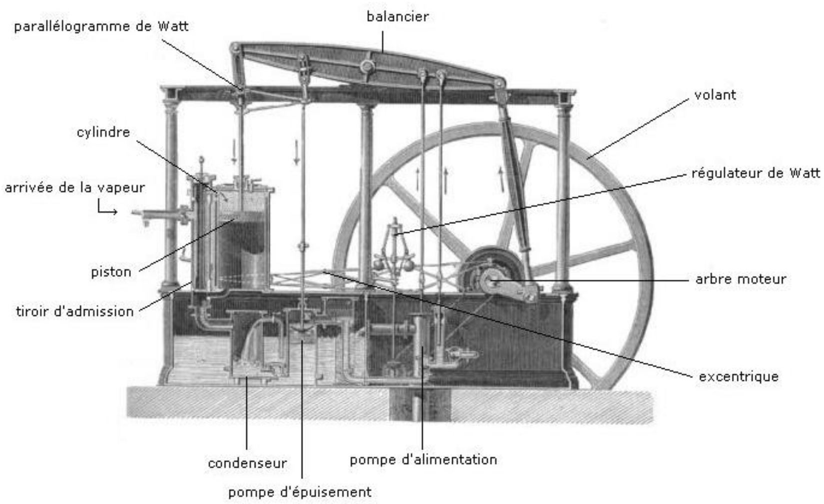
Contrôle de dynamique du solide

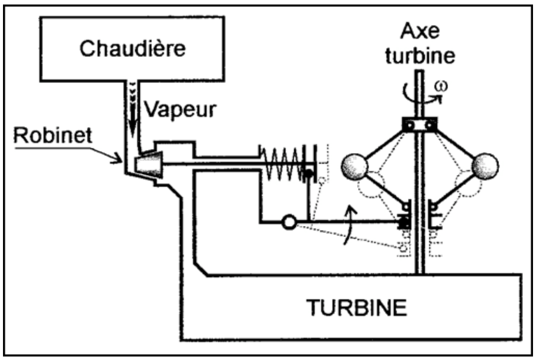
Régulateur de Watt

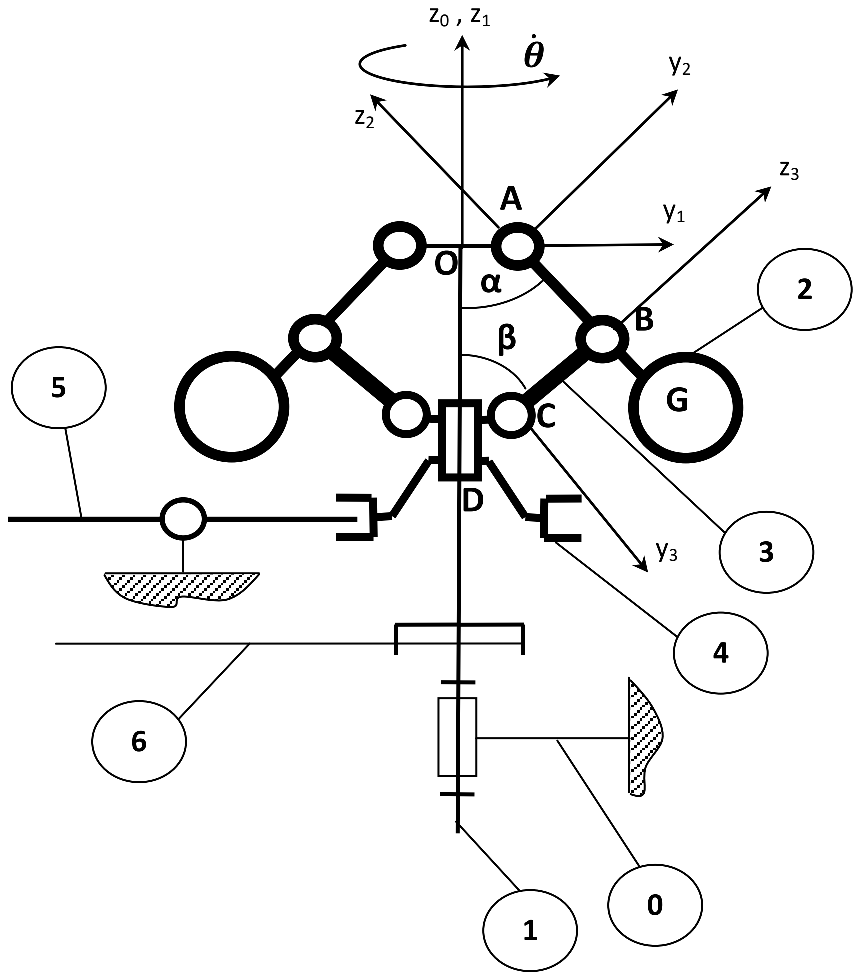
Ce régulateur, inventé par James Watt était utilisé comme élément de rétroaction, permettant de réguler le fonctionnement des premières machines à vapeur. Le mécanisme de régulation ainsi formé est considéré comme la première boucle d'asservissement du monde industriel.

