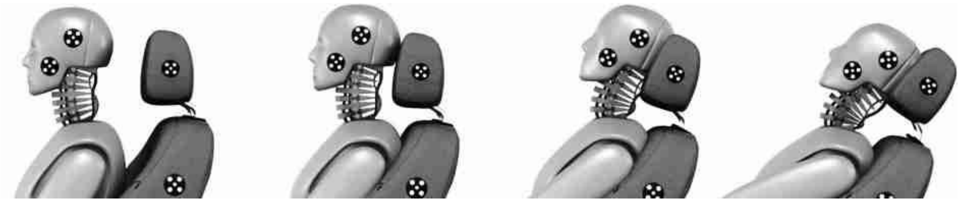
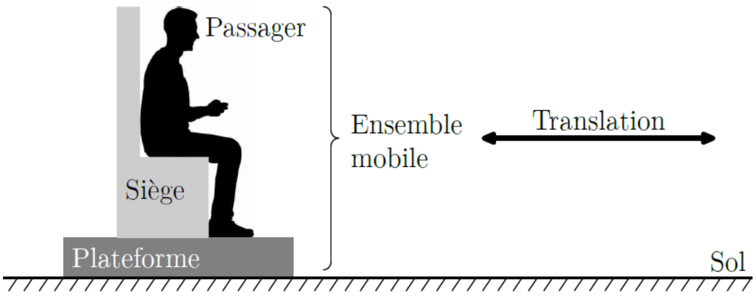
Contrôle continu de dynamique

Afin de comprendre les traumatismes causés par le phénomène de « coup du lapin », il est nécessaire, de développer un dispositif expérimental particulier, permettant de générer des niveaux d'énergie faibles et non lésionnels à un volontaire. Ces faibles niveaux d'énergie correspondent à des accélérations et décélérations fixées à $\pm 0{,}3g$ pendant une durée de 1 seconde chacune.



Principe retenu pour la conception du Sled

Le principe retenu par les ingénieurs du bureau d'études pour concevoir le Sled (figure ci-dessous) est inspiré des crashtests réalisés dans le domaine automobile :
— une plateforme est animée d'un mouvement de translation horizontale par rapport au bâti ;
— un passager (volontaire ou mannequin) peut prendre place sur cette plateforme via un siège ;
— un dispositif de mise en mouvement permet d'atteindre les accélérations et décélérations attendues.



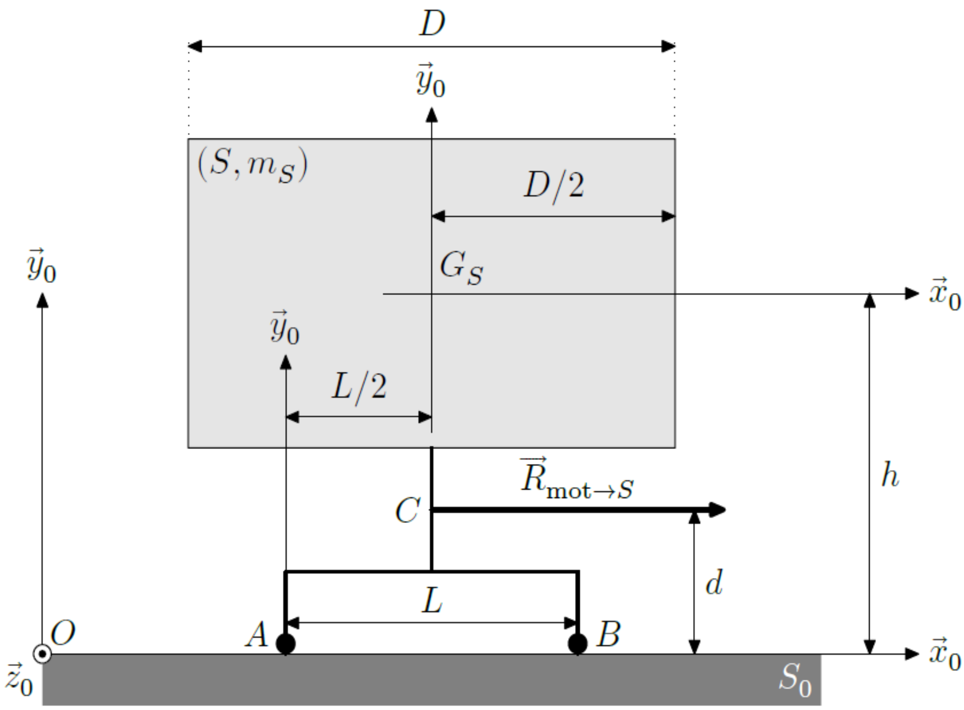
Hypothèses d'étude

— Pour cette étude, les ingénieurs du bureau d'études choisissent de ***modéliser la liaison glissière*** *entre l'ensemble mobile S et le bâti S_0 dans le plan de symétrie $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$ de la figure ci-après par* ***deux contacts ponctuels en A et en B,*** *de normale $\overrightarrow{y_0}$, distants de L.*

