

Dynamique

Tige et plaque

Le repère $R_0 (\mathbf{O}, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié à la partie fixe

Le système en mouvement est constitué :

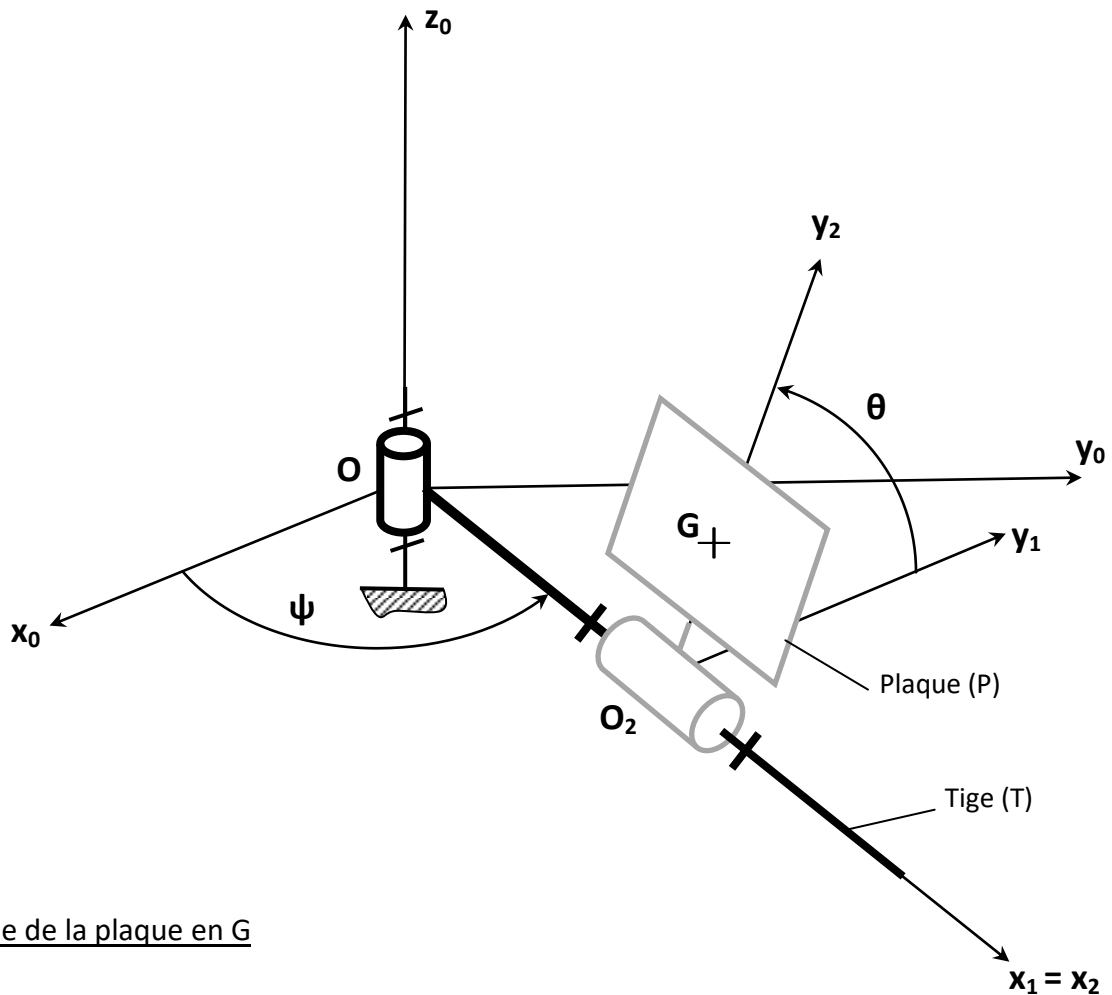
- d'une tige (T) de longueur $2L$, de **masse négligeable**, en liaison pivot (O, \vec{z}_0) avec la partie fixe liée au repère $R_1 (\mathbf{O}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ avec $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$; $\vec{OO}_2 = L \cdot \vec{x}_1$

La position de la tige (T) est repérée par l'angle $\psi(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$

- d'une plaque carrée (P) de masse m , de côté $2a$, en liaison pivot (O_2, \vec{x}_1) avec la tige (T), de centre de gravité G

