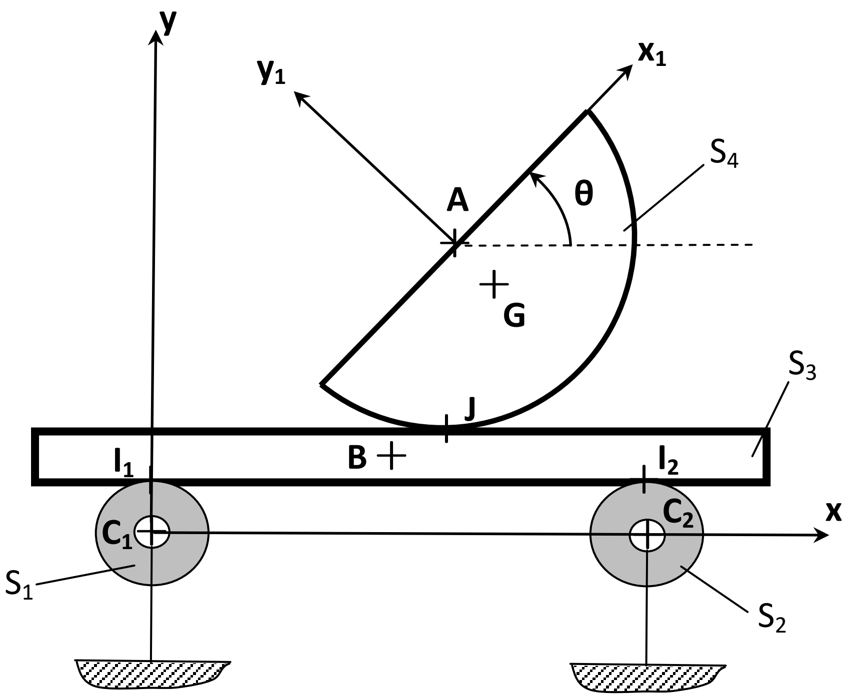
Contrôle mécanique du solide

Le problème est plan (2-D). Le système est constitué de quatre corps : une bascule ayant la forme d'un demi-disque (de rayon R, de masse M) est posée sur un rail (de longueur L, de masse m) qui est supporté à son tour par deux roulettes (de rayon r, de masse m) donc les centres (C_1 et C_2) sont fixes. Les mouvements entre le demi-disque et le rail ainsi que le mouvement entre le rail et les roulettes se font sans glisser. On cherche à écrire l'(es) équation(s) du mouvement du demi-disque.



L'action en J sera modélisée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}_J\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_J}\\ \overrightarrow{M_J}\end{matrix}\right\}_J = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_J} = X_J.\vec{y} + Y_J.\vec{y}\\ \overrightarrow{M_J} = \vec{0}\end{matrix}\right\}_{J\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Le poids du demi-disque sera modélisé par le torseur :

$$\{\mathcal{T}_{g\to D}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{g\to D}}\\ \overrightarrow{M_{g\to D}}\end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{g\to D}} = -M.g.\vec{y}\\ \overrightarrow{M_O} = \vec{0}\end{matrix}\right\}_{G\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Matrice d'inertie de S_4 en A

$$I_{(A,S_4)} = \begin{bmatrix} M\dfrac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & M\dfrac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & M\dfrac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$$

S_1 = roulette 1
S_2 = roulette 2
S_3 = rail 3
S_4 = demi-disque 4
A = centre du demi-disque
B = centre du rail
G = centre de gravité du demi-disque
C_1 = centre du galet 1
C_2 = centre du galet 2
I_1 = Point de contact S_1/S_3
I_2 = Point de contact S_2/S_3
J = Point de contact S_3/S_4

