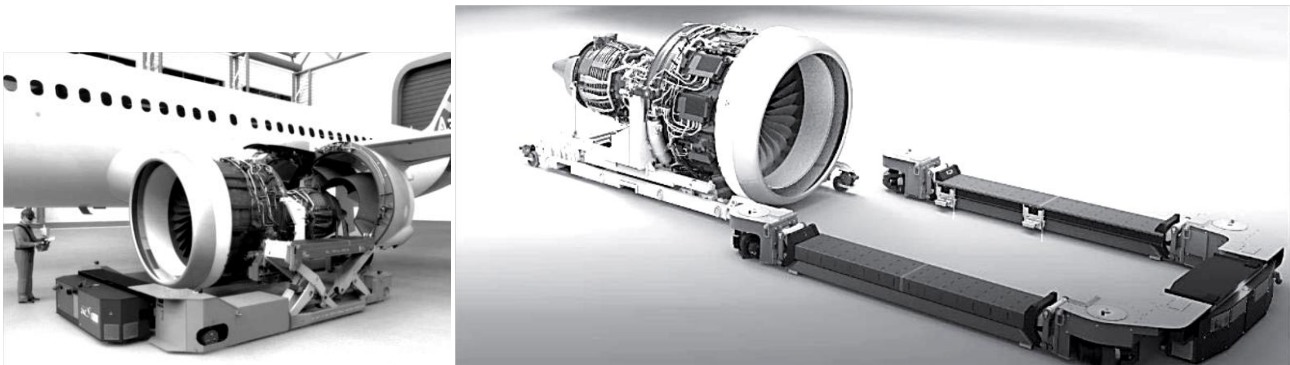


## Contrôle continu de dynamique

### Étude du chariot JacXson U70

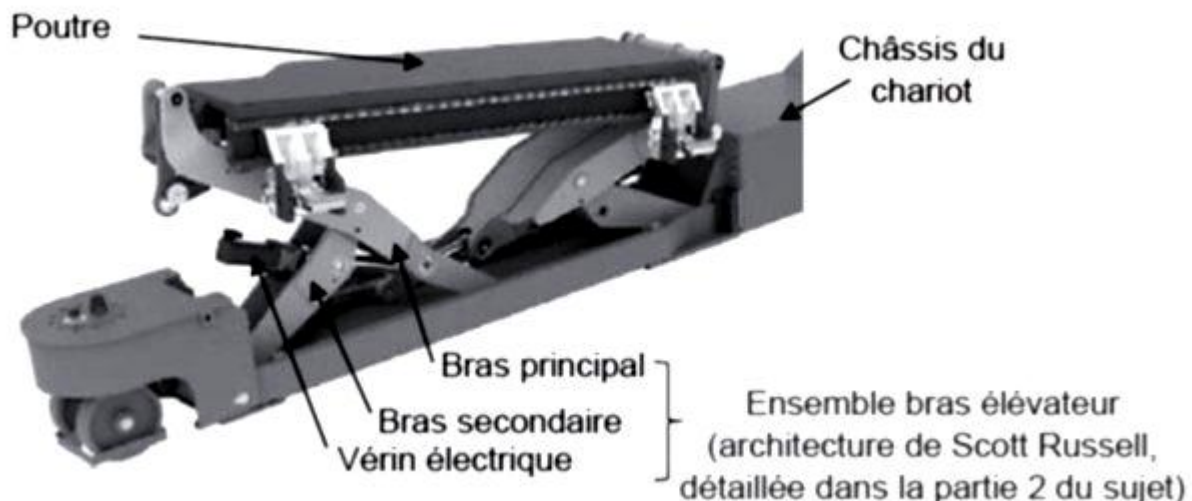
La révision d'un moteur d'avion s'avère l'une des opérations plus contraignantes. En effet, ce dernier doit être désassemblé de l'avion, habituellement par l'intermédiaire de treuils à chaîne, suspendus à un échafaudage et actionnés manuellement par plusieurs opérateurs. Ces manutentions s'avèrent longues et très délicates vis-à-vis de la sécurité des techniciens et occasionnent des risques de dommages sur les composants.

