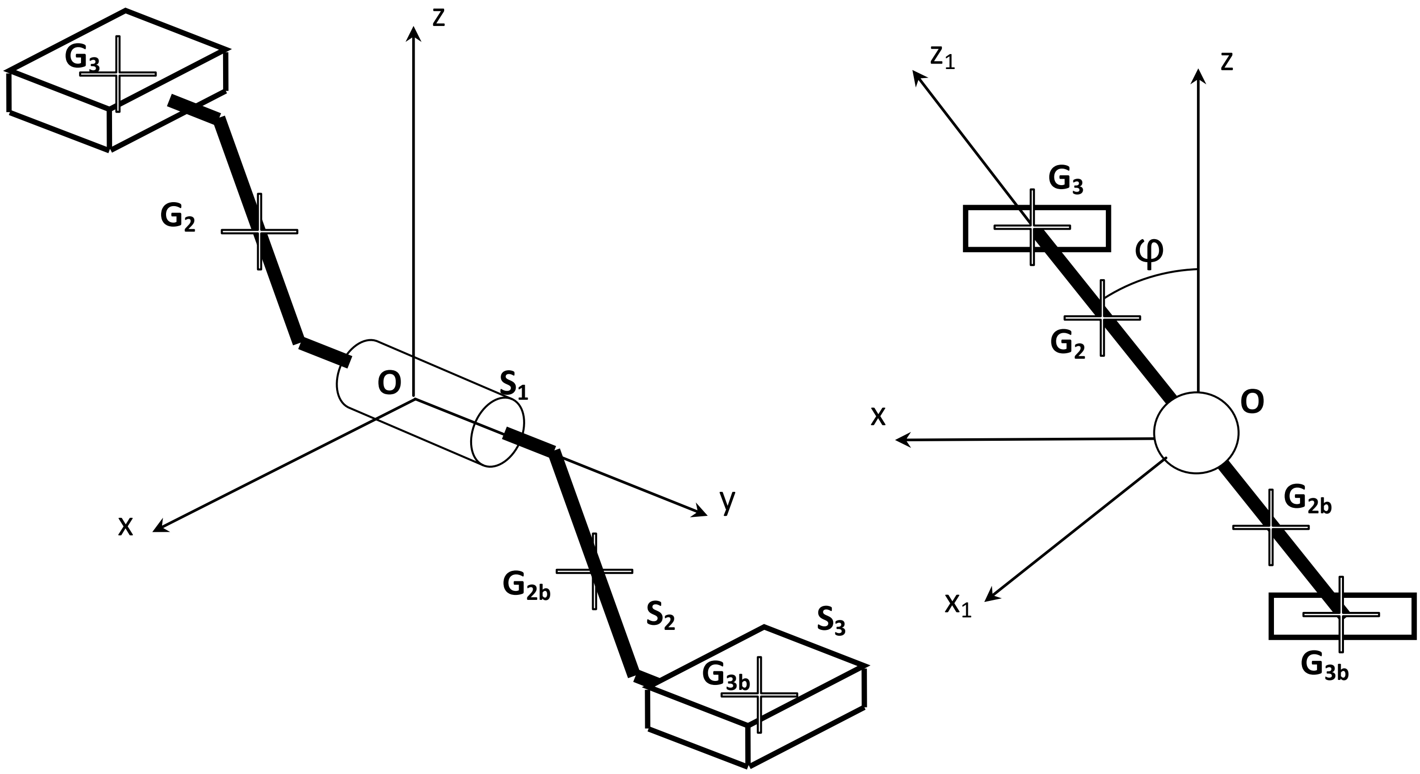
Pédalier

Un pédalier est présenté ci-dessous, il est composé :

- d'un cylindre S_1 (de masse m_1, de rayon r et de largeur h),
- des axes S_2 (tiges de masse m_2 et de longueur L)
- des pédales S_3 (de masse m_3, de côté a (en x), b (en y) et c (en z))



$\overrightarrow{OG_{2a}} = -\frac{h}{2}.\overrightarrow{y_1} + \frac{L}{2}.\overrightarrow{z_1}$ et $\overrightarrow{OG_{2b}} = \frac{h}{2}.\overrightarrow{y_1} - \frac{L}{2}.\overrightarrow{z_1}$

$\overrightarrow{OG_{3a}} = -\left(\frac{h}{2} + \frac{b}{2}\right) \overrightarrow{y_1} + L.\overrightarrow{z_1}$ et $\overrightarrow{OG_{3b}} = \left(\frac{h}{2} + \frac{b}{2}\right).\overrightarrow{y_1} - L.\overrightarrow{z_1}$

On cherche à déterminer la matrice d'inertie en O de l'ensemble ainsi que les expressions du moment cinétique et du moment dynamique au point O

Questions

1) Ecrire la matrice d'inertie de S_1 (cylindre de rayon r et de hauteur h) en O dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

2) Ecrire la matrice d'inertie de S_2 (tiges de longueur L) en O dans le repère $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$

3) Ecrire la matrice d'inertie de S_2 (tiges de longueur L) en O dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

