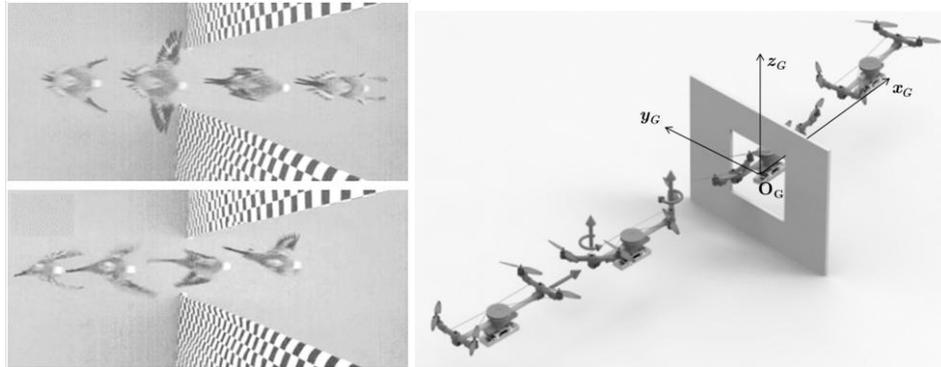


Contrôle continu de dynamique

Drone à géométrie variable

Ce drone s'inspire de l'oiseau et possède la capacité de se replier en vol afin de diminuer son envergure



Influence de la rotation des bras sur la vitesse maximale en bout de pale

Vérification de l'exigence « La vitesse maximale en bout de pale est fixée à 200 m/s »

On considère que le drone se déplace en ligne droite à la vitesse de déplacement V_x . $\vec{x}_0 = \vec{x}_G$ telle que $V_x = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette vitesse correspond à la vitesse retenue pour négocier le passage de l'ouverture. Elle est suffisamment lente pour que le drone ait le temps d'interpréter la taille de l'ouverture et de décider si elle est franchissable ou non (dans ce cas le drone doit avoir le temps de réaliser un freinage d'urgence avant collision). Par ailleurs, cette vitesse est suffisamment rapide pour conserver un minimum " d'inertie " lors du franchissement et permettre sa stabilisation une fois l'ouverture franchie et les bras dépliés.

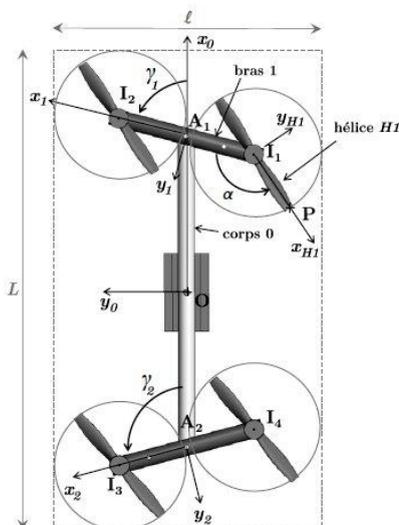
On suppose que le référentiel terrestre associé à R_G peut être considéré galiléen. On pose de plus $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_{H1})$ l'angle définissant l'orientation de l'hélice $H1$ par rapport au bras 1.

La **vitesse de rotation du bras 1** par rapport au corps 0 du drone, $\vec{\Omega}(1/R_0)$, est telle que $\vec{\Omega}(1/R_0) = \dot{\gamma}_1 \cdot \vec{z}_0$.

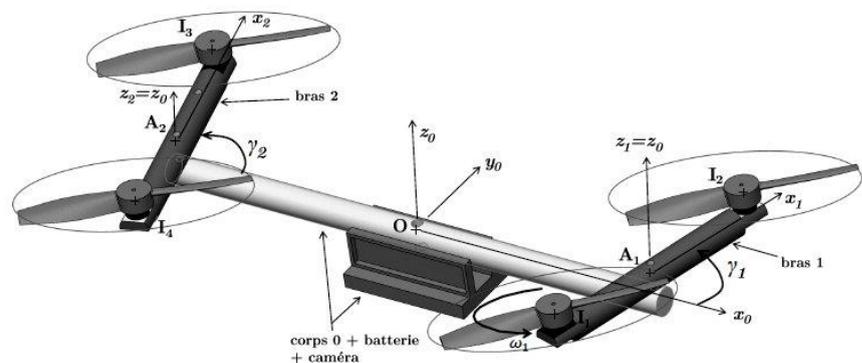
La **valeur maximale** de cette vitesse est obtenue par une **rotation de 90°** en **300 ms**.

