

Dynamique

Une tige (AB) homogène de masse m , de longueur $2a$ et de centre d'inertie G glisse sans frottement dans un anneau (A) circulaire et de rayon r .

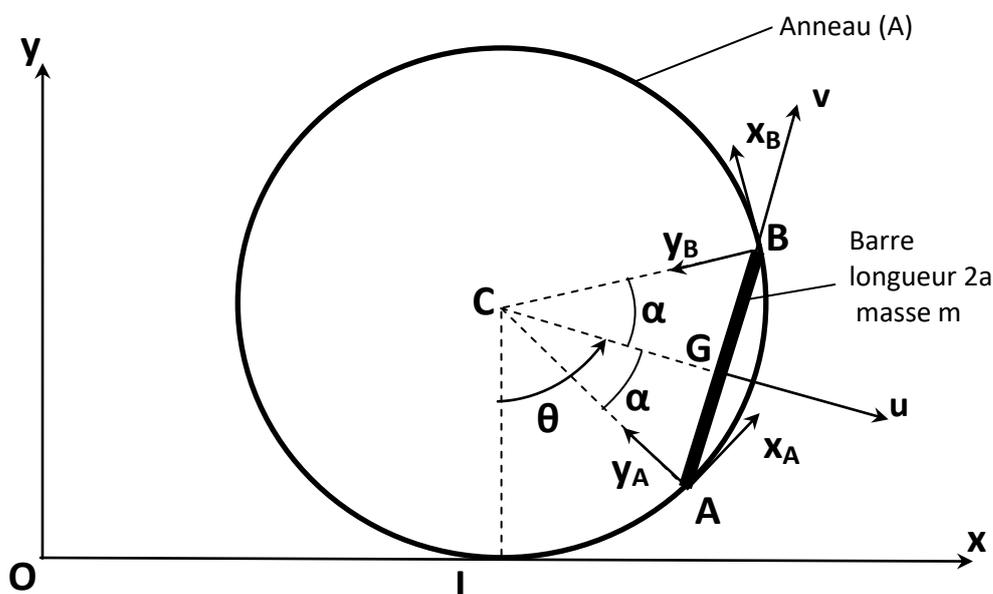
Le système reste dans le plan (xOy)

Le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à la partie fixe

L'anneau (A) roule sans glisser en I sur l'axe x avec une vitesse angulaire ω constante.

Le repère $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ est lié à la tige (AB)

On pose : $\theta = (\vec{CI}, \vec{CG})$; $\vec{OI} = x.\vec{x}$; $\vec{g} = -g.\vec{y}$; $\vec{CG} = L.\vec{u}$



1) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{\Omega_{AB/R}}$ le vecteur rotation de la barre (AB) par rapport au repère

2) Déterminer le vecteur vitesse du point C : $\overrightarrow{V_C/R}$

3) Déterminer le vecteur vitesse du point G : $\overrightarrow{V_G/R}$

4) Ecrire le torseur cinématique de la barre (AB) : $\{v_{AB/R}\}$

5) Déterminer le vecteur accélération du point G : $\overrightarrow{\Gamma_G/R}$

6) Démontrer que la matrice d'inertie de la barre (AB) en G est :

$$I(G, \text{barre}) = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} \end{bmatrix}_{(u,v,z)}$$

7) Déterminer le moment cinétique en G $\overrightarrow{\sigma_G \text{ tige}(AB)/R}$ de la barre (AB) par rapport à R

8) Déterminer le moment dynamique en G $\overrightarrow{\delta_G \text{ tige}(AB)/R}$ de la barre (AB) par rapport à R

9) Ecrire le torseur dynamique de la tige (AB) $\{D_{AB/R}\}$ en G

10) En appliquant le théorème du moment dynamique au point C dans le repère R, montrer que l'on obtient

l'équation : $\ddot{\theta} \left[L + \frac{a^2}{3L} \right] + \ddot{x} \cdot \cos\theta + g \cdot \sin\theta = 0$

11) Justifier que les actions de contact en A (\vec{R}_A) et en B (\vec{R}_B) s'écrivent :

$$\vec{R}_A = R_A \cdot \vec{y}_A \text{ et } \vec{R}_B = R_B \cdot \vec{y}_B$$

12) Ecrire \vec{R}_A et \vec{R}_B dans le repère $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ (on exprimera α en fonction de r et de a)

13) Faire le bilan des actions appliquées à la barre (AB) puis appliquer le théorème de la résultante dynamique, et déterminer les actions de contact aux points A et B (on fera les projections sur le repère $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$)

14) Calculer l'énergie cinétique de la barre (AB) $T_{(\text{barre AB}/R)}$

15) Calculer les travaux des forces extérieures exercées sur la barre (AB)

16) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique retrouver l'équation de la question 10)