La plaque (P) est liée au repère $R_2 (\mathbf{O}_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ avec $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$; $\vec{O}_2\vec{G} = a \cdot \vec{y}_2$

La position de la plaque (P) est repérée par l'angle $\theta(t) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$



Matrice d'inertie de la plaque en G

$$I(G, \text{plaque}) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \quad \text{avec } C = 2A$$

Questions

- 1) Représenter les figures de changement de repère faisant apparaître les angles ψ et θ
- 2) Déterminer les vecteurs rotation $\overrightarrow{\Omega_{T/R_0}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{P/R_0}}$
- 3) Déterminer le vecteur vitesse du point G $\overrightarrow{V_{G/R_0}}$ par dérivation (à exprimer dans le repère R_2)
- 4) Déterminer le vecteur vitesse du point G $\overrightarrow{V_{G/R_0}}$ par changement de point avec O (à exprimer dans le repère R_2)
- 5) Déterminer le vecteur accélération du point G $\overrightarrow{\Gamma_{G/R_0}}$ par dérivation (à exprimer dans le repère R_2)
- 6) Justifier la forme de la matrice d'inertie de la plaque donnée dans l'énoncé
- 7) Déterminer les expressions de A et C en fonction de a et de m
- 8) Par application du théorème de Huygens, déterminer la matrice d'inertie de la plaque (P) en O_2
- 9) Déterminer l'expression du moment cinétique en G de la plaque (P) par rapport à R_0 $\overrightarrow{\sigma_{G P/R_0}}$
- 10) Déterminer l'expression du moment cinétique en O de la plaque (P) par rapport à R_0 $\overrightarrow{\sigma_{O P/R_0}}$
- 11) Ecrire le torseur cinétique de (P) $\{C_{P/R_0}\}$ en O
- 12) Déterminer l'expression du moment dynamique en G de la plaque (P) par rapport à R_0 $\overrightarrow{\delta_{G P/R_0}}$
- 13) Déterminer l'expression du moment dynamique en O de la plaque (P) par rapport à R_0 $\overrightarrow{\delta_{O P/R_0}}$
- 14) Ecrire le torseur dynamique de (P) $\{D_{P/R_0}\}$ en O
- 15) Calculer l'énergie cinétique de la plaque (P) T (P/R₀) dans son mouvement par rapport à R_0

Rappels :

Le torseur $\{T_{(2 \rightarrow 1)}\}$ associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 sera noté :

$$\{T_{(2 \rightarrow 1)}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}} \\ \overrightarrow{M_{A2 \rightarrow 1}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}} = X_A \cdot \vec{x} + Y_A \cdot \vec{y} + Z_A \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{A2 \rightarrow 1}} = L_A \cdot \vec{x} + M_A \cdot \vec{y} + N_A \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinématique $\{v_{2/1}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R exprimé au point A sera noté :

$$\{v_{(S/R)}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{AS/R}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_x \cdot \vec{x} + \omega_y \cdot \vec{y} + \omega_z \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{V_{AS/R}} = v_{Ax} \cdot \vec{x} + v_{Ay} \cdot \vec{y} + v_{Az} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_{Ax} \\ \omega_y & v_{Ay} \\ \omega_z & v_{Az} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinétique $\{C_{S/R}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{C_{(S/R)}\} = \begin{Bmatrix} m \overrightarrow{V_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{AS/R}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} m \overrightarrow{V_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{AS/R}} = m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{AS/R}} + \overrightarrow{J_A}(S, \overrightarrow{\Omega_{S/R}}) \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} \quad \overrightarrow{J_A} = \text{opérateur d'inertie de S en A}$$

Le torseur dynamique $\{D_{S/R}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{D_{(S/R)}\} = \begin{Bmatrix} m \overrightarrow{\Gamma_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{AS/R}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} m \overrightarrow{\Gamma_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{AS/R}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{AS/R}} \right]_R + m \cdot \overrightarrow{V_{AS/R}} \wedge \overrightarrow{V_{GS/R}} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

L'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \{C_{(S/R)}\} \otimes \{v_{(S/R)}\} = \frac{1}{2} (m \overrightarrow{V_{GS/R}} \cdot \overrightarrow{V_{AS/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{AS/R}})$$