La vitesse de rotation de l'hélice $H1$ par rapport au bras 1, $\vec{\Omega}(1/R_1)$, est telle que $\vec{\Omega}(1/R_1) = \omega_1 \vec{z}_0 = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0$.

On considérera que la **vitesse de rotation de l'hélice** est égale à **13 400 tr/min** pour assurer la portance et le déplacement horizontal du drone à $V_x = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



Vue de dessus et en perspective du drone en phase de repliement et paramétrage de la géométrie



Paramétrage

Le repère $R_G (O_G, \vec{x}_G, \vec{y}_G, \vec{z}_G)$ est repère galiléen lié à la Terre

La base B_0 associée au repère R_0 est notée $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Le repère $R_1 (A_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est associé au bras 1

Le repère $R_{H1} (I_1, \vec{x}_{H1}, \vec{y}_{H1}, \vec{z}_0)$ associé à l'hélice $H1$.

On note :

ℓ et L , respectivement la **largeur** et la **longueur** du **parallélépipède rectangle** englobant la totalité du drone (représenté en pointillés sur figure page précédente), de **hauteur $h = 115 \text{ mm}$** , constante quelle que soit la configuration du drone ;

$L_0 = 280 \text{ mm}$, la longueur du corps 0 ;

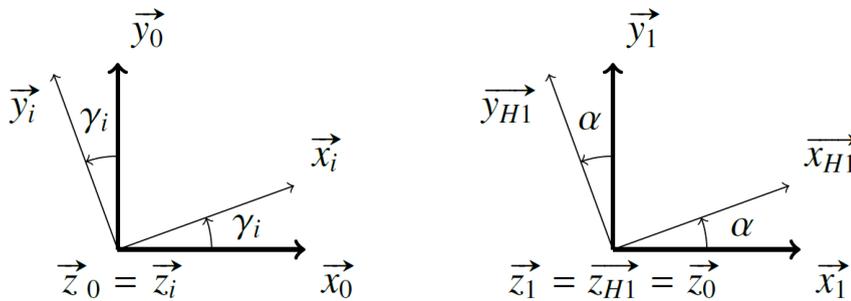
$$\vec{OA}_1 = \frac{L_1}{2} \cdot \vec{x}_0 + \frac{h}{4} \cdot \vec{z}_0 ;$$

$L_1 = 140 \text{ mm}$, la longueur du bras 1 ;

$$\vec{I}_1 A_1 = \frac{L_0}{2} \cdot \vec{x}_1 - \frac{h}{4} \cdot \vec{z}_0 ;$$

$r_h = 64 \text{ mm}$, la longueur d'une pale de l'hélice ;

$$\vec{I}_1 P = r_h \vec{x}_{H1} \text{ pour l'hélice } H1.$$



Les matrices d'inerties des principaux éléments du drone, dont la géométrie a été simplifiée pour cette étude, sont données ci-dessous, chacune dans la base principale d'inertie:

Pour le corps 0, de centre d'inertie O et de masse m_c :

$$- [I_{O(0)}] = \begin{bmatrix} I_{cx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{cy} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{cz} \end{bmatrix}_{(O, B_0)} \quad \text{matrice d'inertie dans la base } B_0 (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \text{ au point } O ;$$

Pour le bras 1, de centre d'inertie A_1 et de masse m_b :

$$- [I_{A_1(1)}] = \begin{bmatrix} I_{bx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{by} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{bz} \end{bmatrix}_{(A_1, B_1)} \quad \text{matrice d'inertie dans la base } B_1 (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0) \text{ au point } A_1 ;$$

Pour le bras 2, de centre d'inertie A_2 et de masse m_b :

$$- [I_{A_2(2)}] = \begin{bmatrix} I_{bx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{by} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{bz} \end{bmatrix}_{(A_2, B_2)} \quad \text{matrice d'inertie dans la base } B_2 (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0) \text{ au point } A_2 ;$$

Pour chaque hélice $H_i (i = 1 \text{ à } 4)$, de centre d'inertie I_i et de masse m_h , le moment d'inertie selon l'axe (I_i, z_0) est noté I_{hz} .