Description

L'axe (1) est entraîné en rotation par une courroie reliée à l'arbre moteur. L'axe (1) entraîne dans sa rotation autour de l'axe vertical les deux bras (2) et (2') qui prennent une position d'équilibre sous l'action conjuguée de leur poids et de la force centrifuge. L'inclinaison des bras (2) et (2') modifie, par l'intermédiaire des biellettes (3) et (3') la position du collet (la pièce 4) suivant l'axe (O, $\overrightarrow{z_1}$).
La position de la pièce n°4 sur l'axe (1) est utilisée pour ouvrir ou fermer la vanne d'alimentation de vapeur du moteur.
Machine de Watt (pompe d'épuisement de mines)

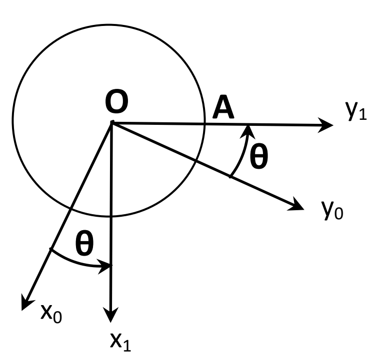






0 : Bâti
1 : Axe moteur
2 : Levier à masselottes
3 : Biellette
4 : Collet
5 : Fourchette
6 : Courroie

Vue de dessus



Données du problème

- Au bâti est associé un référentiel R_0 (O, $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{z_0}$) L'arbre repère (1) est en mouvement de rotation d'angle θ et d'axe $\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$ relativement au référentiel R_0. Il lui est associé un référentiel R_1 (O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_{0,1}}$).
- Les bras repère (2) et (2') sont en mouvement de rotation d'angle α et d'axe $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$ en A et A' relativement à l'arbre (référentiel R_1). L'étude s'intéressera au bras (2), le mouvement de (2') étant symétrique à celui de (2). Au bras (2) est associé un référentiel R_2 (A, $\overrightarrow{x_{1,2}}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$) L'extrémité du bras (2) porte une sphère de centre G et de masse m.
- Le collet repère (4) est en mouvement de translation d'axe (O, $\overrightarrow{z_1}$), centre de la liaison en D, relativement à l'arbre (1). Il lui est associé le référentiel R_4 (D, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_{0,1}}$).
- Les biellettes repère (3) et (3') sont en mouvement de rotation d'angle β d'axe $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_3}$ en C et C' par rapport au collet (4). L'étude s'intéressera à la biellette (3), le mouvement de (3') étant symétrique à celui de (3). La biellette 3 est en liaison pivot d'axe $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_3}$ au point B par rapport aux bras (2). Il lui est associé le référentiel R_3 (C, $\overrightarrow{x_{1,3}}$, $\overrightarrow{y_3}$, $\overrightarrow{z_3}$)

