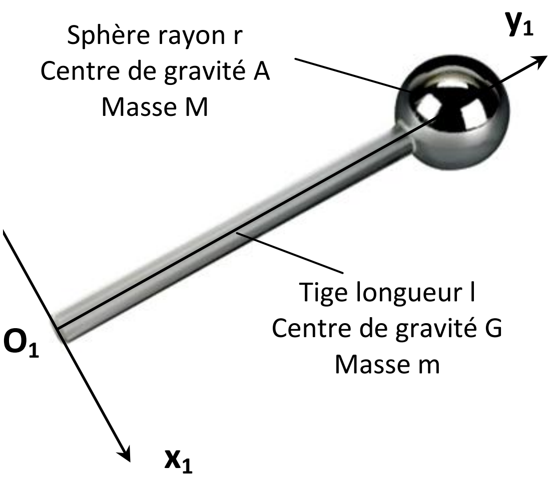
Contrôle de cinétique

1 – Tige et sphère

Un solide est composé d’ une tige de longueur l (diamètre d) et une sphère de rayon r . Ce solide est en rotation autour de l'axe O_1x_1



1) Précisez la forme de la matrice d'inertie en indiquant les termes qui sont nuls ou égaux . Justifiez.

Sachant que :
- le moment d'inertie d'un cylindre de ***diamètre d*** *et de* ***longueur l*** *par rapport à un axe passant par son centre de gravité est* $I_{cylindre} = \frac{m.l^2}{12} + \frac{m.d^2}{16}$
- le moment d'inertie de la sphère par rapport à un axe passant par son centre de gravité est $I_{sphère} = \frac{2M.r^2}{5}$

2) En déduire le moment d'inertie de la tige par rapport à son axe de rotation O_1x_1 . Justifiez vos calculs

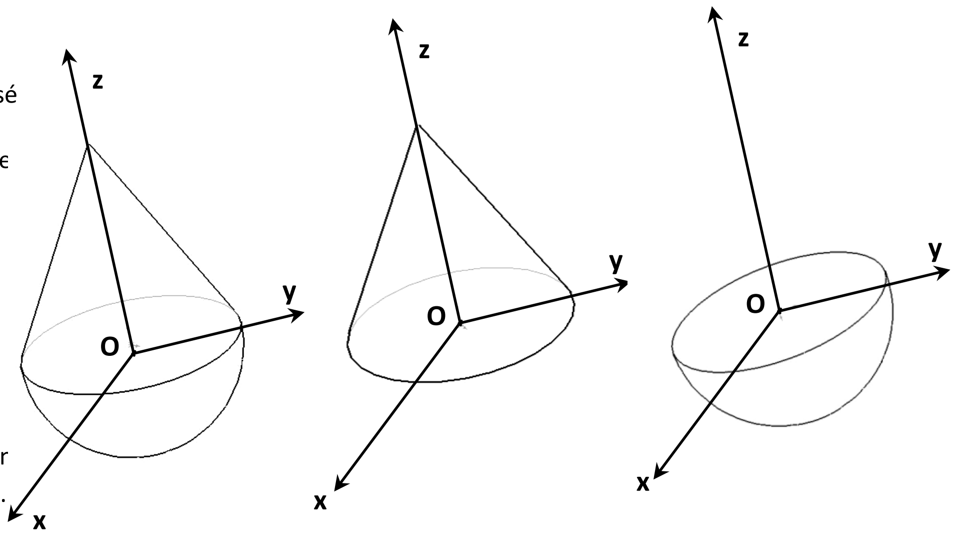
3) Déterminez le moment d'inertie de l'ensemble {tige+sphère} par rapport à son axe de rotation O_1x_1 . Justifiez vos calculs

2 - Cône et demi-sphère

Ci-contre est représenté un volume composé d'un cône et d'une demi-sphère.
On cherche à déterminer la matrice d'inertie de ce volume composé.
La base du cône a pour rayon R qui a pour hauteur H.
M_1 est la masse du cône.
La sphère est de rayon R et a une masse M_2

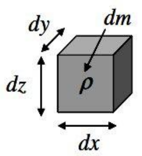
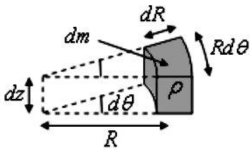
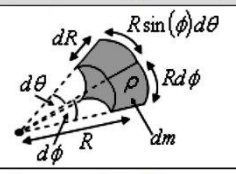
Questions

1) Précisez la forme de la matrice d'inertie en indiquant les termes qui sont nuls ou égaux . Justifiez.



