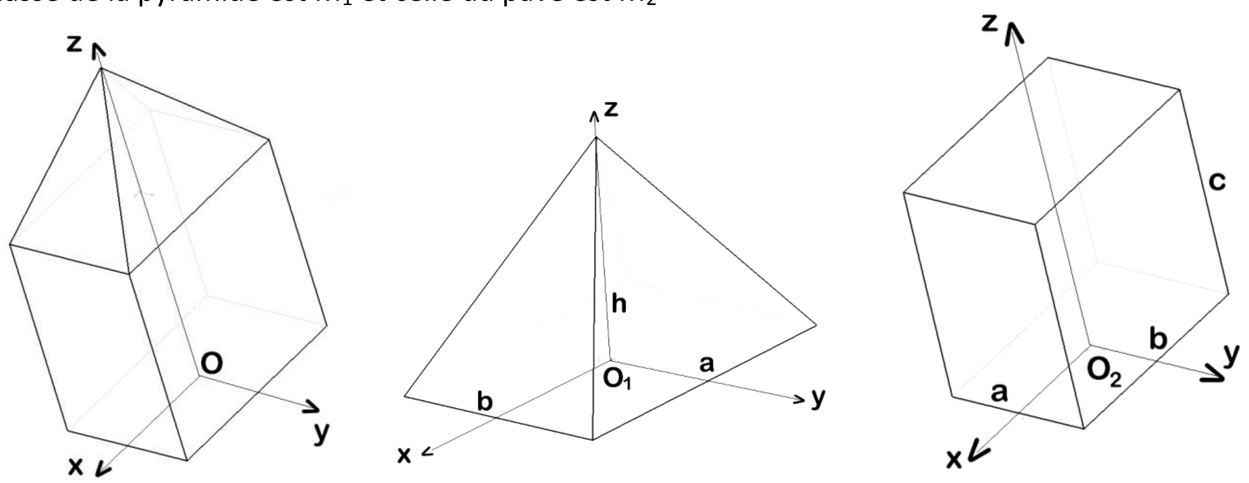
Contrôle mécanique du solide
Cinétique

Soit un solide (S) constitué :

- d'une pyramide de dimensions (base : a et b et hauteur : h)
- d'un pavé de dimensions a, b et c

La masse de la pyramide est M_1 et celle du pavé est M_2



1 – Système pyramide

1) Démontrer par calcul intégral que le volume de la pyramide est $V_1 = \frac{a.b.h}{3}$

2) Démontrer par calcul intégral que la position du centre de gravité de la pyramide dans le repère $(O_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est (0, 0, $\frac{h}{4}$)

3) Donnez en la justifiant la forme de la matrice d'inertie de la pyramide dans le repère $(O_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

4) Démontrer par calcul intégral que le moment d'inertie par rapport au plan (O_1xy) est $I_{O1xy} = M_1.\frac{h^2}{10}$

5) Démontrer par calcul intégral que le moment d'inertie par rapport au plan (O_1xz) est $I_{O1xz} = M_1.\frac{b^2}{20}$

6) En déduire le moment d'inertie par rapport au plan (O_1yz) ainsi que I_{O1x}, I_{O1y}, I_{O1z} et la matrice d'inertie de la pyramide dans le repère $(O_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

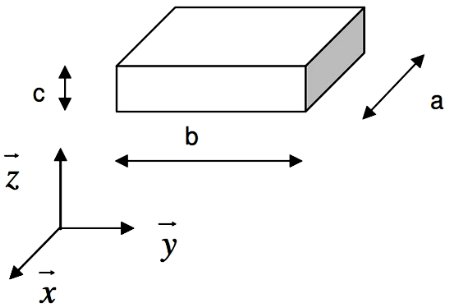
2 – Système pyramide et pavé

7) Déterminer la position du centre de gravité de l'ensemble {pyramide, pavé} dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en fonction de c et h

On donne :

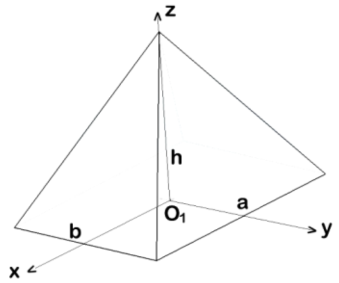
Pour le pavé de masse m , largeur a, longueur b et hauteur c, la matrice d'inertie exprimée en son **centre de gravité** est :

$$\mathbf{I_{G,S/R}} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



Pour la pyramide de masse m de dimensions a, b et h la matrice d'inertie exprimée en son **centre de gravité** est :

$$\mathbf{I_{G,S/R}} = \begin{bmatrix} \frac{m}{20}(b^2+3\frac{h^2}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{20}(a^2+3\frac{h^2}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{20}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



8) Donnez en la justifiant la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble {pyramide, pavé} dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

9) Déterminer les termes de la matrice d'inertie de l'ensemble {pyramide, pavé} dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

<u>Rappel : Théorème de Huygens :</u> en posant $\overrightarrow{OG}$ = a. $\vec{x}$ + b. $\vec{y}$ + c. $\vec{z}$

$\bar{\bar{J}}$(O,S).$\vec{u}$ = $\bar{\bar{J}}$ (G,S) .$\vec{u}$ + m. $\overrightarrow{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG})$

$$\mathbf{I_{O,S/R}} = \begin{bmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \begin{bmatrix} m(b^2+c^2) & -m.a.b & -m.a.c \\ -m.a.b & m(a^2+c^2) & -m.b.c \\ -m.a.c & -m.b.c & m(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$