4) Ecrire la matrice d'inertie de S_3 (pavé de cotés a, b, c) en **G_3** dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

5) Ecrire la matrice d'inertie de S_3 (pavé de cotés a, b, c) en **O** dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en utilisant le théorème de Huygens

Le pédalier est animé d'un mouvement de rotation $\vec{\Omega}$ autour de $O\vec{y}$ tel que $\vec{\Omega} = \dot{\phi}.\vec{y}$, écrire le moment cinétique en O de l'ensemble { S_1, S_2, S_3 }

On prendra pour matrice d'inertie de l'ensemble S = { S_1, S_2, S_3 } : $I_{O,S/R} = \begin{bmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

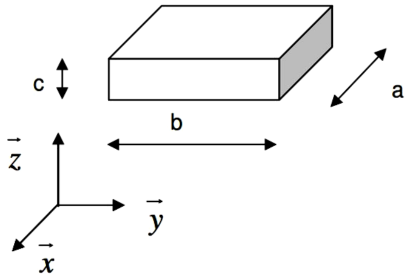
6) Déterminer le moment cinétique de S exprimé au point O dans le repère R : $\overrightarrow{\sigma_{O\ S/R}}$

7) Déterminer le moment dynamique de S exprimé au point O dans le repère R : $\overrightarrow{\delta_{O\ S/R}}$

Matrices d'inertie du pavé et du cylindre

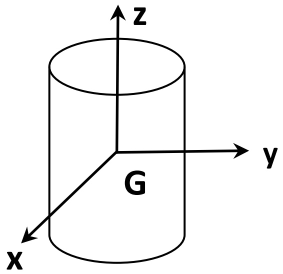
Pour le pavé de largeur a, longueur b et hauteur c, la matrice d'inertie exprimée en son centre de gravité est :

$$\mathbf{I_{G,S/R}} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



Pour le cylindre de rayon R et de longueur L, la matrice d'inertie exprimée en son centre de gravité est :

$$\mathbf{I_{G,S/R}} = \begin{bmatrix} \frac{m}{4}(R^2+\frac{L^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4}(R^2+\frac{L^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m.R^2}{2} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



Théorème de Huygens : en posant $\overrightarrow{OG} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$

$\bar{\bar{J}}(O,S).\vec{u} = \bar{\bar{J}}(G,S).\vec{u} + m.\overrightarrow{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG})$

$$I_{O,S/R} = \begin{bmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \begin{bmatrix} m(y^2+z^2) & -m.x.y & -m.x.z \\ -m.x.y & m(x^2+z^2) & -m.y.z \\ -m.x.z & -m.y.z & m(x^2+y^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

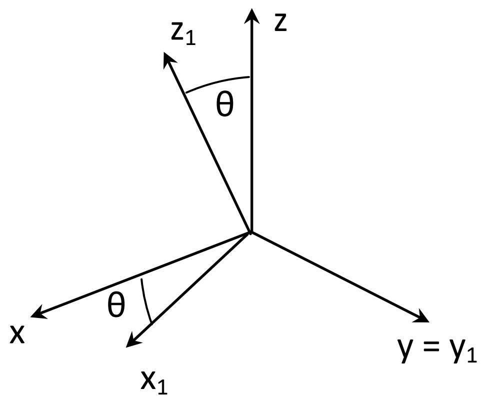
Changement de base : Base B_1 $(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ et base B $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Q = matrice de passage de B_1 vers B

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{et } Q^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array}$$

$$\mathbf{I(O,S)_B = Q^{-1} \times I(O,S)_{B_1} \times Q}$$



Rappels :

Le torseur $\{\tau_{(2\to1)}\}$ associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 sera noté :

$$\{\mathcal{T}_{(2\to1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{A_{2\to1}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} = X_A.\vec{x} + Y_A.\vec{y} + Z_A.\vec{z} \\ \overrightarrow{M_{A_{2\to1}}} = L_A.\vec{x} + M_A.\vec{y} + N_A.\vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinématique $\{ \upsilon_{2/1)} \}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R exprimé au point A sera noté :

$$\{\upsilon_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_x.\vec{x} + \omega_y.\vec{y} + \omega_z.\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A_{S/R}}} = v_{Ax}.\vec{x} + v_{Ay}.\vec{y} + v_{Az}.\vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_x & v_{Ax} \\ \omega_y & v_{Ay} \\ \omega_z & v_{Az} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinétique $\{ C_{S/R)} \}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{C_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\ S/R}} + \overrightarrow{J_A}(S, \overrightarrow{\Omega_{S/R}}) \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

$\overrightarrow{J_A}$ = **opérateur d'inertie de S en A**

Le torseur dynamique $\{ D_{S/R)} \}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{D_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\delta_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\delta_{A(S/R)}} = \left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}\right]_R + \mathrm{m}.\overrightarrow{V_{A_{S/R}}} \wedge \overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

L'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2}\{C_{(S/R)}\} \otimes \{\upsilon_{(S/R)}\} = \frac{1}{2}\left(m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}}.\overrightarrow{V_{A_{S/R}}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} \right)$$