— L'étude suivante est menée ***uniquement en phase d'accélération*** *définie pour un essai avec un passager volontaire*

— Le frottement est négligé

Paramétrage du mobile S du sled



Notations et données

— Le repère $R_0\,(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ associé au solide S_0 est supposé galiléen.
— Le repère $R_S\,(Gs, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ associé à l'ensemble mobile S de masse M_s.
— t, le temps, exprimé en secondes.
— m_S, la masse de l'ensemble mobile S, G_S son centre de gravité tel que $x(t) = \overrightarrow{OG_S} \cdot \overrightarrow{x_0}$.
— $\overrightarrow{V_{G_s\,,S/S_0}} = v(t) \cdot \overrightarrow{x_0}$, la vitesse du centre de gravité G_S de l'ensemble mobile S par rapport au bâti S_0.
— $\overrightarrow{a_{G_s\,,S/S_0}} = a(t) \cdot \overrightarrow{x_0}$, l'accélération du centre de gravité G_S de l'ensemble mobile S par rapport au bâti S_0.
— L'accélération de la pesanteur est telle que $\vec{g} = -\,g.\overrightarrow{y_0}$ avec g = 9,81 m.s$^{-2.}$

— Les actions transmissibles par les deux contacts ponctuels seront respectivement notées :

$$\{\mathcal{T}_{A\,(S_0\to S)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} Y_A.\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ et } \{\mathcal{T}_{B\,(S_0\to S)}\} = {}_B\begin{Bmatrix} Y_B.\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

— L'action mécanique motrice qui permet de mettre en mouvement l'ensemble mobile S par rapport au bâti S_0 est modélisée par un glisseur au point C, noté :

$$\{\mathcal{T}_{mot\to S}\} = {}_C\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{mot\to S}} = R.\overrightarrow{x_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$ avec $R > 0$ en phase d'accélération.

— Les principales caractéristiques dimensionnelles indiquées sur la figure précédente ont été estimées pour avoir une position réaliste du volontaire dans un siège de voiture, D = 1000 mm, d = 220 mm et h = 1100 mm.

Détermination de l'effort normal Y_B
On se place au début de la phase d'accélération de translation avec : $\overrightarrow{a_{G_s\,,S/S_0}} = a_c.\overrightarrow{x_0}$ **avec** a_c = constante

1) Ecrire le torseur de l'action de la pesanteur $\{\mathcal{T}_{(g\to S)}\}$ exprimé au point G_s

2) Ecrire le torseur de l'action de la pesanteur $\{\mathcal{T}_{(g\to S)}\}$ exprimé au point A

3) Ecrire les torseurs $\{\mathcal{T}_{A\,(S_0\to S)}\}$, $\{\mathcal{T}_{B\,(S_0\to S)}\}$, $\{\mathcal{T}_{mot\to S}\}$ exprimés au point A

4) Isoler l'ensemble mobile S et effectuer l'inventaire des actions mécaniques extérieures qui s'appliquent sur cet ensemble.

5) Ecrire le torseur résultant des actions extérieures appliquées à S $\{\mathcal{T}_{(ext\to S)}\}$ exprimé au point A

6) Exprimer la résultante dynamique de l'ensemble mobile S dans son mouvement par rapport au bâti S_0

7) Démontrer que $\overrightarrow{\delta_{G_s\ S/S_0}}$ le moment dynamique en G_S de l'ensemble mobile S dans son mouvement par rapport au bâti S_0 est nul

8) Exprimer $\overrightarrow{\delta_{A\ S/S_0}}$ le moment dynamique en A de l'ensemble mobile S dans son mouvement par rapport au bâti S_0 en fonction de son accélération a_c , de sa masse m_S et de la hauteur h

9) Ecrire le torseur dynamique $\{D_{(S/S_0)}\}$ de l'ensemble mobile S dans son mouvement par rapport au bâti S_0 exprimé au point A

10) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à S_0 et en déduire trois équations faisant intervenir les composantes d'actions mécaniques Y_B et R

11) Exprimer la composante Y_B en fonction de M_S , a_C, R, d, L g et h

12) Exprimer la composante R en fonction de M_S et a_C

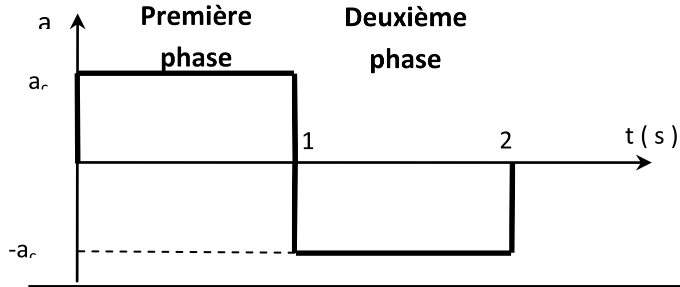
Détermination de la longueur L

13) Donner la condition sur Y_B qui traduit le non-basculement autour de l'axe $(A, \overrightarrow{z_0})$ de l'ensemble mobile S lors de la phase d'accélération.