2) Déterminez les termes de la matrice d'inertie du cône en O en détaillant le calcul intégral .
3) Déterminez les termes de la matrice d'inertie de la demi-sphère en O en détaillant le calcul intégral.
4) En déduire la matrice d'inertie du volume composé (cône + demi-sphère)

Rappel : Eléments de volumes pour calculer les intégrales

Coordonnées cartésiennes $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$	Coordonnées cylindriques $dm = \rho\, R\, dR\, d\theta\, dz$	Coordonnées sphériques $dm = \rho\, R^2 \sin(\phi) dR\, d\theta\, d\phi$
		

Remarque : $x, y, z \in [-\infty..\infty]$ et $R \in [0..\infty]$ $\theta \in [0..2\pi]$ $\phi \in [0..\pi]$
θ : Longitude θ : Axe parallèle à x ϕ : Axe parallèle à z
ϕ : Colatitude « Rotation plan xy » « Rotation $+z$ à $-z$ »

Volume d'une sphère de rayon R :

$$V_{sphère} = \frac{4\,\pi.R^3}{3}$$

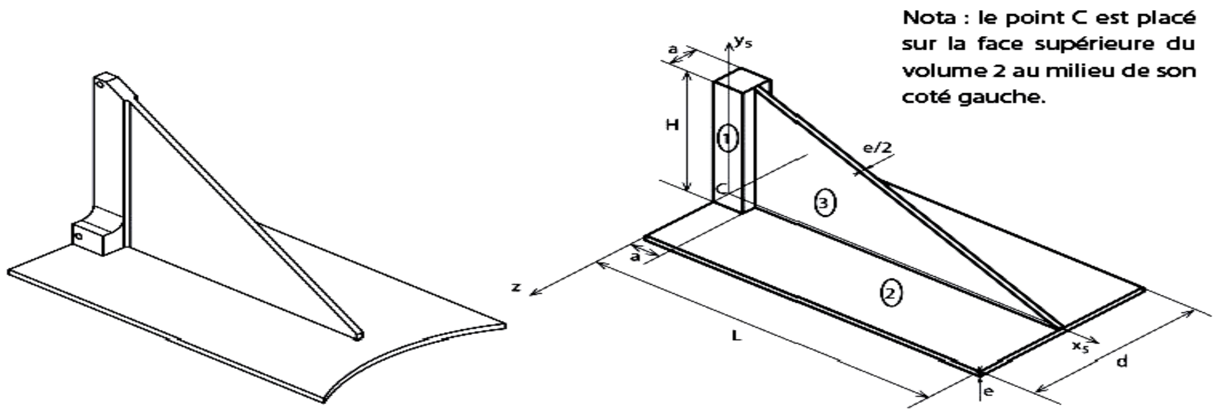
Volume d'un cône de rayon R et de hauteur H :

$$V_{cône} = \frac{\pi.H.R^2}{3}$$

3 – Volet de tuyère de réacteur d'avion

On cherche à déterminer des éléments de la matrice d'inertie du modèle simplifié du volet

Modélisation géométrique d'un volet



forme du volet réel — modèle géométrique simplifié

Notations et hypothèses :

On suppose que le solide étudié admet le plan (C, $\overrightarrow{x_5}$, $\overrightarrow{y_5}$) comme plan de symétrie géométrique.
Le solide (S) est supposé homogène et composé de 3 volumes simples : V_1, V_2 et V_3.
*Le référentiel associé au bâti **1** est supposé galiléen.*

Pour information on donne :

- la forme générale de la matrice d'inertie d'un solide S :

La matrice d'inertie en C de S : $I_C\ (S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & A & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_5}, \overrightarrow{y_5}, \vec{z})}$

$\mathbf{A} = \int_{P\in S}(y^2 + z^2)\, dm$ $\quad \mathbf{B} = \int_{P\in S}(x^2 + z^2)\, dm$ $\quad \mathbf{C} = \int_{P\in S}(x^2 + y^2)\, dm$

$\mathbf{D} = \int_{P\in S}(y.z)\, dm$ $\quad \mathbf{E} = \int_{P\in S}(z.x)\, dm$ $\quad \mathbf{F} = \int_{P\in S}(x.y)\, dm$

On cherche à déterminer, avec les hypothèses précédentes, le moment d'inertie par rapport à l'axe (C, $\vec{z}$) d'un volet en fonction de la masse volumique ρ et des caractéristiques géométriques H, L, d, a et e.

Questions

1) Déterminer les coordonnées du centre de gravité du solide (S) dans le repère (C, $\overrightarrow{x_5}$, $\overrightarrow{y_5}$, $\vec{z}$)

2) Compte-tenu de la forme géométrique du volet (modèle simplifié) , préciser en le justifiant les éléments de la matrice d'inertie qui sont nuls

3) Déterminer le moment d'inertie de l'élément (1) de volume par rapport à l'axe (C, $\vec{z}$) $I_{1,Cz}$

On démontrera que $I_{1,Cz} = m_1 \left[\frac{a^2}{3} + \frac{H^2}{3}\right]$

4) Déterminer le moment d'inertie de l'élément (2) de volume par rapport à l'axe (C, $\vec{z}$) $I_{2,Cz}$

On démontrera que $I_{2,Cz} = m_2 \left[\frac{L^2}{3} + \frac{e^2}{3}\right]$

5) Déterminer le moment d'inertie de l'élément (3) de volume par rapport à l'axe (C, $\vec{z}$) $I_{3,Cz}$

On démontrera que $I_{3,Cz} = m_3 \left[\frac{2}{(L-a)^2}\left(\frac{L^4}{12} - \frac{La^3}{3} + \frac{a^4}{4}\right) + \frac{H^2}{6}\right]$

6) Déterminer le moment d'inertie du volet complet par rapport à l'axe (C, $\vec{z}$) $I_{S,Cz}$

7) Pourquoi n'avons-nous calculé que le moment d'inertie du volet par rapport à l'axe (C, $\vec{z}$) $I_{S,Cz}$?