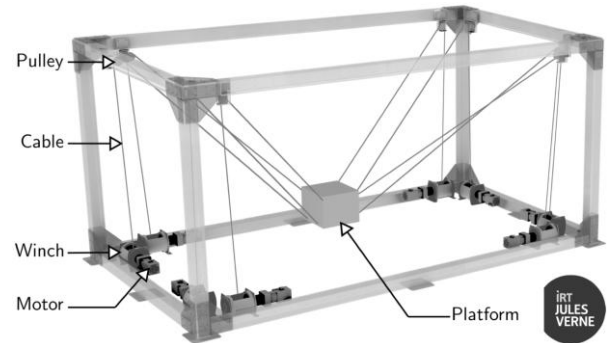


Contrôle continu de dynamique du solide

Les robots parallèles à câbles sont une nouvelle structure de robots apparus au début des années 2000 et encore en développement actif. Dans ce système, la plate-forme est déplacée et orientée par rapport à une référence fixe dans toutes les directions de l'espace par l'enroulement ou le déroulement de plusieurs câbles. Cette structure permet à la plate-forme d'atteindre une grande zone de travail avec, en tenant compte de l'inévitable déformation des câbles, une très grande précision dans le positionnement comme dans l'orientation.

Torseur associé à l'action de la charge :

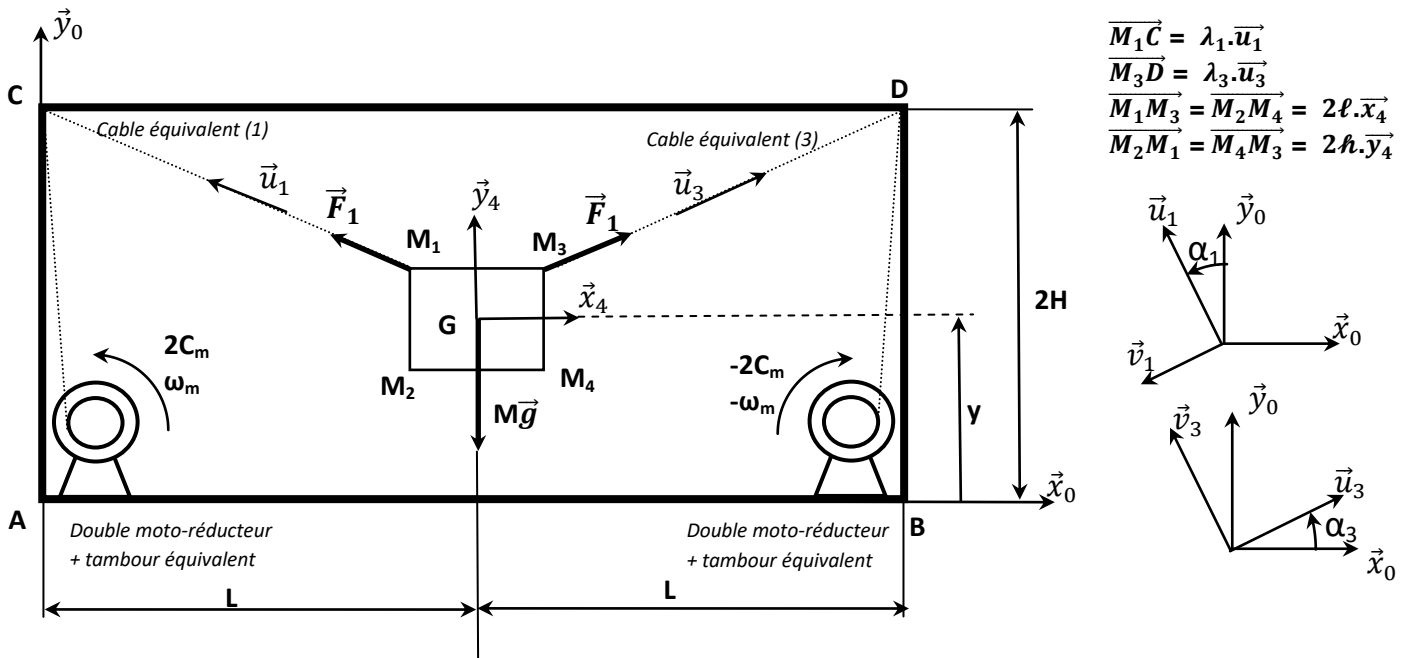
$$\left\{ \mathcal{J}_{(g \rightarrow ch)} \right\}_G = \begin{cases} \overrightarrow{R}_{g \rightarrow pr} = -Mg \cdot \vec{y}_0 \\ \overrightarrow{M}_{Gg \rightarrow ch} = \vec{0} \end{cases}$$



Étude de l'évolution dynamique

La configuration de la figure ci-après est alors adoptée : seuls les câbles équivalents supérieurs sont utilisés et ils sont tous deux pilotés de manière symétrique par deux moteurs.

