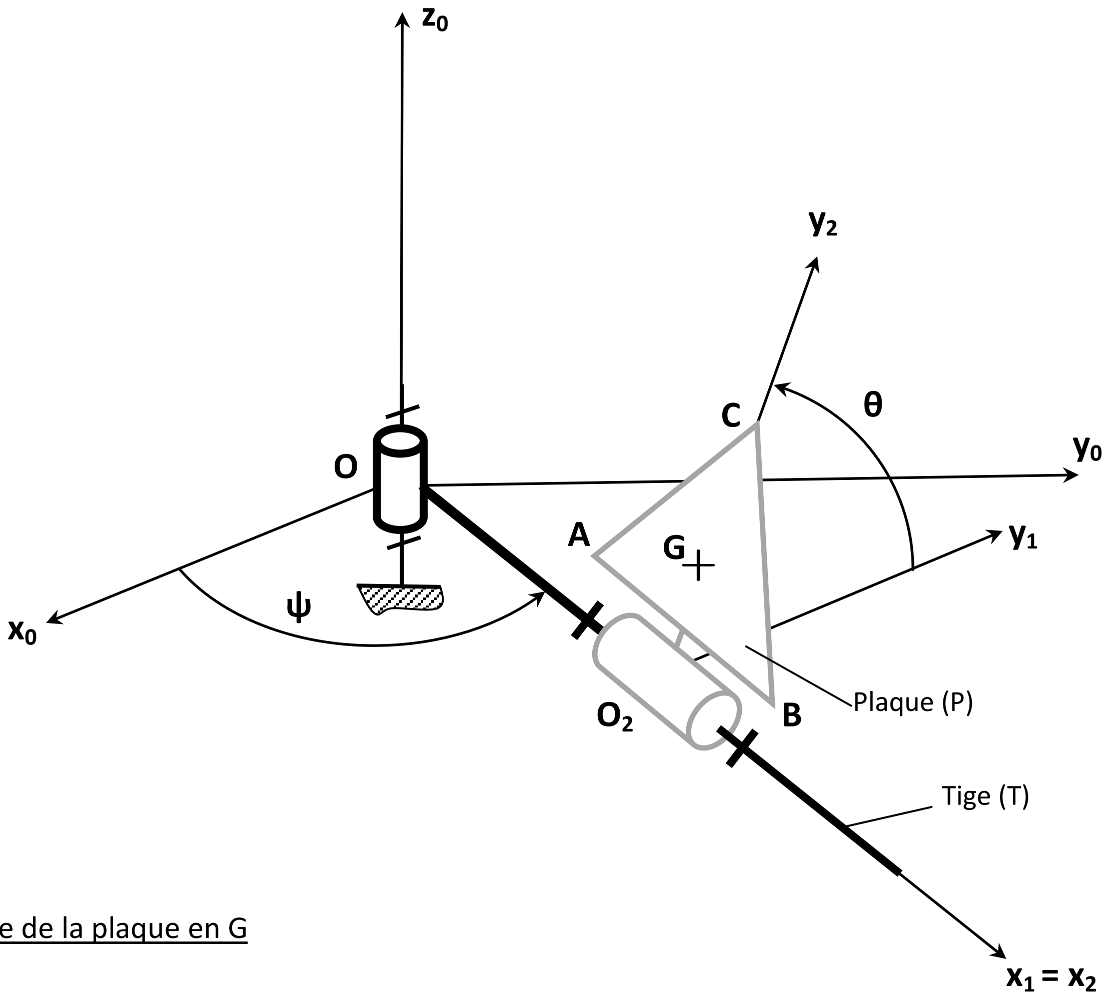
Dynamique

Le repère R_0 ($\boldsymbol{O}, \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y_0}}, \overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$) est lié à la partie fixe
Le système en mouvement est constitué :
- d'une tige (T) de longueur 2L, de **masse négligeable**, en liaison pivot (O, $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$) avec la partie fixe liée au repère R_1 ($\boldsymbol{O}, \overrightarrow{\boldsymbol{x_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{z_1}}$) avec $\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{OO_2}} = \boldsymbol{L}.\overrightarrow{\boldsymbol{x_1}}$

La position de la tige (T) est repérée par l'angle $\psi(t) = (\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}, \overrightarrow{\boldsymbol{x_1}})$
- d'une plaque triangulaire (P) ayant pour forme un triangle équilatéral de coté 2a, de masse m, en liaison pivot (O_2, $\overrightarrow{\boldsymbol{x_1}}$) avec la tige(T) , de centre de gravité G