$\overrightarrow{OA}$ = r.$\overrightarrow{y_1}$; $\overrightarrow{AB}$ = - a.$\overrightarrow{z_2}$; $\overrightarrow{BC}$ = - a.$\overrightarrow{z_3}$; $\overrightarrow{AG}$ = - L.$\overrightarrow{z_2}$; $\overrightarrow{CD}$ = - r.$\overrightarrow{y_1}$; ($\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{x_1}$) = ($\overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{y_1}$) = Θ ; ($\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{y_2}$) = ($\overrightarrow{z_1}$, $\overrightarrow{z_2}$) = α ;

($\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{y_3}$) = ($\overrightarrow{z_1}$, $\overrightarrow{z_3}$) = β

Pour l'application numérique :

r = 30 mm, a = 100 mm, L = 200 mm, α = 30° supposé constant, $\dot{\Theta}$ = 2000 tr/mn supposé constant

Questions

<u>1 – Partie cinématique</u>

Calculer β en fonction de α et des données du problème. (vous remarquerez que le triangle ABC est isocèle en B). Vous remplacerez β par sa valeur dans toute la suite du problème.

1) Faire les schémas plans paramétrés de changement de bases permettant de passer :
- de R_0 à R_1,
- de R_1 à R_2
- et de R_1 à R_3.

2) Exprimer alors $\vec{\Omega}\ (1/0)$, $\vec{\Omega}\ (2/1)$, $\vec{\Omega}\ (3/1)$ et $\vec{\Omega}\ (3/2)$
3) Calculer $\vec{V}_{A/R_0}$
4) Calculer par dérivation $\vec{V}_{B/R_0}$
5) Écrire le torseur cinématique du solide « 2 » dans son mouvement par rapport à R_0 : $\{\boldsymbol{v}_{\ \mathbf{2/0}}\}$ exprimé au point A
6) A partir du résultat précédent, calculer $\vec{V}_{G/R_0}$
7) Écrire le torseur cinématique du solide « 3 » dans son mouvement par rapport à R_0 : $\{\boldsymbol{v}_{\ \mathbf{3/0}}\}$ exprimé au point B
8) Calculer $\vec{V}_{C/R_2}$ par dérivation
9) Calculer $\vec{V}_{C\in R_2/R_0}$ et en déduire $\vec{V}_{C/R_0}$
10) Écrire le torseur cinématique du solide « 4 » dans son mouvement par rapport à R_0 : $\{\boldsymbol{v}_{\ \mathbf{4/0}}\}$ exprimé au point C
11) A partir du résultat précédent, calculer $\vec{V}_{D/R_0}$
12) Calculer $\vec{a}_{A/R_0}$
13) Calculer $\vec{a}_{G/R_1}$
14) Calculer $\vec{a}_{G\in R_1/R_0}$ en utilisant le champ des vecteurs vitesses à partir du point A
15) Calculer $\vec{a}_{coriolis\ \ R_1/R_0}$
16) En déduire $\vec{a}_{G/R_0}$
17) Calculer $\vec{a}_{B/R_0}$ par dérivation de $\vec{V}_{B/R_0}$
18) Calculer $\vec{a}_{D/R_0}$ par dérivation de $\vec{V}_{D/R_0}$