On note Σ l'ensemble constitué des principaux éléments du drone, tel que $\Sigma = \{ \mathbf{0} + \mathbf{1} + \mathbf{2} + \sum_{i=1}^4 H_i \}$

Questions

- 1) Déterminer l'expression littérale de $\overrightarrow{V_{P_{H1}/R_G}}$, la vitesse en bout de pale de l'hélice H1 par rapport à R_G , en fonction des données et notamment de $\dot{\gamma}_1$ et de ω_1 .
- 2) Dans quelle configuration du bras et de la pale cette vitesse en bout de pale est-elle maximale ? Déterminer dans ce cas l'expression maximale de la norme, notée V_{\max} . Réaliser l'application numérique en déterminant au préalable la valeur numérique de chacun des termes de l'expression de V_{\max} . Commenter l'influence de la vitesse de rotation des bras du drone sur la valeur de V_{\max} et sur la vérification de l'exigence « La vitesse maximale en bout de pale est fixée à 200 m/s »

Influence de la rotation des bras sur le comportement dynamique du drone selon l'axe de lacet vérification de l'exigence "La modification d'envergure doit limiter les perturbations sur le comportement dynamique du drone selon l'axe de lacet"

On cherche à déterminer la relation à donner entre les rotations γ_1 et γ_2 des deux bras du drone de manière à limiter les perturbations sur le comportement dynamique en vol du drone lors des phases de repliement et dépliement. L'objectif est d'avoir un moment dynamique du drone selon l'axe de lacet (axe (O, \vec{z}_0)) en O , centre d'inertie du drone, indépendant de γ_1 et γ_2 (et de leurs dérivées successives). Les matrices d'inerties des principaux éléments du drone, dont la géométrie a été simplifiée pour cette étude, sont données page précédente.

Hypothèses

On suppose le drone en vol rectiligne à vitesse constante et à altitude constante. Le référentiel associé au repère R_0 lié au corps du drone peut être considéré galiléen. Les vitesses de rotation des hélices sont telles que :

- $|\omega_1| = |\omega_2| = \omega$ constante,
- $|\omega_3| = |\omega_4| = \omega'$ constante.

Les bras sont en phase de repliement ou dépliement, donc $\gamma_1 \in]0^\circ, 90^\circ[$, $\dot{\gamma}_1 \neq 0$ et $\ddot{\gamma}_1 \neq 0$ pour le bras 1 ; idem pour les dérivées de l'angle γ_2 du bras 2.

3) Déterminer l'expression littérale du moment dynamique du bras 1 calculé en O selon \vec{z}_0 : $\overrightarrow{\delta_{O(1/R_0)}} \cdot \vec{z}_0$ En déduire l'expression littérale du moment dynamique du bras 2 calculé en O selon \vec{z}_0 : $\overrightarrow{\delta_{O(2/R_0)}} \cdot \vec{z}_0$

4) Déterminer l'expression de $\overrightarrow{V_{I_1 H1/R_0}}$ et $\overrightarrow{V_{I_2 H2/R_0}}$

5) Déterminer l'expression du moment cinétique de l'hélice 1 en O par rapport à R_0 $\overrightarrow{\sigma_{O(H1/R_0)}}$ ainsi que l'expression du moment cinétique de l'hélice 2 en O par rapport à R_0 $\overrightarrow{\sigma_{O(H2/R_0)}}$

6) Déterminer l'expression du moment dynamique de l'hélice 1 en O par rapport à R_0 $\overrightarrow{\delta_{O(H1/R_0)}}$ ainsi que l'expression du moment dynamique de l'hélice 2 en O par rapport à R_0 $\overrightarrow{\delta_{O(H2/R_0)}}$

En déduire l'expression de $\overrightarrow{\delta_{O(H1+H2/R_0)}}$

On donne pour la suite l'expression littérale du moment dynamique de l'ensemble hélice H3 + hélice H4 calculé en O selon \vec{z}_0 :

$$\overrightarrow{\delta_{O(H3+H4/R_0)}} \cdot \vec{z}_0 = 2I_{hz} \ddot{\gamma}_2 + 2m_h \left(\frac{L_1}{2}\right)^2 \ddot{\gamma}_2$$

7) À partir des résultats des trois questions précédentes, montrer que l'expression du moment dynamique de l'ensemble Σ , calculé en O selon \vec{z}_0 , se met sous la forme :

$$\overrightarrow{\delta_{O(\Sigma/R_0)}} \cdot \vec{z}_0 = 2I_{eq} (\ddot{\gamma}_1 + \ddot{\gamma}_2)$$

où I_{eq} est une constante dont l'expression est à préciser.

