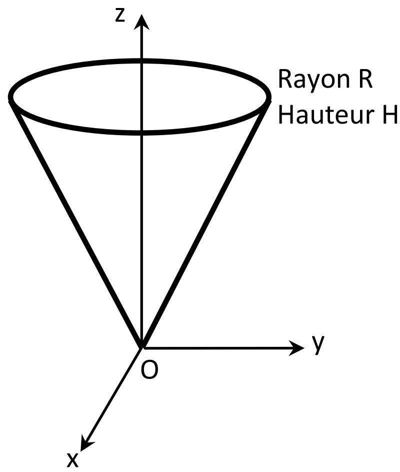
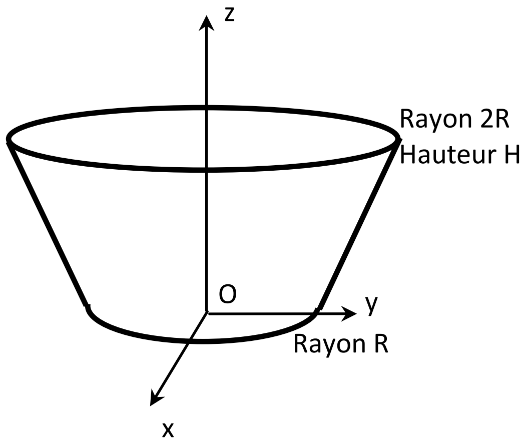
Contrôle mécanique du solide
Cinétique

1 – Cône d'épaisseur mince de rayon R et de hauteur H



1) Par calcul intégral, déterminer la surface et la masse m_0 d'un cône à **paroi mince** de rayon R, de hauteur H et de masse σ par unité de surface.
On démontrera que cette masse vaut : $m_0 = \sigma.\pi.R.\sqrt{R^2+H^2}$
2) Par calcul intégral, déterminer la position du centre de masse G_0
3) Préciser en la justifiant la forme de la matrice d'inertie dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
4) Par calcul intégral, déterminer tous les termes de la matrice d'inertie dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
On démontrera que $I_{oz} = m_0 \frac{R^2}{2}$ *et que par rapport au plan xy on a :* $I_{xy} = \int z^2\, dm = m_0 \frac{H^2}{2}$.
Pour le calcul intégral on prendra l'élément de surface :
$ds = r.d\vartheta.\frac{dz}{\cos\alpha}$ *avec α demi-angle au sommet du cône*

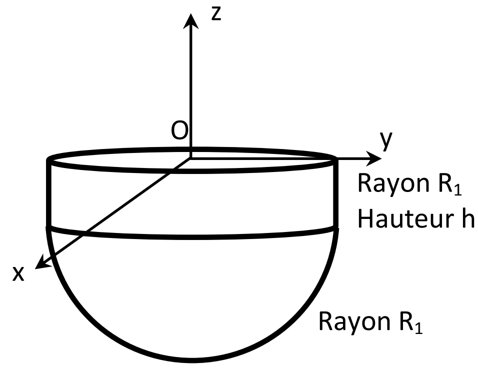
2 – Tronc de cône d'épaisseur mince



5) Déterminer la surface et la masse m_1 d'un tronc de cône à **paroi mince** de rayon 2R et R, de hauteur H et de masse σ par unité de surface.
6) Par calcul intégral, déterminer la position du centre de masse G_1
On démontrera que $Z_{G_1} = \frac{5}{9} H$
7) Préciser en la justifiant la forme de la matrice d'inertie dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
8) Par calcul intégral, déterminer tous les termes de la matrice d'inertie dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

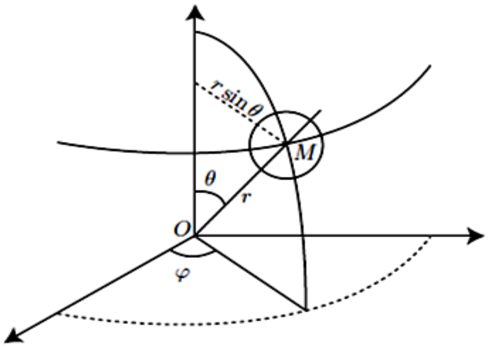
On démontrera que $I_{oz} = \frac{5}{2} m_1 R^2$ *et que par rapport au plan xy on a :* $I_{xy} = \int z^2\, dm = \frac{7}{18} m_1 H^2$

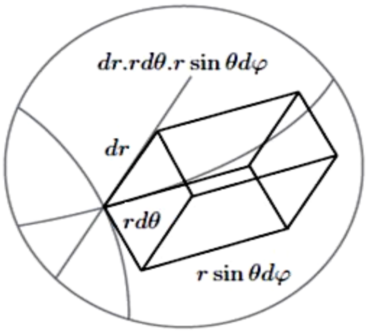
3 – Cylindre rayon R_1 hauteur h et demi-sphère rayon R_1 pleins



9) Déterminer le volume et la masse de cet ensemble cylindre + ½ sphère (masse volumique ρ)
10) Déterminer la position du centre de masse G_2 de cet ensemble
11) Préciser en la justifiant la forme de la matrice d'inertie dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
12) Par calcul intégral, déterminer tous les termes de la matrice d'inertie dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

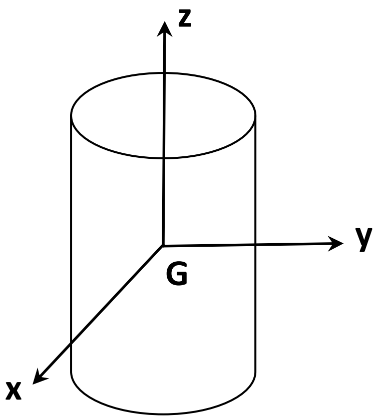
Coordonnées sphériques





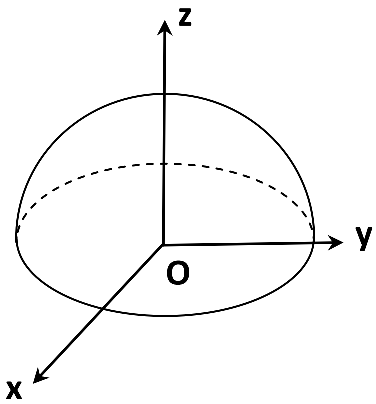
Pour le cylindre de rayon R et de longueur L, la matrice d'inertie exprimée en son centre de gravité est :

$$\mathbf{I_{G,S/R}} = \begin{bmatrix} \frac{m}{4}(R^2 + \frac{L^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4}(R^2 + \frac{L^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m.R^2}{2} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



Pour une demi-sphère pleine de rayon R

$$\mathbf{I_{O,S/R}} = \begin{bmatrix} \frac{2m}{5}R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2m}{5}R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m}{5}R^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



Position du centre de gravité : $Z_G = \frac{3}{8}R$