Le chariot Jacxson se substitue aux traditionnels outillages très fastidieux à mettre en oeuvre, en proposant une assistance mécanique entièrement pilotée et en répondant à tous les impératifs liés à la manipulation des moteurs lors des différentes séquences de pose et de dépose



L'ensemble moteur + stand est supporté par deux poutres par l'intermédiaire de fourches solidaires de ces dernières (**figure ci-dessus**). Un sous-système motorisé adapte automatiquement l'écartement des deux poutres à la largeur du stand

Chaque poutre est liée au châssis du chariot par deux sous-systèmes " bras élévateur " (**figure 3**), chacun constitué d'un bras principal, d'un bras secondaire et d'un vérin électrique (intégrant un moteur, un réducteur, un frein à manque de courant). La commande différenciée de chacun des quatre bras élévateurs permet de soulever et d'orienter le stand selon des angles de tangage et de roulis.



Deux roues arrière motrices et directrices et deux paires de roues avant uniquement directrices assurent des mobilités omnidirectionnelles au porteur . Le JacXson U70 a aussi l'avantage de pouvoir être entièrement piloté à distance par une seule personne grâce à une interface tactile mobile

**Paramétrage**

- Le repère  $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au châssis (0) du chariot
- Le repère  $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  est lié au bras secondaire (1) et  $\theta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$
- Le repère  $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$  est lié au bras principal (2) et  $\beta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$
- Le repère  $R_3 = (O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$  est lié au corps du vérin (3) et  $\delta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$

On pose :

$$\vec{OC} = H(t) \cdot \vec{y}_0 ; \vec{OA} = \lambda(t) \cdot \vec{x}_0 ; \vec{MN} = l_3(t) \cdot \vec{x}_3 ;$$

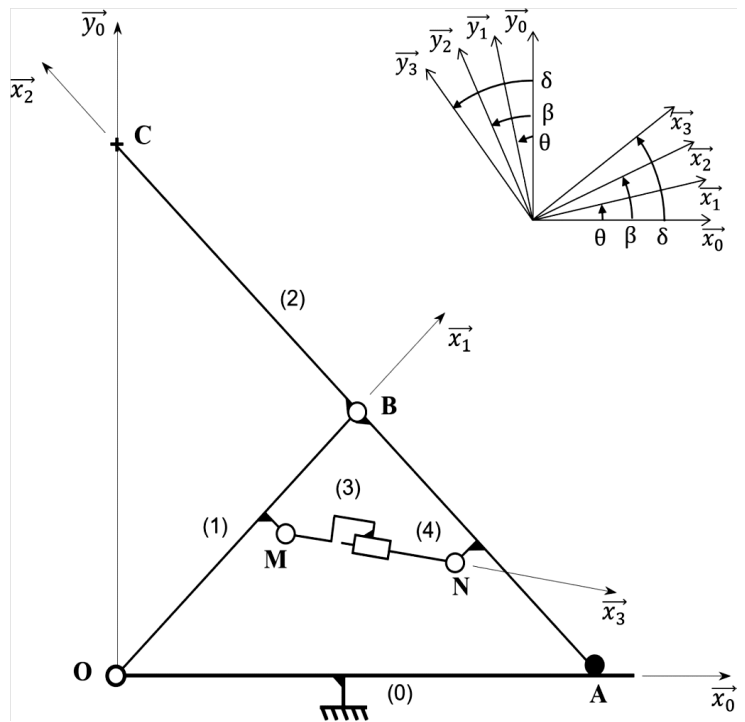
$$L = OB = AB = BC$$

$$\vec{OM} = l_1 \cdot \vec{x}_1 + e_1 \cdot \vec{y}_1 ; \vec{AN} = l_2 \cdot \vec{x}_2 + e_2 \cdot \vec{y}_2 ;$$

$$L = 850 \text{ mm} ; l_1 = 632,5 \text{ mm} ; l_2 = 409 \text{ mm}$$

$$e_1 = -90 \text{ mm} ; e_2 = 63 \text{ mm}$$

On prendra  $\beta = \pi - \theta$



**Validation du moteur d'un vérin électrique**

Objectif : déterminer l'expression du couple moteur d'un vérin électrique et valider le choix de ce moteur.

Afin de répondre à cet objectif, il est proposé d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble constitué d'un **bras secondaire (1)**, d'un **bras principal (2)**, d'un **sous-ensemble vérin électrique (3+4)** ainsi que d'une **masse concentrée  $M_{ch}$  au point C**, modélisant la charge appliquée à l'extrémité du bras principal.

Notations

- Le torseur cinématique exprimé au point Q, caractéristique du mouvement d'un solide  $i$  par rapport au repère lié à un solide  $j$ , est noté :

$$\left\{ v_{i/j}^Q \right\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{i/j} \\ \vec{V}_{Q_{i/j}} \end{Bmatrix}$$

- Le torseur cinétique exprimé au point Q, caractéristique du mouvement d'un solide  $i$ , de centre d'inertie  $G_i$ , par rapport au repère  $R_0$  lié au châssis (0), est noté :

$$\left\{ c_{i/0}^Q \right\} = \begin{Bmatrix} m_i \vec{V}_{G_i/0} \\ \vec{\sigma}_{Q(i/0)} \end{Bmatrix}$$

Cette étude se réfère au modèle paramétré d'un ensemble bras élévateur illustré page précédente.