8) Expliquer en quoi ce choix de conception permet de vérifier l'exigence « **La modification d'envergure doit limiter les perturbations sur le comportement dynamique du drone selon l'axe de lacet** »

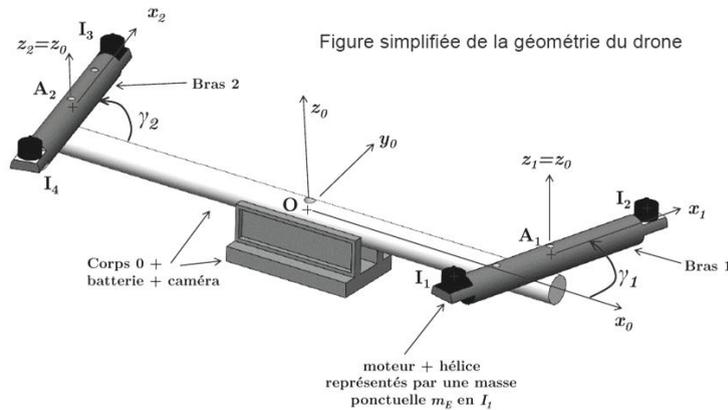
Influence de la rotation des bras sur l'inertie du drone analyse de l'exigence :

« Le mécanisme doit :

- assurer la rigidité de la structure du drone dans les configurations bras pliés et bras dépliés,
- passer d'une configuration à l'autre en 300 ms (course angulaire des bras de 90°),
- assurer une précision de position angulaire des bras de +/- 2° dans les configurations bras pliés et bras dépliés,- être de poids limité par rapport au poids total du drone. »

On se propose de déterminer les variations, dues à la rotation des bras, de la matrice d'inertie totale du drone en O exprimée dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

On considère pour ceci une géométrie simplifiée du drone (**figure ci-dessous**) composée du châssis intégrant la caméra et la batterie, des deux bras et des 4 sous-ensembles { moteurs brushless + hélice } modélisés par des masses ponctuelles, de masse $mE = m_{moteur} + m_h$ (dans cette sous-partie les inerties des axes moteurs et hélices sont négligées devant les autres grandeurs).



On rappelle que $\gamma_2 = \pi - \gamma_1$

En additionnant les matrices d'inertie du corps 0, du drone et des bras 1 et 2 exprimées en O dans la base B_0 , l'inertie de l'ensemble, en tenant compte également des moteurs brushless et des hélices, se met sous la forme :

$$[I_{\Sigma}(0)] = \begin{bmatrix} I_{\Sigma x} & I_{\Sigma xy} & I_{\Sigma xz} \\ I_{\Sigma xy} & I_{\Sigma y} & I_{\Sigma yz} \\ I_{\Sigma xz} & I_{\Sigma yz} & I_{\Sigma z} \end{bmatrix}_{(O, B_0)}$$

Où les termes $I_{\Sigma x}$, $I_{\Sigma y}$ sont des fonctions de γ_1 et de la géométrie et $I_{\Sigma z}$ est uniquement fonction de la géométrie (et donc indépendant de γ_1).

9) Compte tenu de la géométrie retenue, simplifier la forme de la matrice d'inertie totale $I_{\Sigma}(O)$. Justifier vos simplifications.

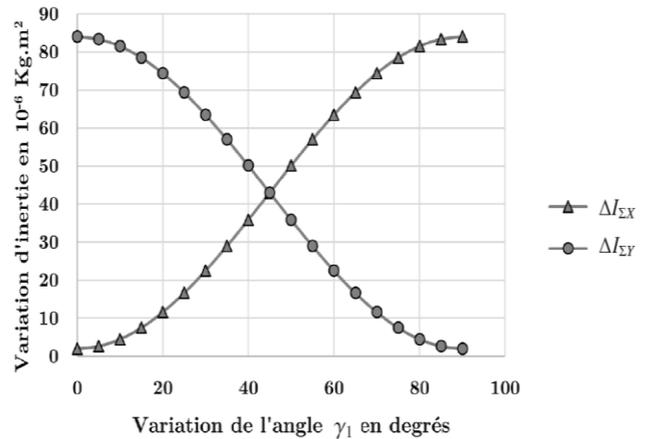
La relation entre γ_1 et γ_2 permet finalement d'avoir une matrice d'inertie de l'ensemble du drone qui est quasiment diagonale pour toutes valeurs de γ_1 , ce qui évite le couplage des équations de roulis, tangage et lacet et facilite ainsi le contrôle du drone. Cela permet également d'avoir un moment d'inertie selon l'axe de lacet $I_{\Sigma z}$ indépendant de la position des bras.

