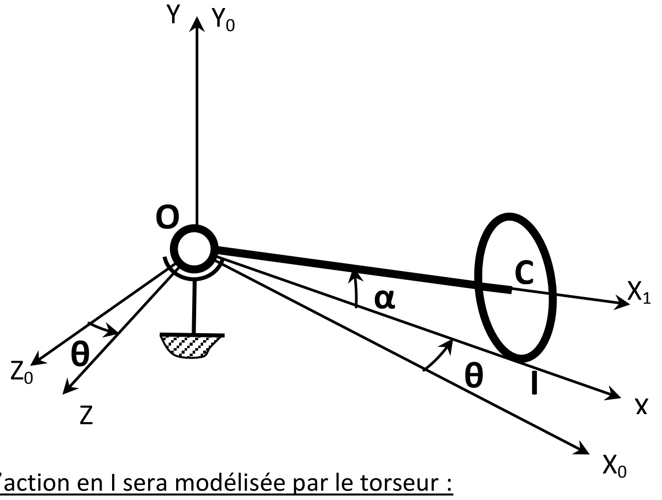
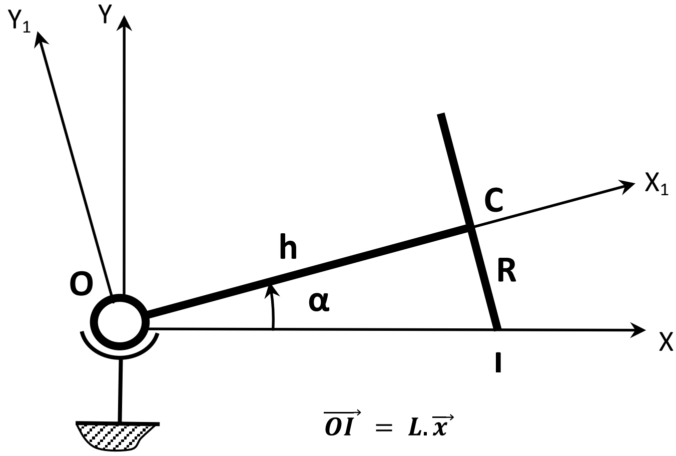
Contrôle mécanique du solide

Un solide (S) constitué d'un **disque homogène** (rayon R et masse M) et d'une **tige** sans masse de longueur h soudée perpendiculairement au disque en son centre C (centre de gravité)
Le disque roule sans glisser à une vitesse angulaire constante ($\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{S/R_0}} = \boldsymbol{\omega_1}.\vec{y} + \boldsymbol{\omega_2}.\overrightarrow{x_1}$) sur le plan horizontal Ox_0z_0





$\overrightarrow{OI} = L.\vec{x}$

$\overrightarrow{OC} = h.\overrightarrow{x_1}$

$\overrightarrow{IC} = R.\overrightarrow{y_1}$

<u>L'action en I sera modélisée par le torseur :</u>

$$\{\mathcal{T}_I\} = {}_I\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_I} \\ \overrightarrow{M_I} \end{Bmatrix} = {}_I\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_I} = Y_I.\vec{y} \\ \overrightarrow{M_I} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

<u>L'action en O sera modélisée par le torseur :</u>

$$\{\mathcal{T}_O\} = {}_O\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_O} \\ \overrightarrow{M_O} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_O} = X_O.\vec{x} + Y_O.\vec{y} + Z_O.\vec{z} \\ \overrightarrow{M_O} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

<u>Le poids du disque sera modélisé par le torseur :</u>

$$\{\mathcal{T}_{g\to D}\} = {}_C\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{g\to D}} \\ \overrightarrow{M_{g\to D}} \end{Bmatrix} = {}_C\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{g\to D}} = -M.g.\vec{y} \\ \overrightarrow{M_O} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Matrice d'inertie de S (ensemble {disque + tige}) en O :

$$\mathbf{I_{O,S}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M\frac{R^2}{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{M(\frac{R^2}{4} + h^2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{M(\frac{R^2}{4} + h^2)} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})}$$

