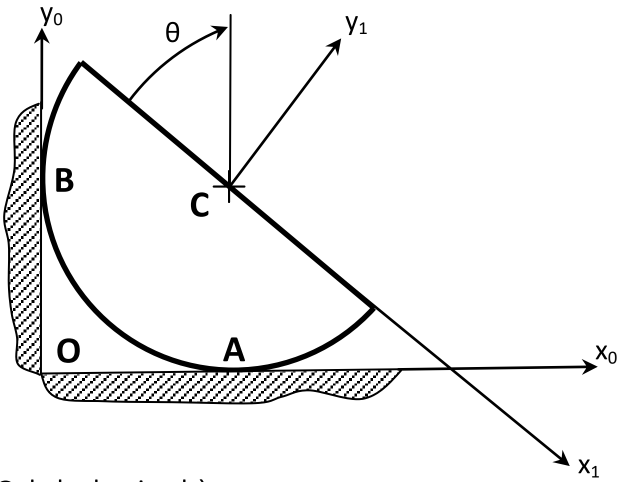
Contrôle mécanique du solide

Une demi-sphère pleine homogène, de rayon R et de masse M, est maintenue en contact sur une paroi verticale et sur le plan horizontal.



On l'abandonne à elle-même et elle se met à glisser sous l'action de la pesanteur.

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.

Le contact en A et B se fait sans frottement

Le repère (O, $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{z_0}$) est lié à la partie fixe

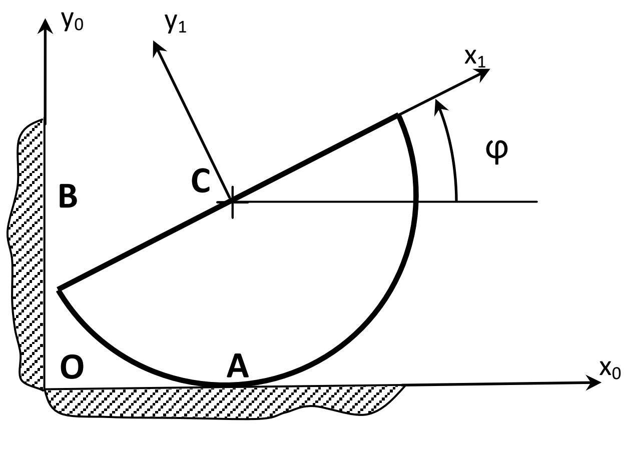
Le repère (C, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$) est lié à la demi-shère

On donne le moment d'inertie de la demi-sphère en son centre : $I_{c,z} = \frac{2}{5} M.R^2$

1) Déterminer par calcul intégral la position du centre de gravité G de la demi-sphère
2) Déterminer la vitesse du point C par rapport au repère fixe R_0 $\vec{V}_{C/R_0}$ dans le repère fixe (O, $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{z_0}$)
3) Par changement de point, déterminer la vitesse du point G par rapport au repère fixe R_0 $\vec{V}_{G/R_0}$ dans le repère fixe (O, $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{z_0}$)
4) Déterminer l'accélération de G par rapport au repère fixe $\vec{\Gamma}_{G/R_0}$.
On l'exprimera par ses composantes dans le repère fixe (O, $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{z_0}$)
5) Isoler la demi-sphère et faire le bilan des actions mécaniques appliquées
6) Par application du théorème de la résultante dynamique, écrire deux équations faisant intervenir les composantes des actions en A et B
7) Déterminer le moment cinétique en C de la demi-sphère $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_0})}$
8) Déterminer le moment dynamique en C de la demi-sphère $\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_0})}$
9) Par application du théorème du moment dynamique en C, déterminer une équation faisant intervenir θ et ses dérivées
10) Sachant que : $2.\ddot{\theta}.d\theta = d(\dot{\theta}^2)$, exprimer $\dot{\theta}^2$ en fonction de g, R et θ
11) Déterminer la norme de l'action de contact en B et préciser pour quelle(s) valeur(s) de θ elle est nulle

Démontrer que la norme de la vitesse de G ($\vec{V}_{G/R_0}$) pour cette valeur de θ est $V_G = \frac{3}{16}\sqrt{\frac{15.g.R}{2}}$