Dans toute l'étude, l'effet de la pesanteur sur les câbles est négligé au regard des autres efforts.

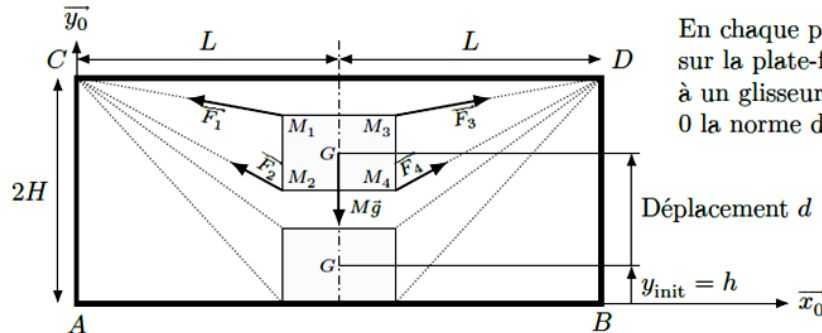


Les câbles, le réducteur de rapport $\rho = 1/40$ et le tambour d'enroulement de rayon $R = 60$ mm (supposé constant malgré l'enroulement du câble) ont en pratique une faible influence dynamique par rapport à celles des autres éléments (moteurs et plate-forme) : par conséquent, leurs masses et inerties sont négligées dans toute la suite.

Les quatre moteurs de pilotage (deux par câbles équivalents) sont supposés parfaitement identiques : de moment d'inertie J_m , ils délivrent un même couple $\pm Cm$ et tournent à la même vitesse angulaire $\pm \omega_m$.

Dans la phase de montée, où la vitesse de déplacement de la plate-forme $\dot{y} > 0$ et la vitesse d'enroulement du câble équivalent (1) :

$\lambda_1 < 0$, la vitesse de rotation est telle que $\omega_m > 0$.



En chaque point M_i , le câble équivalent (i) exerce sur la plate-forme une action mécanique assimilée à un glisseur de résultante $\vec{F}_i = F_i \vec{u}_i$ avec $F_i > 0$ la norme de l'effort (avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$).

Les câbles, le réducteur de rapport $\rho = 1/40$ et le tambour d'enroulement de rayon $R = 60$ mm (supposé constant malgré l'enroulement du câble) ont en pratique une faible influence dynamique par rapport à celles des autres éléments (moteurs et plate-forme) : par conséquent, leurs masses et inerties sont négligées dans toute la suite. Par ailleurs, toujours pour des raisons de symétrie, les longueurs des deux câbles équivalents supérieurs sont égales, soit $\lambda_1 = \lambda_3$.

Avec les équations précédentes, on en déduit que $\sin \alpha_1 = \cos \alpha_3$ et $\cos \alpha_1 = \sin \alpha_3$, ce qui permet d'en déduire deux relations entre la longueur λ_1 du câble équivalent (1), l'angle α_1 et la géométrie :

$$\lambda_1 \sin \alpha_1 = L - \ell \text{ et } \lambda_1 \cos \alpha_1 = 2H - y - h$$

1) En dérivant les deux relations précédentes, en déduire que : $\dot{\lambda}_1 = -\dot{y} \cos \alpha_1$ et $\lambda_1 \dot{\alpha}_1 = \dot{y} \sin \alpha_1$

Les quatre moteurs de pilotage (deux par câbles équivalents) sont supposés parfaitement identiques : de moment d'inertie J_m , ils délivrent un même couple $\pm Cm$ et tournent à la même vitesse angulaire $\pm \omega_m$.

Dans la phase de montée, où la vitesse de déplacement de la plate-forme $\dot{y} > 0$ et la vitesse d'enroulement du câble équivalent (1) $\dot{\lambda}_1 < 0$, la vitesse de rotation est telle que $\omega_m > 0$

Les câbles, le réducteur de rapport $\rho = 1/40$ et le tambour d'enroulement de rayon $R = 60$ mm (supposé constant malgré l'enroulement du câble) ont en pratique une faible influence dynamique par rapport à celles des autres éléments (moteurs et plate-forme) : par conséquent, leurs masses et inerties sont négligées dans toute la suite.

2) Donner la relation entre la vitesse d'enroulement du câble $\dot{\lambda}_1$, la vitesse de rotation du moteur ω_m , le rapport ρ et le rayon R du tambour d'enroulement.