On note  $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, M_{ch}\}$  l'ensemble étudié composé des solides (1), (2), (3), (4) et de la masse ponctuelle  $M_{ch}$ .

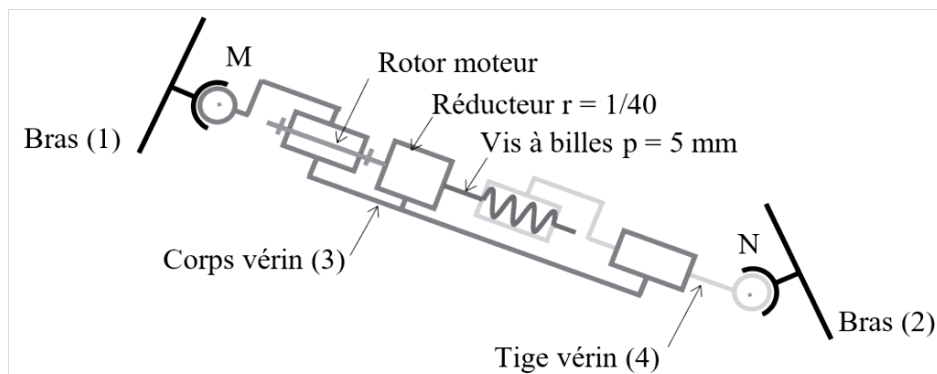
### Données complémentaires

- Bras secondaire (1)
  - $m_1$ : masse du bras (1) ;
  - $G_1$ : centre d'inertie du bras (1) tel que  $\overrightarrow{OG_1} = a_1 \overrightarrow{x_1}$  ;
  - $[I_{O(1)}] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(O,B_1)}$  matrice d'inertie dans la base  $\mathcal{B}_1 (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0})$  au point  $O$  ;
  - données numériques :  $a_1 = 430$  mm ,  $m_1 = 135$  kg ,  $C_1 = 3,5 \cdot 10^7$  kg.mm<sup>2</sup>;
- Bras principal (2)
  - $m_2$ : masse du bras (2) ;
  - $G_2$ : centre d'inertie du bras (2) tel que  $\overrightarrow{BG_2} = a_2 \overrightarrow{x_2}$  ;
  - $[I_{G_2(2)}] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}_{(O,B_2)}$  matrice d'inertie dans la base  $\mathcal{B}_2 (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_0})$  au point  $G_2$  ;
  - données numériques :  $a_2 = 236$  mm ,  $m_2 = 180$  kg ;
  - $M_{ch}$ : masse concentrée au point C avec  $M_{ch} = 1\,750$  kg;
  - $J_m$ : moment d'inertie du rotor du moteur d'un vérin électrique ;
  - $C_m(t)$ : couple moteur d'un vérin électrique.

### Hypothèses:

- les masses et les moments d'inertie autres que ceux mentionnés ci-dessus sont négligés;
- le chariot est supposé immobile; le repère  $R_{R0}$  lié au châssis ( $O$ ) est supposé galiléen;
- on considère un mouvement ascendant de l'ensemble de levage en phase d'accélération;
- toutes les liaisons sont supposées parfaites;
- on admettra que la puissance des forces de pesanteur appliquées sur l'ensemble  $\Sigma$  est majoritairement dépendante de la masse  $M_{ch}$ ; on néglige donc l'action de la pesanteur sur les autres composants.

### Architecture simplifiée d'un vérin électrique



### Questions

1) En vous référant à l'architecture du vérin électrique ci-dessus, donner l'expression de la vitesse de sortie de la tige (4) par rapport au corps (3), notée  $v_{43}(t)$ , exprimée en mm/s, en fonction de la vitesse de rotation du moteur  $N_m$  (tr/min) et des caractéristiques de la transmission

2) Exprimer dans la base  $\mathcal{B}_1 (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ , les torseurs cinématiques  $\{v_{1/0}^B\}$  puis  $\{v_{2/0}^B\}$  en fonction de  $\theta(t)$  et de  $L$ .

