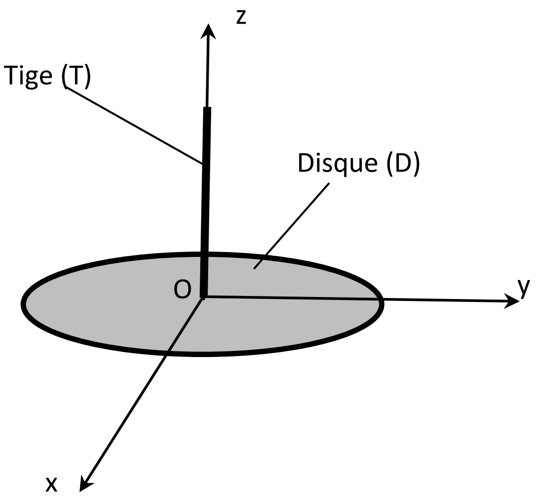
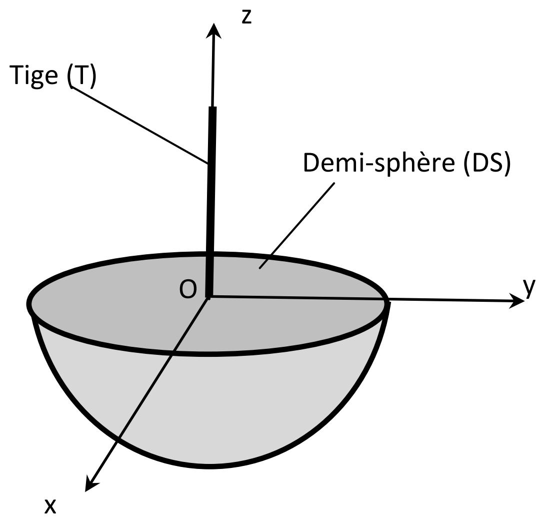
Contrôle mécanique du solide
Cinétique

Soit un solide (S) constitué d'un disque (D) de masse M et de rayon R et d'une tige (T) de même masse M et de longueur 2L. La tige est soudée au centre 0 du disque comme l'indique la figure



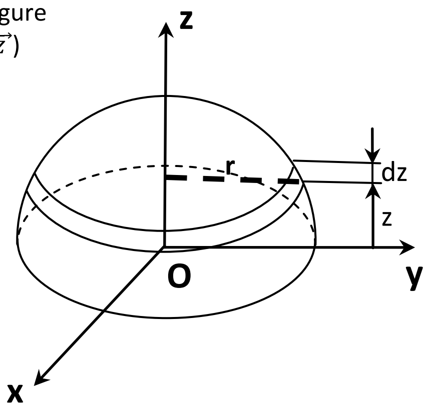


1 – Système disque et tige

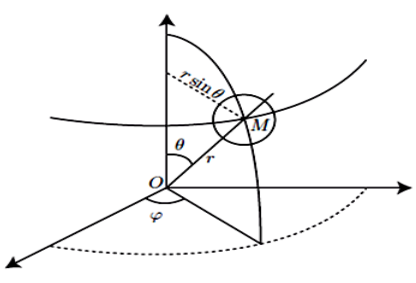
1) Déterminer la position du centre de gravité de l'ensemble (disque+tige) dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$
2) Déterminer la matrice d'inertie du disque (D) en O dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ (on justifiera les termes nuls)
3) Déterminer la matrice d'inertie de la tige (T) en O dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$(on justifiera les termes nuls)
4) Déterminer la matrice d'inertie de l'ensemble disque et tige en O dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

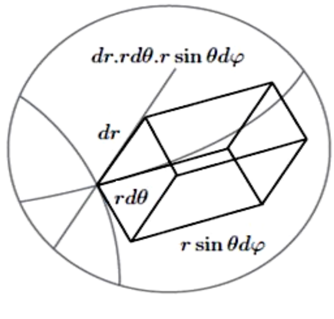
2 – Système demi-sphère pleine et tige

Maintenant le solide (S) est constitué d'une demi-sphère pleine (DS) de masse M et de rayon R et d'une tige (T) de même masse M et de longueur 2L. La tige est soudée au centre 0 du disque comme l'indique la figure
5) Déterminer la position du centre de gravité de la demi-sphère dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$
On détaillera le calcul intégral
Pour le calcul intégral on utilisera le découpage ci-contre
6) Déterminer la position du centre de gravité de l'ensemble (demi-sphère+tige) dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$
7) Déterminer la matrice d'inertie de la demi-sphère en O dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ (on justifiera les termes nuls)(On utilisera les coordonnées sphériques)
8) Déterminer la matrice d'inertie de l'ensemble tige et demi-sphère en O dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ (on justifiera les termes nuls)



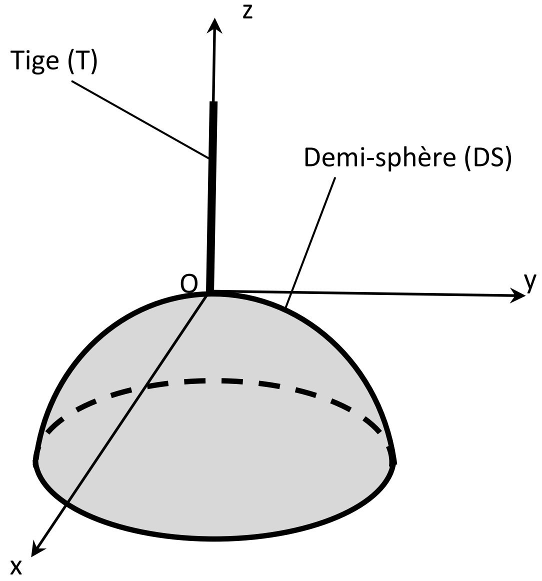
Rappel : Coordonnées sphériques





3 – Système demi-sphère pleine retournée et tige

On change la configuration de la demi-sphère qui est retournée
9) Déterminer la position du centre de gravité de l'ensemble (demi-sphère+tige) dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$
10) Déterminer la matrice d'inertie de la demi-sphère en O dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$(on justifiera les termes nuls)
(On utilisera les résultats de la question 7)
11) Déterminer la matrice d'inertie de l'ensemble tige et demi-sphère en O dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$
(on justifiera les termes nuls)



Rappel : Théorème de Huygens : en posant $\overrightarrow{OG}$ = a. $\vec{\boldsymbol{x}}$ + b. $\vec{\boldsymbol{y}}$ + c. $\vec{\boldsymbol{z}}$

$\bar{\bar{J}}$(O,S).$\vec{u}$ = $\bar{\bar{J}}$ (G,S) .$\vec{u}$ + m. $\overrightarrow{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG})$

$$\mathbf{I_{O,S/R}} = \begin{bmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \begin{bmatrix} m(b^2+c^2) & -m.a.b & -m.a.c \\ -m.a.b & m(a^2+c^2) & -m.b.c \\ -m.a.c & -m.b.c & m(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$