La plaque (P) est liée au repère R_2 ($\boldsymbol{O_2}, \overrightarrow{\boldsymbol{x_2}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y_2}}, \overrightarrow{\boldsymbol{z_2}}$) avec $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{O_2G}} = \boldsymbol{b}.\overrightarrow{\boldsymbol{y_2}}$
La position de la plaque (P) est repérée par l'angle $\theta(t) = (\overrightarrow{\boldsymbol{y_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y_2}})$



Matrice d'inertie de la plaque en G

$$I(G, plaque) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})} \quad \text{avec } C = 2A$$

Questions

1) Représenter les figures de changement de repère faisant apparaître les angles ψ et θ

2) Déterminer les vecteurs rotation $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{T/R_0}}$ **et** $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{P/R_0}}$

3) Démontrer que la masse m de la plaque en fonction de σ (masse surfacique) et de a est **m = σ** $\boldsymbol{\sqrt{3}\, a^2}$

4) Sachant qu'on considère que le point O_2 se situe sur la droite (AB), démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{O_2G}}$ en fonction de a est $\overrightarrow{\boldsymbol{O_2G}}$ **=** $\mathbf{a.}\frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{\boldsymbol{y_2}}$

5) Déterminer le vecteur vitesse du point G $\overrightarrow{\boldsymbol{V}_{G/R_0}}$ par dérivation (*à exprimer dans le repère R_2*)

6) Déterminer le vecteur vitesse du point G $\overrightarrow{\boldsymbol{V}_{G/R_0}}$ par changement de point avec O

(*à exprimer dans le repère R_2*)

7) Déterminer le vecteur accélération du point G $\overrightarrow{\boldsymbol{\Gamma}_{G/R_0}}$ par dérivation (*à exprimer dans le repère R_2*)

8) Justifier la forme de la matrice d'inertie de la plaque donnée dans l'énoncé

9) Déterminer les expressions de A, B et C en fonction de a et de m

10) Par application du théorème de Huygens, déterminer la matrice d'inertie de la plaque (P) en O_2

11) Déterminer l'expression du moment cinétique en G de la plaque (P) par rapport àR_0 $\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_{G\ P/R_0}}$

12) Déterminer l'expression du moment cinétique en O de la plaque (P) par rapport àR_0 $\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_{O\ P/R_0}}$

13) Ecrire le torseur cinétique de (P) $\left\{\mathcal{C}_{P/R_0}\right\}$ en O

14) Déterminer l'expression du moment dynamique en G de la plaque (P) par rapport àR_0 $\overrightarrow{\boldsymbol{\delta}_{G\ P/R_0}}$

15) Déterminer l'expression du moment dynamique en O de la plaque (P) par rapport àR_0 $\overrightarrow{\boldsymbol{\delta}_{O\ P/R_0}}$

16) Ecrire le torseur dynamique de (P) $\left\{\mathcal{D}_{P/R_0}\right\}$ en O

17) Calculer l'énergie cinétique de la plaque (P) T(P/R_0) dans son mouvement par rapport à R_0

Rappels :

Le torseur $\{\tau_{(2\to1)}\}$ associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 sera noté :

$$\{\mathcal{T}_{(2\to1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{A_{2\to1}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} = X_A.\vec{x} + Y_A.\vec{y} + Z_A.\vec{z} \\ \overrightarrow{M_{A_{2\to1}}} = L_A.\vec{x} + M_A.\vec{y} + N_A.\vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinématique $\{ v_{2/1} \}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R exprimé au point A sera noté :

$$\{v_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_x.\vec{x} + \omega_y.\vec{y} + \omega_z.\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A_{S/R}}} = v_{Ax}.\vec{x} + v_{Ay}.\vec{y} + v_{Az}.\vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_x & v_{Ax} \\ \omega_y & v_{Ay} \\ \omega_z & v_{Az} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinétique $\{ C_{S/R)} \}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{C_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\ S/R}} + \overrightarrow{J_A}(S, \overrightarrow{\Omega_{S/R}}) \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

$\overrightarrow{J_A}$ = opérateur d'inertie de S en A

Le torseur dynamique $\{ D_{S/R)} \}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{D_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\delta_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\delta_{A(S/R)}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}\right]_R + \mathrm{m}.\overrightarrow{V_{A_{S/R}}} \wedge \overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

L'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2}\{C_{(S/R)}\} \otimes \{v_{(S/R)}\} = \frac{1}{2}\left(m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}}.\overrightarrow{V_{A_{S/R}}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} \right)$$