On définit la vitesse de translation de la tige (4) du vérin électrique par rapport au corps (3) par:  $\overrightarrow{V_{N\ 4/3}} = v_{43}(t) \cdot \vec{x}_3$   
avec  $v_{43}(t) = (\overrightarrow{V_{N\ 4/0}} - \overrightarrow{V_{M\ 3/0}}) \cdot \vec{x}_3$

3) Écrire 2 relations vectorielles liant respectivement le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V_{N\ 4/0}}$  à  $\overrightarrow{V_{B\ 2/0}}$  et à  $\overrightarrow{\Omega_{2/0}}$  et le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V_{M\ 3/0}}$  à  $\overrightarrow{V_{B\ 2/0}}$  et à  $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ . Montrer que la vitesse algébrique  $v_{43}(t)$  peut être exprimée par :  
 $v_{43}(t) = -(\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN})) \cdot \vec{x}_3$  (le calcul de (t) cette expression n'est pas demandé).

Par la suite, on prendra  $k(t) = \frac{\dot{\theta}(t)}{\omega_m(t)}$  le rapport entre la vitesse de rotation du bras (1) et la vitesse de rotation du moteur, obtenu en combinant les résultats précédents.

4) Exprimer l'énergie cinétique  $T_{1/0}$  du bras (1) dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ . On écrira le résultat sous la forme  $T_{1/0} = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2(t)$  en précisant l'expression de  $J_1$ .

5) Exprimer dans la base  $\mathcal{B}_2 (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ , le torseur cinématique  $\{v_{2/0}^{G_2}\}$ ; montrer que le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V_{G_2\ 2/0}}$  peut s'écrire  $\overrightarrow{V_{G_2\ 2/0}} = L \sin(2\theta(t)) \vec{x}_2 - (L \cos(2\theta(t)) + a_2) \dot{\theta}(t) \vec{y}_2$

On pourra utiliser la projection  $\vec{y}_1 = \sin(2\theta(t)) \vec{x}_2 - \cos(2\theta(t)) \vec{y}_2$

6) Exprimer le torseur cinétique  $\{C_{2/0}^{G_2}\}$  du bras (2) dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ .

7) Déduire l'énergie cinétique  $T_{2/0}$  du bras (2) dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ , sous la forme  $T_{2/0} = \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}^2(t)$  en précisant l'expression de  $J_2(t)$  en fonction des données cinétiques de ce solide et des paramètres géométriques  $L, a_2$  et de  $\theta(t)$ .

8) Montrer que le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V_{C\ 2/0}}$  s'écrit  $\overrightarrow{V_{C\ 2/0}} = V_c \cdot \vec{y}_0$  en précisant l'expression de  $V_c$ .

Exprimer l'énergie cinétique  $T_{M_{ch}/0}$  de la masse concentrée  $M_{ch}$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ , sous la forme  $T_{M_{ch}/0} = \frac{1}{2} J_{M_{ch}}(t) \dot{\theta}^2(t)$  en précisant l'expression de  $J_{M_{ch}}(t)$  en fonction de  $M_{ch}, L$  et de  $\theta(t)$ .

9) Exprimer l'énergie cinétique  $T_{mot/0}$  du rotor moteur en supposant que  $\overrightarrow{\Omega_{3/0}} \approx \vec{0}$ .

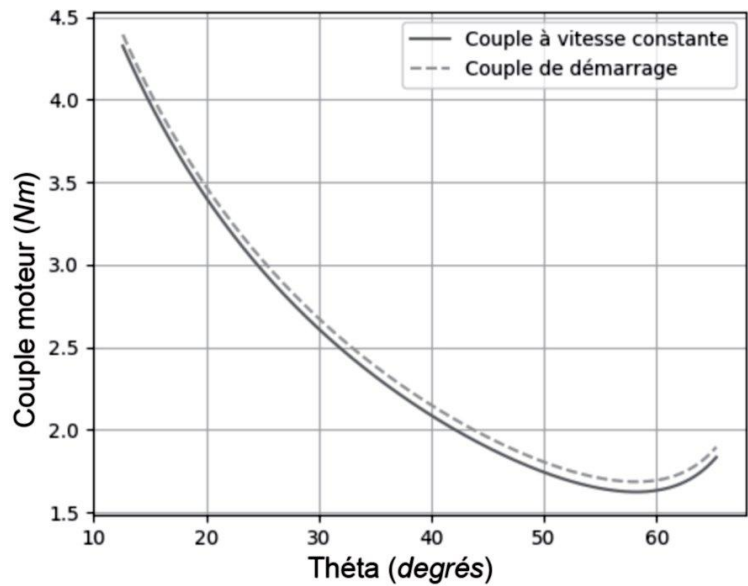
Donner l'expression de l'énergie cinétique  $T_{\Sigma/0}$  de l'ensemble  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ , sous la forme :

$T_{\Sigma/0} = \frac{1}{2} J_{\Sigma}(t) \omega_m^2(t)$  en précisant l'expression de  $J_{\Sigma}(t)$  en fonction de  $J_1, J_2(t), J_{M_{ch}}(t), J_m$  et de  $k(t)$ .