2 – Partie dynamique

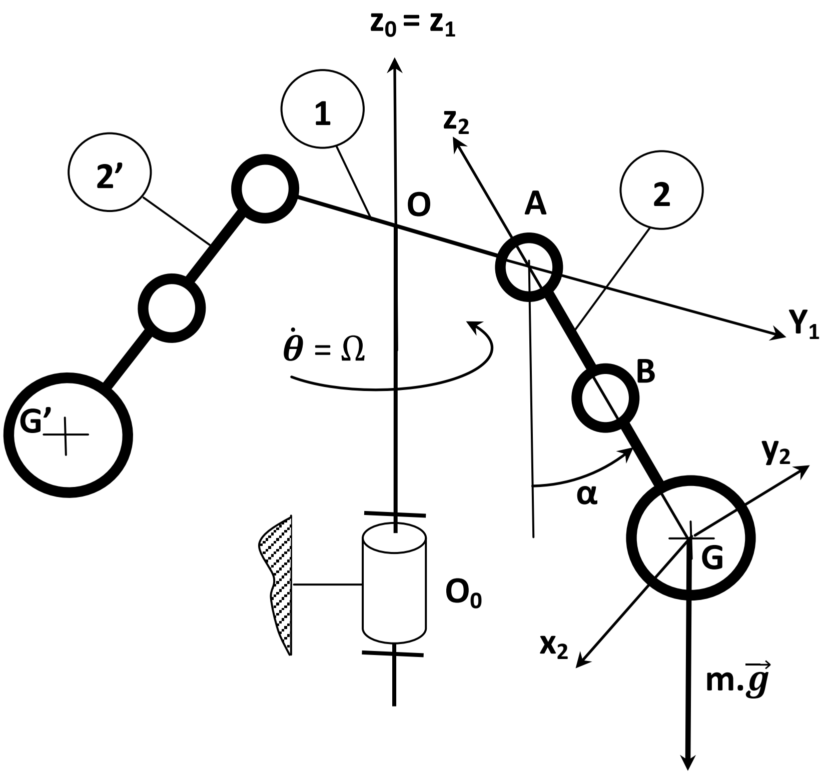
$\vec{g} = -\, g.\overrightarrow{z_0}$

$\overrightarrow{OA} =$ r.$\overrightarrow{y_1}$; $\overrightarrow{AG} = -\,$L.$\overrightarrow{z_2}$

$\vec{\Omega}\,(1/0) = \dot{\boldsymbol{\theta}}.\overrightarrow{z_1} = \Omega.\overrightarrow{z_1}$

On considère que le poids de (2) est concentré en G (idem pour 2' et G')

Sur (1) il s'exerce un couple moteur $\overrightarrow{C_m}$ tel que : $\overrightarrow{C_m} = C_m\,.\,\overrightarrow{z_0}$



1) Justifier que la matrice d'inertie de l'ensemble (2) barre AG et sphère est de la forme :

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}_{(x_2\,,y_2\,,z_2\,)}$$

2) Ecrire l'expression vecteur rotation $\vec{\Omega}\,(2/0)$, et démontrer que l'expression de $\overrightarrow{\sigma_{A\,2/R_0}}$ dans le repère $R_2(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\,)$ est : $\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma_{A\,2/R_0}}}$ = $\mathbf{I.\dot{\alpha}.\overrightarrow{x_2} + \Omega.(I.\,sin\alpha - m.L.r).\overrightarrow{y_2} + J.\,\Omega.cos\alpha.\overrightarrow{z_2}}$

3) Ecrire l'expression du moment dynamique $\overrightarrow{\delta_{A\,2/R_0}}$ dans le repère $R_2(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\,)$

4) Calculer le moment du poids de (2) par rapport à A et exprimer le résultat dans le repère $R_2(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\,)$

5) Par application du principe fondamental de la dynamique à (2) en projection sur Ox_2, démontrer que l'équation différentielle du mouvement est :

$$\boldsymbol{-\,m.g.L.sin\alpha = I.\ddot{\alpha} + (J - I).\Omega^2.cos\alpha.\,sin\alpha - m.L.r.\,\Omega.\,cos\alpha}$$

6) Déterminer l'énergie cinétique du solide (2) par rapport à R_0, $T(2/R_0)$ en déduire celle du solide (2') $T(2'/R_0)$

7) Déterminer la puissance des actions mécaniques extérieures P_{ext} et intérieures P_{int}

8) Par application du théorème de l'énergie cinétique aux solides (2) et (2'), montrer que l'on a :

$$2.\,\boldsymbol{\dot{\alpha}.\left[I.\ddot{\alpha} + m.L.r.cos\alpha + (I - J).\Omega^2.cos\alpha.sin\alpha + m.g.L.sin\alpha\,\right] = Cm.\,\Omega}$$