3) Isoler l'ensemble {moteur + réducteur + tambour d'enroulement} dont l'inertie ramenée sur l'axe du tambour est égale à : $(\frac{1}{\rho^2}) J_m$ puis appliquer le théorème du moment dynamique et démontrer que la valeur de la tension du câble est : $T = \frac{2C_m}{R\rho} - \frac{2J_m\omega_m}{R\rho}$

4) Isoler la charge (plateforme) puis appliquer le principe fondamental de la dynamique en projection sur Oy. Etablir l'équation qui en résulte et qui fait intervenir T, α_1 , M, g, \dot{y}

5) En exploitant les résultats des questions 3) et 4) démontrer que l'expression du couple moteur s'écrit comme suit :

$$C_m = \frac{1}{4} \left[Mg \frac{R\rho}{\cos \alpha_1} + \omega_m \left(M \dot{\alpha}_1 \frac{R^2 \rho^2}{\cos^2 \alpha_1} \operatorname{tg} \alpha_1 + 4J_m \right) + \omega_m \left(M \frac{R^2 \rho^2}{\cos^2 \alpha_1} \right) \right]$$

6) Déterminer l'énergie cinétique galiléenne du système $(\Sigma) = \{\text{plate-forme} + \text{quatre ensembles \{moteur} + \text{réducteur} + \text{tambour d'enroulement} + \text{câble}\}$ en mouvement et l'écrire sous la forme

$$Ec(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} J_{eq} \omega_m^2$$

où l'inertie équivalente J_{eq} sera exprimée en fonction de l'inertie J_m d'un des quatre moteurs, de la masse M de la plate-forme, du rayon R du tambour d'enroulement, du rapport ρ du réducteur et de $\cos \alpha_1$.

7) Déterminer la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à l'ensemble (Σ) en mouvement et l'écrire sous la forme $\mathcal{P}(\Sigma \rightarrow \Sigma/R_0) = \mathcal{C} \cdot \omega_m$ où la grandeur \mathcal{C} sera exprimée en fonction du couple C_m d'un des quatre moteurs, de la masse M de la plate-forme, de l'accélération g de la pesanteur, du rayon R du tambour d'enroulement, du rapport ρ du réducteur et de $\cos \alpha_1$.

Les pertes internes dans les liaisons ou au niveau des poulies de renvoi étant négligées, la puissance des actions mécaniques intérieures à l'ensemble (Σ) l'est également

8) Par application du théorème de l'énergie cinétique, retrouver l'expression du couple moteur C_m établie à la question 5)

Rappels :

Le torseur $\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}$ associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 sera noté :

$$\{\mathcal{T}_{(2 \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}} \\ \overrightarrow{M_{A2 \rightarrow 1}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}} = X_A \cdot \vec{x} + Y_A \cdot \vec{y} + Z_A \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{A2 \rightarrow 1}} = L_A \cdot \vec{x} + M_A \cdot \vec{y} + N_A \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinématique $\{v_{(S/R)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R exprimé au point A sera noté :

$$\{v_{(S/R)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{AS/R}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_x \cdot \vec{x} + \omega_y \cdot \vec{y} + \omega_z \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{V_{AS/R}} = v_{Ax} \cdot \vec{x} + v_{Ay} \cdot \vec{y} + v_{Az} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \omega_x & v_{Ax} \\ \omega_y & v_{Ay} \\ \omega_z & v_{Az} \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinétique $\{C_{(S/R)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{C_{(S/R)}\} = \left\{ \begin{array}{l} m \overrightarrow{V_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{AS/R}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} m \overrightarrow{V_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{AS/R}} = m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{AS/R}} + \overrightarrow{J_A}(S, \overrightarrow{\Omega_{S/R}}) \end{array} \right\}_{(x,y,z)} \quad \overrightarrow{J_A} = \text{opérateur d'inertie de S en A}$$

Le torseur dynamique $\{D_{(S/R)}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{D_{(S/R)}\} = \left\{ \begin{array}{l} m \overrightarrow{\Gamma_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{AS/R}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} m \overrightarrow{\Gamma_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{AS/R}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{AS/R}} \right]_R + m \cdot \overrightarrow{V_{AS/R}} \wedge \overrightarrow{V_{GS/R}} \end{array} \right\}_{(x,y,z)}$$

L'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \{C_{(S/R)}\} \otimes \{v_{(S/R)}\} = \frac{1}{2} (m \overrightarrow{V_{GS/R}} \cdot \overrightarrow{V_{AS/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{AS/R}})$$

Théorème de Huygens : en posant $\overrightarrow{OG} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y} + c \cdot \vec{z}$

$$\overrightarrow{J}(O,S) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{J}(G,S) \cdot \vec{u} + m \cdot \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG})$$

$$I_{O,S/R} = \begin{bmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} + \begin{bmatrix} m(b^2 + c^2) & -m \cdot a \cdot b & -m \cdot a \cdot c \\ -m \cdot a \cdot b & m(a^2 + c^2) & -m \cdot b \cdot c \\ -m \cdot a \cdot c & -m \cdot b \cdot c & m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$