$\overrightarrow{I_1B} = u.\vec{x}$

$\overrightarrow{I_1A} = x.\vec{x} + R.\vec{y}$

$\overrightarrow{GA} = a.\overrightarrow{y_1}$

$\overrightarrow{JA} = R.\vec{y}$

$\overrightarrow{C_1I_1} = r.\vec{y}$

***θ** = angle de rotation de S_4*
***φ** = angle de rotation de S_1 et S_2*

Questions

1) Ecrire les expressions des vitesses de rotation de S_1, S_2 , S_3 et S_4 par rapport à R : $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{S_1/R}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{S_2/R}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{S_3/R}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{S_4/R}}$,
2) Déterminer la vitesse du point I_1 par rapport au repère fixe R $\overrightarrow{V_{I_1 \in S_1/R}}$ dans le repère ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$)
3) Ecrire la condition de roulement sans glissement en I_1 et en déduire une relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{u}$
4) Déterminer la vitesse du point J par rapport au repère fixe R $\overrightarrow{V_{J \in S_3/R}}$ dans le repère ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$)
5) Déterminer la vitesse du point A par rapport au repère fixe R $\overrightarrow{V_{A \in S_4/R}}$ dans le repère ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$)
6) Par changement de point avec A, déterminer la vitesse $\overrightarrow{V_{J \in S_4/R}}$ dans le repère ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$)
7) Ecrire la condition de roulement sans glissement en J et en déduire une relation entre $\dot{u}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{x}$
8) Déterminer la vitesse $\overrightarrow{V_{G/R}}$ et $\overrightarrow{\Gamma_{G/R}}$ l'accélération du point G par rapport au repère fixe ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$)
9) Déterminer le moment cinétique en G du demi-disque S_4 $\overrightarrow{\sigma_{G\,(\boldsymbol{S_4/R})}}$ dans le repère ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$)
10) Déterminer le moment dynamique en G du demi-disque S_4 $\overrightarrow{\delta_{G\,(\boldsymbol{S_4/R})}}$ dans le repère ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$)

On cherche à déterminer les composantes de l'action en J (X_J et Y_J) en fonction de M, g, a, x, Θ et de leurs dérivées

11) Indiquer le ou les solide(s) à isoler ainsi que le ou les théorème(s) à appliquer puis exprimer X_J et Y_J en fonction de M, g, a, x, Θ et de leurs dérivées
12) Appliquer le théorème du moment dynamique à S_4 en G et établir la relation :
$M.R.\ddot{\theta}.(-2a.\cos\Theta + \frac{3}{2}.R) + M.\ddot{u}.(a.\cos\Theta - R) + M.g.a.\sin\Theta + M.R.a.\dot{\theta}^2.\sin\Theta = 0$
13) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de S_4 dans le repère R : $T(S_4/R)$
14) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de S_4 dans le repère R : $U(S_4/R)$
15) Déterminer l'expression de la puissance des actions extérieures agissant sur S_4
16) Déterminer l'expression de la puissance des actions intérieures agissant sur S_4
17) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S_4 et retrouver l'équation établie à la question 12)

Rappels :

Le torseur $\{\tau_{(2\to1)}\}$ associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 sera noté :

$$\{\mathcal{T}_{(2\to1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{A_{2\to1}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} = X_A.\vec{x} + Y_A.\vec{y} + Z_A.\vec{z} \\ \overrightarrow{M_{A_{2\to1}}} = L_A.\vec{x} + M_A.\vec{y} + N_A.\vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinématique $\{\,v_{2/1}\,\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R exprimé au point A sera noté :

$$\{v_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_x.\vec{x} + \omega_y.\vec{y} + \omega_z.\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A_{S/R}}} = v_{Ax}.\vec{x} + v_{Ay}.\vec{y} + v_{Az}.\vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_x & v_{Ax} \\ \omega_y & v_{Ay} \\ \omega_z & v_{Az} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinétique $\{\,C_{S/R)}\,\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{C_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} m\overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}} = m\,\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\,S/R}} + \overrightarrow{J_A}(\,S,\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\,) \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

$\overrightarrow{J_A}$ **= opérateur d'inertie de S en A**

Le torseur dynamique $\{\,D_{S/R)}\,\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{D_{(S/R)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} m\overrightarrow{\Gamma_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\delta_{A_{S/R}}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\overrightarrow{\Gamma_{G_{S/R}}} \\ \overrightarrow{\delta_{A(S/R)}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}\right]_R + \mathrm{m}.\overrightarrow{V_{A_{S/R}}}\wedge\overrightarrow{V_{G_{S/R}}} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

L'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2}\{C_{(S/R)}\}\otimes\{v_{(S/R)}\} = \frac{1}{2}(\,m\overrightarrow{V_{G_{S/R}}}.\overrightarrow{V_{A_{S/R}}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{\sigma_{A_{S/R}}})$$

Théorème de Huygens : en posant $\overrightarrow{OG}$ = a. $\vec{x}$ + b. $\vec{y}$ + c. $\vec{z}$

$\bar{\bar{J}}$(O,S).$\vec{u}$ = $\bar{\bar{J}}$ (G,S) .$\vec{u}$ + m. $\overrightarrow{OG}\wedge(\,\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG}\,)$

$$\mathrm{I}_{O,S/R} = \begin{bmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \begin{bmatrix} m(b^2+c^2) & -m.a.b & -m.a.c \\ -m.a.b & m(a^2+c^2) & -m.b.c \\ -m.a.c & -m.b.c & m(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$