriques sur les boucles formées par les câbles et la structure du portique.

**1)** Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{CM_1}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{CM_2}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{M_1M_3}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{M_2M_4}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{M_3D}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{M_4D}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ dans la base $\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{y_0}}$

**2)** Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{GM_1}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{GM_2}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{GM_3}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{GM_4}}$ dans la base $\overrightarrow{\boldsymbol{x_4}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{y_4}}$ puis dans la base $\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{y_0}}$

***<u>Relations entre longueurs des câbles et angles d'inclinaison des câbles et de la plate-forme</u>***

**3)** En projetant la fermeture vectorielle $\overrightarrow{\boldsymbol{CM_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{M_1M_3}} + \overrightarrow{\boldsymbol{M_3D}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ sur les directions $\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{y_0}}$ en déduire deux équations scalaires entre les longueurs $L$, $\ell$, $\lambda_1$ et $\lambda_3$ et les angles $\alpha_1$, $\alpha_3$ et $\beta$.

*<u>Remarque</u>*
*En projetant les autres fermetures vectorielles associées aux câbles, soit*
$\overrightarrow{\boldsymbol{CM_2}} + \overrightarrow{\boldsymbol{M_2M_4}} + \overrightarrow{\boldsymbol{M_4D}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ , $\overrightarrow{\boldsymbol{CM_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{M_1M_2}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CM_2}}$ **et** $\overrightarrow{\boldsymbol{DM_3}} + \overrightarrow{\boldsymbol{M_3M_4}} = \overrightarrow{\boldsymbol{DM_4}}$ *sur les directions* $\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$ *et* $\overrightarrow{\boldsymbol{y_0}}$
*il serait possible d'obtenir six autres équations scalaires reliant les longueurs $\lambda 1$ à $\lambda 4$ des câbles, leurs inclinaisons $\alpha 1$ à $\alpha 4$, les dimensions $L$ du portique et $\ell$ ou $h$ de la plate-forme et l'angle $\beta$*

***<u>Relations entre longueurs des câbles et altitude de la plate-forme</u>***

**4)** En projetant la relation vectorielle $\overrightarrow{\boldsymbol{AG}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CM_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{M_1G}}$ sur les directions $\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{y_0}}$, déterminer les expressions des coordonnées $x$ et $y$ du centre géométrique $G$ en fonction des longueurs $\lambda_1$, $\ell$, $h$ et $H$ et des angles $\alpha_1$ et $\beta$. En déduire l'expression de la longueur $\lambda_1$ du câble équivalent (1) sous la forme :

$$\lambda_1 = \sqrt{(x - f_1(\beta))^2 + (y - f_2(\beta))^2}$$

où les deux fonctions $f_1$ et $f_2$ sont à exprimer en fonction de l'angle $\beta$ et des longueurs constantes $\ell$, $h$ et $H$.

***<u>Torseur résultant de</u>*** $\overrightarrow{\boldsymbol{F_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{F_2}}, \overrightarrow{\boldsymbol{F_3}}, \overrightarrow{\boldsymbol{F_4}}$

Les torseurs associés aux actions $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ s'écrivent : $\{\mathcal{T}_{(F_i)}\} = {}_{M_i}\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_i} = F_i.\overrightarrow{\boldsymbol{u_i}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{M_{M_i}(F_i)}} = \vec{\mathbf{0}} \end{array} \right\}$

**5)** Calculer les produits vectoriels $\overrightarrow{\boldsymbol{x_4}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}}$ ; $\overrightarrow{\boldsymbol{y_4}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}}$ ; $\overrightarrow{\boldsymbol{x_4}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}}$ ; $\overrightarrow{\boldsymbol{y_4}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}}$ ; $\overrightarrow{\boldsymbol{x_4}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{u_3}}$ ; $\overrightarrow{\boldsymbol{y_4}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{u_3}}$ ; $\overrightarrow{\boldsymbol{x_4}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{u_4}}$ ; $\overrightarrow{\boldsymbol{y_4}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{u_4}}$
Exprimer les torseurs associés aux actions $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ en G

**6)** Exprimer le torseur résultant $\{\mathcal{T}_{(R)}\}$ de $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ en G