Système à barres et ressort

Soient deux barres (1) et (2) de longueur 2L , de masse m et de centre de gravité G_1 et G_2 respectivement reliées par un ressort de raideur k et de longueur libre l_0

Point 0 : Liaison pivot d'axe Z_0

Point A : Liaison pivot d'axe Z_0

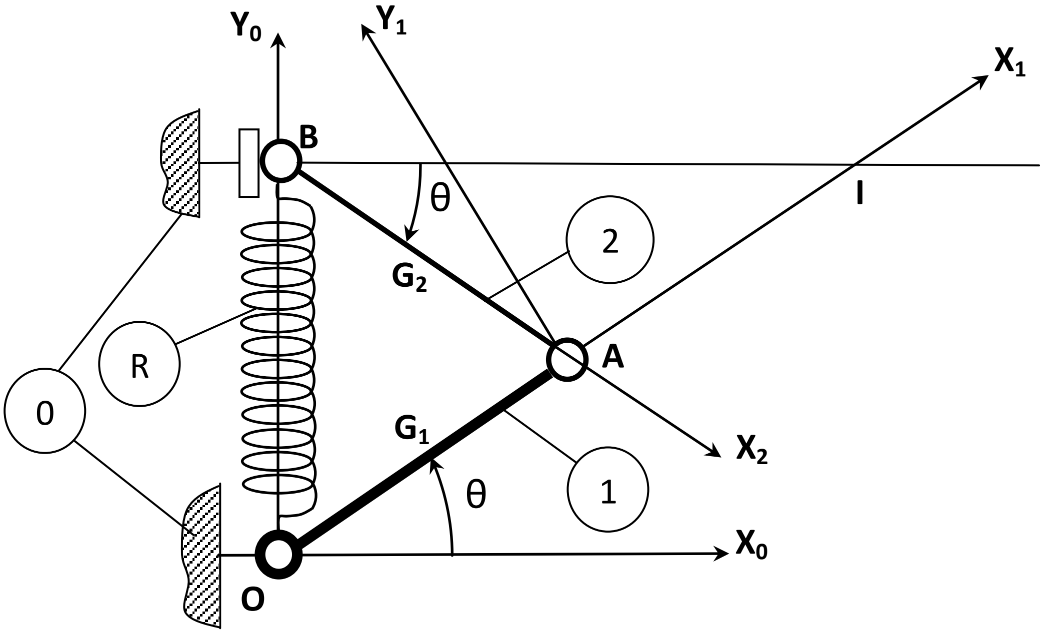
Point B : Liaison linéaire annulaire d'axe Y_0

I : Centre de rotation instantané de la barre (2) : $\overrightarrow{AI} = 2L.\overrightarrow{x_1}$; $\overrightarrow{BI} = 4L.\cos\theta.\overrightarrow{x_0}$

$\overrightarrow{OG_1} = L.\overrightarrow{x_1}$; $\overrightarrow{AG_2} = L.\overrightarrow{x_2}$; $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}) = \theta$; $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2}) = -\theta$;

Moment d'inertie au centre de gravité des barres : $\mathbf{I_{G1z} = I_{G2z} = m\frac{L^2}{3}}$

On cherche à établir l'équation du mouvement du système



1) Ecrire le torseur de l'action en A $\{\mathcal{T}_A\}$ dans le repère $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0})$
2) Ecrire le torseur de l'action en B $\{\mathcal{T}_B\}$ dans le repère $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$
3) Ecrire le torseur du poids de la barre (1) $\{\mathcal{T}_{(g\to 1)}\}$ en G_1
4) Ecrire le torseur du poids de la barre (2) $\{\mathcal{T}_{(g\to 2)}\}$ en G_2
5) Ecrire le torseur de l'action du ressort (R) $\{\mathcal{T}_R\}$ en O puis en I
6) Ecrire le vecteur vitesse du point G_1 dans le repère R_0 : $\overrightarrow{V_{G_1/R_0}}$

7) Ecrire le vecteur vitesse du point G_2 dans le repère R_0 : $\overrightarrow{V_{G_2/R_0}}$ dans le repère $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$

8) Ecrire le vecteur accélération du point G_2 dans le repère R_0 : $\overrightarrow{\Gamma_{G_2/R_0}}$ dans le repère $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$

9) Isoler la barre (1), faire le bilan des actions mécaniques, écrire le torseur résultant $\{\mathcal{T}_{(ext\to 1)}\}$ des actions appliquées au point O
10) Isoler la barre (2), faire le bilan des actions mécaniques, écrire le torseur résultant $\{\mathcal{T}_{(ext\to 2)}\}$ des actions appliquées au point I
11) Ecrire le moment cinétique de la barre (1) en G_1 $\overrightarrow{\sigma_{G_1\ 1/R_0}}$ puis en O $\overrightarrow{\sigma_{O\ 1/R_0}}$

12) Ecrire le moment dynamique de la barre (1) en O $\overrightarrow{\delta_{O\ 1/R_0}}$

13) Appliquer le théorème du moment dynamique à la barre (1) au point O et établir l'équation de son mouvement

14) Ecrire le moment cinétique de la barre (2) en G_2 $\overrightarrow{\sigma_{G_2\ 2/R_0}}$

15) Ecrire le moment dynamique de la barre (2) en G_2 $\overrightarrow{\delta_{G_2\ 2/R_0}}$ puis en I $\overrightarrow{\delta_{I\ 2/R_0}}$

16) Appliquer le théorème du moment dynamique à la barre (2) au point I et établir l'équation de son mouvement

17) En éliminant les inconnues de l'action de liaison en A en déduire l'équation du mouvement du système en fonction des caractéristiques géométriques et du paramètre θ et ses dérivées

Rappels :

Le torseur $\{\tau_{(2\to1)}\}$ associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 sera noté :

$$\{\mathcal{T}_{(2\to1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{A_{2\to1}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} = X_A.\vec{x} + Y_A.\vec{y} + Z_A.\vec{z} \\ \overrightarrow{M_{A_{2\to1}}} = L_A.\vec{x} + M_A.\vec{y} + N_A.\vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinématique $\{v_{2/1)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R exprimé au point A sera noté :

$$\{v_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_x.\vec{x} + \omega_y.\vec{y} + \omega_z.\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A_{S/R}}} = v_{Ax}.\vec{x} + v_{Ay}.\vec{y} + v_{Az}.\vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_x & v_{Ax} \\ \omega_y & v_{Ay} \\ \omega_z & v_{Az} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinétique $\{C_{S/R)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{C_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} m\overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\ S/R}} + \overrightarrow{J_A}(S, \overrightarrow{\Omega_{S/R}}) \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} \quad \overrightarrow{J_A} = \text{opérateur d'inertie de S en A}$$

Le torseur dynamique $\{D_{S/R)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{D_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} m\overrightarrow{\Gamma_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\delta_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\overrightarrow{\Gamma_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\delta_{A(S/R)}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}\right]_R + m.\overrightarrow{V_{A_{S/R}}} \wedge \overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

L'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2}\{C_{(S/R)}\} \otimes \{v_{(S/R)}\} = m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}}.\overrightarrow{V_{A_{S/R}}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}}$$