Questions

1) Déterminer la vitesse du point C par rapport au repère fixe R_0 $\vec{V}_{C/R_0}$ dans le repère 1 (O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$)
2) Déterminer l'accélération du point C par rapport au repère fixe R_0 $\vec{\Gamma}_{C/R_0}$ dans le repère 1 (O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$) puis dans le repère R (O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$)
3) Déterminer la vitesse du point I par rapport au repère fixe R_0 $\vec{V}_{I/R_0}$ dans le repère 1 (O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$)
4) En exprimant la condition de roulement sans glissement en I, démontrer que $\omega_1 = -\frac{R.\omega_2}{\sqrt{R^2+h^2}}$
5) Isoler l'ensemble {disque + tige}, faire le bilan des actions appliquées.
6) Appliquer théorème de la résultante dynamique à l'ensemble {disque + tige} puis en déduire trois équations faisant intervenir les inconnues de liaison en O et en I
7) Justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble {disque + tige} dans le repère 1 (O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$)
8) Expliquer comment ont été déterminés tous les composants de la matrice d'inertie de l'ensemble {disque + tige} dans le repère 1 (O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$)
9) Déterminer le moment cinétique en O de l'ensemble {disque + tige} $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O(S/R_0)}}$ dans le repère 1 (O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$)
10) Déterminer le moment dynamique en O de l'ensemble {disque + tige} $\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O(S/R_0)}}$ dans le repère 1 (O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$)
11) Déterminer le moment résultant en O des actions appliquées à l'ensemble {disque + tige} $\overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O(\bar{S}\to S)}}$ exprimé dans le repère 1 (O, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$)
12) Appliquer théorème du moment dynamique à l'ensemble {disque + tige} puis en déduire une équation faisant intervenir les inconnues de liaison en I
13) Exprimer la condition à respecter afin que le disque reste en contact au point I . Cette condition est-elle respectée ?

Rappels :

Le torseur $\{\tau_{(2\to1)}\}$ associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 sera noté :

$$\{\mathcal{T}_{(2\to1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{A_{2\to1}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} = X_A.\vec{x} + Y_A.\vec{y} + Z_A.\vec{z} \\ \overrightarrow{M_{A_{2\to1}}} = L_A.\vec{x} + M_A.\vec{y} + N_A.\vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinématique $\{v_{2/1)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R exprimé au point A sera noté :

$$\{v_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_x.\vec{x} + \omega_y.\vec{y} + \omega_z.\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A_{S/R}}} = v_{Ax}.\vec{x} + v_{Ay}.\vec{y} + v_{Az}.\vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_x & v_{Ax} \\ \omega_y & v_{Ay} \\ \omega_z & v_{Az} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinétique $\{C_{S/R)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{C_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\,S/R}} + \overrightarrow{J_A}(S, \overrightarrow{\Omega_{S/R}}) \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

$\overrightarrow{J_A}$ = opérateur d'inertie de S en A

Le torseur dynamique $\{D_{S/R)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

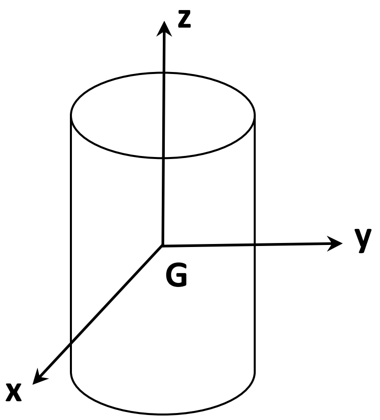
$$\{D_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\delta_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\delta_{A(S/R)}} = \left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}\right]_R + \mathrm{m}.\overrightarrow{V_{A_{S/R}}} \wedge \overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

L'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2}\{C_{(S/R)}\} \otimes \{v_{(S/R)}\} = \frac{1}{2}\left(m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}}.\overrightarrow{V_{A_{S/R}}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} \right)$$

Pour le cylindre de rayon R et de longueur L, la matrice d'inertie exprimée en son centre de gravité est :

$$\mathrm{I}_{G,S/R} = \begin{bmatrix} \frac{m}{4}(R^2 + \frac{L^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4}(R^2 + \frac{L^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m.R^2}{2} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



Théorème de Huygens : en posant $\overrightarrow{OG}$ = a. $\vec{x}$ + b. $\vec{y}$ + c. $\vec{z}$

$\bar{\bar{J}}$(O,S).$\vec{u}$ = $\bar{\bar{J}}$ (G,S) .$\vec{u}$ + m. $\overrightarrow{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG})$

$$\mathrm{I}_{O,S/R} = \begin{bmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \begin{bmatrix} m(b^2 + c^2) & -m.a.b & -m.a.c \\ -m.a.b & m(a^2 + b^2) & -m.b.c \\ -m.a.c & -m.b.c & m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$