<u>Etude de la suite du mouvement</u>



12) Isoler la demi-sphère, faire le bilan des actions appliquées
13) Par application du théorème de la résultante dynamique, écrire deux équations faisant intervenir les composantes du vecteur accélération de G dans R_0 : $\ddot{x}_G$ et $\ddot{y}_G$
14) A partir du résultat des questions 11) et 13) en déduire la valeur de la composante de la vitesse de G sur Ox_0 : $\dot{x}_G$
15) Déterminer l'énergie cinétique $T_{S/R0}$ de la sphère dans R_0 en fonction de M, R, $\dot{x}_G$, $\dot{y}_G$, $\dot{\varphi}$
16) Déterminer l'énergie potentielle
Soit φ_M l'angle maximal atteint et $\varphi_0 = 0$ l'angle en début de cette phase
17) Par application du théorème de l'énergie cinétique entre ces deux instants correspondant à φ_0 et φ_M , déterminer une équation permettant de calculer φ_M
En déduire la valeur de φ_M

Rappels :

Le torseur $\{\tau_{(2\to1)}\}$ associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 sera noté :

$$\{\mathcal{T}_{(2\to1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{2\to1}}\\ \overrightarrow{M_{A_{2\to1}}}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{2\to1}} = X_A.\vec{x} + Y_A.\vec{y} + Z_A.\vec{z}\\ \overrightarrow{M_{A_{2\to1}}} = L_A.\vec{x} + M_A.\vec{y} + N_A.\vec{z}\end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = {}_A\begin{Bmatrix}X_A & L_A\\ Y_A & M_A\\ Z_A & N_A\end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinématique $\{v_{2/1)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R exprimé au point A sera noté :

$$\{v_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\\ \overrightarrow{V_{A_{S/R}}}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_x.\vec{x} + \omega_y.\vec{y} + \omega_z.\vec{z}\\ \overrightarrow{V_{A_{S/R}}} = v_{Ax}.\vec{x} + v_{Ay}.\vec{y} + v_{Az}.\vec{z}\end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = {}_A\begin{Bmatrix}\omega_x & v_{Ax}\\ \omega_y & v_{Ay}\\ \omega_z & v_{Az}\end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinétique $\{C_{S/R)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{C_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix}m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}}\\ \overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}}\\ \overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} = m\,\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\ S/R}} + \overrightarrow{J_A}(S,\overrightarrow{\Omega_{S/R}})\end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

$\overrightarrow{J_A}$ = opérateur d'inertie de S en A

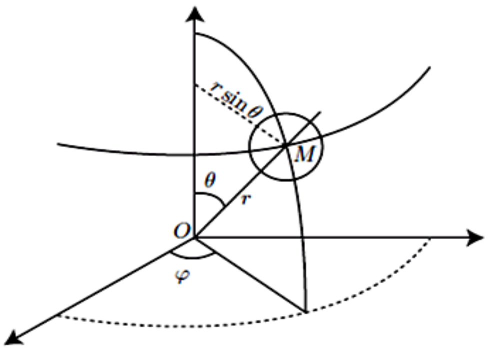
Le torseur dynamique $\{D_{S/R)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

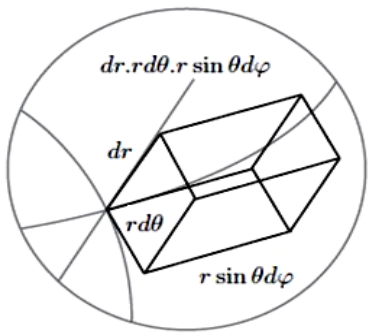
$$\{D_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix}m\,\overrightarrow{\Gamma_{G_{S/R}}}\\ \overrightarrow{\delta_{A_{S/R}}}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}m\,\overrightarrow{\Gamma_{G_{S/R}}}\\ \overrightarrow{\delta_{A(S/R)}} = \left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}\right]_R + \mathrm{m}.\overrightarrow{V_{A_{S/R}}}\wedge\overrightarrow{V_{G_{S/R}}}\end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

L'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2}\{C_{(S/R)}\}\otimes\{v_{(S/R)}\} = m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}}.\overrightarrow{V_{A_{S/R}}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}}$$

Coordonnées sphériques





Pour une demi-sphère pleine de rayon R

$$\mathrm{I_{O,S/R}} = \begin{bmatrix}\frac{2m}{5}R^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2m}{5}R^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2m}{5}R^2\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$