On note pour la suite $\Delta I_{\Sigma x}(\gamma_1)$ et $\Delta I_{\Sigma y}(\gamma_1)$ les variations d'inertie en roulis, respectivement en tangage, fonctions de γ_1 , telles que : $I_{\Sigma x} = \Delta I_{\Sigma x}(\gamma_1) + I_{\Sigma x}^{cste}$ et $I_{\Sigma y} = \Delta I_{\Sigma y}(\gamma_1) + I_{\Sigma y}^{cste}$, où $I_{\Sigma x}^{cste}$ et $I_{\Sigma y}^{cste}$ représentent les termes constants des moments d'inertie indépendants de γ_1 .

Figure ci-contre : Évolution de $\Delta I_{\Sigma X}$ et de $\Delta I_{\Sigma Y}$ en fonction de γ_1 . Les bras sont dépliés pour $\gamma_1 = 90^\circ$ et pliés (c'est à dire alignés avec le corps du drone) pour $\gamma_1 = 0^\circ$

On donne de plus ci-dessous les valeurs numériques, en kg.m^2 , de la matrice d'inertie de la géométrie simplifiée du drone pour la position bras dépliés ($\gamma_1 = 90^\circ$) :

$$[I_{\Sigma}(0)]_{\gamma_1 = 90^\circ} = \begin{bmatrix} 5,3 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 1,96 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1,72 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}_{(O, B_0)}$$



10) Justifier la forme de la matrice d'inertie donnée ci-dessus pour la position bras dépliés ($\gamma_1 = 90^\circ$)

11) D'après les données (courbes et matrice) données, en déduire, en %, les variations maximales d'inertie en roulis, définie par $\frac{\Delta I_{\Sigma X}}{I_{\Sigma X}(\gamma_1=90^\circ)}$ et en tangage, définie par $\frac{\Delta I_{\Sigma Y}}{I_{\Sigma Y}(\gamma_1=90^\circ)}$.

Conclure sur la différence de comportement en vol du drone en roulis et en tangage une fois les bras pliés.

Rappels :

Le torseur des actions transmissibles du solide 1 sur le solide 2 par la liaison entre 1 et 2 au point A sera noté :

$$\left\{ \mathcal{T}_{A(1 \rightarrow 2)} \right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_{A1 \rightarrow 2} \\ \overrightarrow{M}_{A1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_{A1 \rightarrow 2} = X_{A12} \cdot \vec{x} + Y_{A12} \cdot \vec{y} + Z_{A12} \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M}_{A1 \rightarrow 2} = L_{A12} \cdot \vec{x} + M_{A12} \cdot \vec{y} + N_{A12} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} X_{A12} & L_{A12} \\ Y_{A12} & M_{A12} \\ Z_{A12} & N_{A12} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinématique $\{v_{S/R}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R exprimé au point A sera noté :

$$\left\{ v_{(S/R)} \right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \\ \overrightarrow{V}_{AS/R} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \omega_{S/Rx} \cdot \vec{x} + \omega_{S/Ry} \cdot \vec{y} + \omega_{S/Rz} \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{V}_{AS/R} = v_{AS/Rx} \cdot \vec{x} + v_{AS/Ry} \cdot \vec{y} + v_{AS/Rz} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} \omega_{S/Rx} & v_{AS/Rx} \\ \omega_{S/Ry} & v_{AS/Ry} \\ \omega_{S/Rz} & v_{AS/Rz} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinétique $\{C_{S/R}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\left\{ C_{(S/R)} \right\} = \begin{Bmatrix} m \overrightarrow{V}_{GS/R} \\ \overrightarrow{\sigma}_{AS/R} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} m \overrightarrow{V}_{GS/R} \\ \overrightarrow{\sigma}_{AS/R} = m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}_{AS/R} + \overrightarrow{J}_A(S, \overrightarrow{\Omega}_{S/R}) \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} \quad \overrightarrow{J}_A = \text{opérateur d'inertie de S en A}$$

Le torseur dynamique $\{D_{S/R}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\left\{ D_{(S/R)} \right\} = \begin{Bmatrix} m \overrightarrow{\Gamma}_{GS/R} \\ \overrightarrow{\delta}_{AS/R} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} m \overrightarrow{\Gamma}_{GS/R} \\ \overrightarrow{\delta}_{AS/R} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)} \right]_R + m \cdot \overrightarrow{V}_{AS/R} \wedge \overrightarrow{V}_{GS/R} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

L'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \{ C_{(S/R)} \} \otimes \{ v_{(S/R)} \} = \frac{1}{2} (m \overrightarrow{V}_{GS/R} \cdot \overrightarrow{V}_{AS/R} + \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{AS/R})$$