10) Faire un bilan des puissances des actions mécaniques extérieures et intérieures à l'ensemble  $\Sigma$  et donner leur expression en fonction des différentes données du problème. Exprimer notamment la puissance  $P_{pes}$  de la force de pesanteur appliquée sur la masse  $M_{ch}$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  en écrivant le résultat sous la forme :  $P_{pes} = C_{pes}(t) \omega_m(t)$  en donnant l'expression de  $C_{pes}(t)$  en fonction de  $M_{ch}, L, \theta(t), g$  et de  $k(t)$ .

11) Démontrer que l'application du théorème de l'énergie cinétique se traduit par une expression de la forme :  
 $C_m(t) = C_a(t) + \frac{1}{2} \frac{dJ_z(t)}{dt} \omega_m(t) - C_{pes}(t)$  où  $C_a(t) = J_z(t) \frac{d\omega_m}{dt}$  est assimilable à un couple dû à l'accélération angulaire

Les courbes de la figure ci-contre ont été obtenues par simulation numérique pour différentes valeurs de  $\theta$  initiales :  
 - la courbe " couple à vitesse constante " correspond au couple moteur  $C_m(t)$  lorsque l'on impose une vitesse angulaire constante pour chaque angle  $\theta$  pris pour la simulation ;  
 - la courbe " couple de démarrage " correspond au couple moteur  $C_m(t)$  à  $t=0$  lorsque l'on impose une rampe pour la vitesse angulaire pour chaque angle  $\theta$  pris pour la simulation



Valeurs du couple en régime établi et du couple de démarrage du moteur en fonction de l'angle  $\theta$

12) En comparant les 2 courbes, que peut-on conclure quant aux valeurs des différents termes de l'expression du couple moteur obtenue avec le théorème de l'énergie cinétique ?

**Rappels :**

Le torseur des actions transmissibles du solide 1 sur le solide 2 par la liaison entre 1 et 2 au point A sera noté :

$$\{T_{A(1 \rightarrow 2)}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{A1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A1 \rightarrow 2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{A1 \rightarrow 2}} = X_{A12} \cdot \vec{x} + Y_{A12} \cdot \vec{y} + Z_{A12} \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{A1 \rightarrow 2}} = L_{A12} \cdot \vec{x} + M_{A12} \cdot \vec{y} + N_{A12} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} X_{A12} & L_{A12} \\ Y_{A12} & M_{A12} \\ Z_{A12} & N_{A12} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinématique  $\{v_{S/R}\}$  du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R exprimé au point A sera noté :

$$\{v_{(S/R)}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{AS/R}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_{S/Rx} \cdot \vec{x} + \omega_{S/Ry} \cdot \vec{y} + \omega_{S/Rz} \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{V_{AS/R}} = v_{AS/Rx} \cdot \vec{x} + v_{AS/Ry} \cdot \vec{y} + v_{AS/Rz} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} \omega_{S/Rx} & v_{AS/Rx} \\ \omega_{S/Ry} & v_{AS/Ry} \\ \omega_{S/Rz} & v_{AS/Rz} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinétique  $\{C_{S/R}\}$  du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{C_{(S/R)}\} = \begin{Bmatrix} m \overrightarrow{V_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{AS/R}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m \overrightarrow{V_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{AS/R}} = m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{AS/R}} + \overrightarrow{J_A}(S, \overrightarrow{\Omega_{S/R}}) \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} \quad \overrightarrow{J_A} = \text{opérateur d'inertie de S en A}$$

Le torseur dynamique  $\{D_{S/R}\}$  du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{D_{(S/R)}\} = \begin{Bmatrix} m \overrightarrow{\Gamma_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{AS/R}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m \overrightarrow{\Gamma_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{AS/R}} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{AS/R}} \right]_R + m \cdot \overrightarrow{V_{AS/R}} \wedge \overrightarrow{V_{GS/R}} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

L'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \{C_{(S/R)}\} \otimes \{v_{(S/R)}\} = \frac{1}{2} (m \overrightarrow{V_{GS/R}} \cdot \overrightarrow{V_{AS/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{AS/R}})$$