14) En déduire la longueur minimale du guidage entre l'ensemble mobile S et le bâti S_0 en fonction de l'accélération a_c , de g et de paramètres géométriques pour garantir le non-basculement autour de l'axe $(A, \overrightarrow{z_0})$ lors de la phase d'accélération.

On donne ci-contre le graphe d'accélération du mobile S en fonction du temps.
On note $\overrightarrow{V_{G_s\ ,S/S_0}} = v(t)\ .\ \overrightarrow{x_0}$ la vitesse de G_s centre de gravité de S dans son mouvement par rapport à S_0
On se place dans la première phase

15) Sachant qu'à t = 0 le mobile a une vitesse nulle, déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction de a_c et de t



Courbe de l'accélération de S en fonction du temps

On note t_0 l'instant de début de la phase d'accélération et t_1 l'instant de fin de la phase d'accélération

16) Calculer l'énergie cinétique $\boldsymbol{T}_{(S/S_0)}$ de l'ensemble mobile S dans son mouvement par rapport au bâti S_0 ainsi que sa variation entre les instants t_0 et t_1

17) Calculer l'énergie potentielle $\boldsymbol{U}_{(S/S_0)}$ de l'ensemble mobile S ainsi que sa variation entre les instants t_0 et t_1

18) Calculer le travail des actions extérieures W_{ext} ainsi que sa variation entre les instants t_0 et t_1

19) Calculer le travail des actions extérieures W_{int} ainsi que sa variation entre les instants t_0 et t_1

20) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S dans mouvement par rapport à S_0 et établir une relation qui permet d'exprimer la composante R en fonction de M_S , t_0, t_1 et a_C.
Retrouver l'expression établie à la question 12)

Rappels :

Le torseur $\{\tau_{(2\to1)}\}$ associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 sera noté :

$$\{\mathcal{T}_{(2\to1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{2\to1}}\\ \overrightarrow{M_{A_{2\to1}}}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{2\to1}} = X_A.\vec{x} + Y_A.\vec{y} + Z_A.\vec{z}\\ \overrightarrow{M_{A_{2\to1}}} = L_A.\vec{x} + M_A.\vec{y} + N_A.\vec{z}\end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = {}_A\begin{Bmatrix}X_A & L_A\\ Y_A & M_A\\ Z_A & N_A\end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinématique $\{v_{2/1)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R exprimé au point A sera noté :

$$\{v_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\\ \overrightarrow{V_{A_{S/R}}}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_x.\vec{x} + \omega_y.\vec{y} + \omega_z.\vec{z}\\ \overrightarrow{V_{A_{S/R}}} = v_{Ax}.\vec{x} + v_{Ay}.\vec{y} + v_{Az}.\vec{z}\end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = {}_A\begin{Bmatrix}\omega_x & v_{Ax}\\ \omega_y & v_{Ay}\\ \omega_z & v_{Az}\end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinétique $\{C_{S/R)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{C_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix}m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}}\\ \overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}}\\ \overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} = m\,\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\ S/R}} + \overrightarrow{J_A}(S,\overrightarrow{\Omega_{S/R}})\end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$ $\overrightarrow{J_A}$ **= opérateur d'inertie de S en A**

Le torseur dynamique $\{D_{S/R)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{D_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix}m\,\overrightarrow{\Gamma_{G_{S/R}}}\\ \overrightarrow{\delta_{A_{S/R}}}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}m\,\overrightarrow{\Gamma_{G_{S/R}}}\\ \overrightarrow{\delta_{A(S/R)}} = \left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}\right]_R + \mathrm{m}.\overrightarrow{V_{A_{S/R}}}\wedge\overrightarrow{V_{G_{S/R}}}\end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

<u>L'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :</u>

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2}\{C_{(S/R)}\}\otimes\{v_{(S/R)}\} = \frac{1}{2}\left(m\,\overrightarrow{V_{G_{S/R}}}.\overrightarrow{V_{A_{S/R}}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}}\right)$$

<u>Le théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides :</u>

La dérivée, par rapport à la date t , de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble (E) de solides est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E) et des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de (E)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathrm{T}_{(E/Rg)} = P_{(\bar{E}\to E/Rg)} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\mathrm{P}_{(\mathrm{S_i}\leftrightarrow\mathrm{S_j})}}$$

avec $\mathrm{T}_{(E/Rg)}$ **= énergie cinétique galiléenne de (E)**

Ce théorème s'écrit également en faisant intervenir le travail des actions mécaniques entre deux dates t_1 et t_2 :

$$\boxed{\mathrm{T}_{t_2(E/Rg)} - \mathrm{T}_{t_1(E/Rg)} = \mathrm{W}_{t_1\ (\bar{E}\to E/Rg)}^{t_2} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\mathrm{W}_{t_1\ (\mathrm{S_i}\leftrightarrow\mathrm{S_j})}^{t_2} = \mathrm{Wext}_{t_1}^{t_2} + \mathrm{Wint}_{t_1}^{t_2}}$$