

Contrôle continu de dynamique

Le sismomètre SEIS (Seismic Experiment for Interior Structures), déployé à la surface de Mars, est protégé des variations de la température et du vent à l'aide d'un bouclier thermique et d'une coque de protection. SEIS comporte deux sismomètres indépendants, le VBB (Very Broad Band) et le SP (Short Periods), montés sur une structure commune pouvant être réglée à l'horizontale grâce à des pieds de longueur variable.

- Le sismomètre VBB comporte trois systèmes identiques, composés chacun d'un pendule et d'un bâti, inclinés différemment par rapport au sol. Ils sont fixés dans une sphère en titane sous vide, et sensibles à une large bande de fréquence d'ondes sismiques, entre 0,01Hz et 0,5 Hz.
- Le sismomètre SP est adapté aux ondes sismiques de plus hautes fréquences, entre 0,1 et 50 Hz.

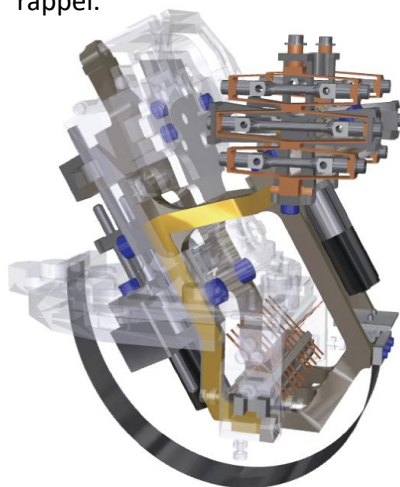
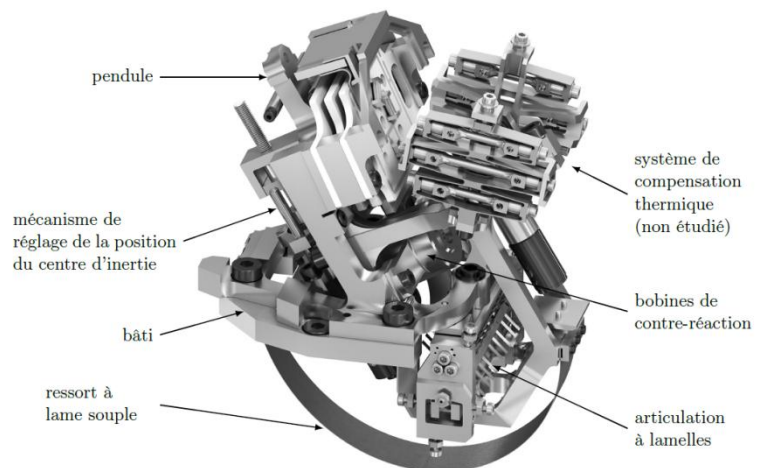
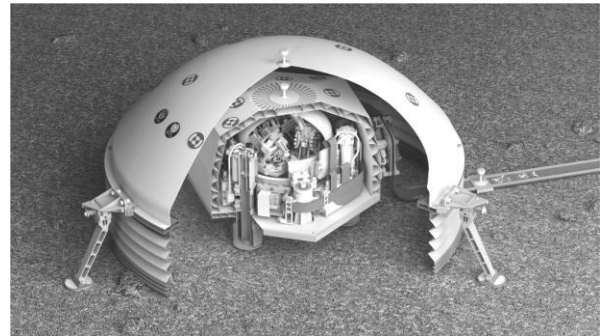
Dans ce sujet, on s'intéresse uniquement au sismomètre VBB. Une vue détaillée d'un des systèmes du VBB est fournie sur la figure ci-dessus et le détail des différents éléments qui le constituent est fourni ci-après.

Comme pour les applications terrestres, chaque système du sismomètre VBB possède un pendule qui oscille par rapport à un bâti sous l'impulsion de secousses sismiques transmises par le sol à l'instrument.

Une articulation à lamelles permet des mouvements de très faible amplitude avec un minimum de frottements visqueux entre le pendule et le bâti, et sans jeu.

Elle constitue l'axe de rotation du pendule dans son mouvement par rapport au bâti.

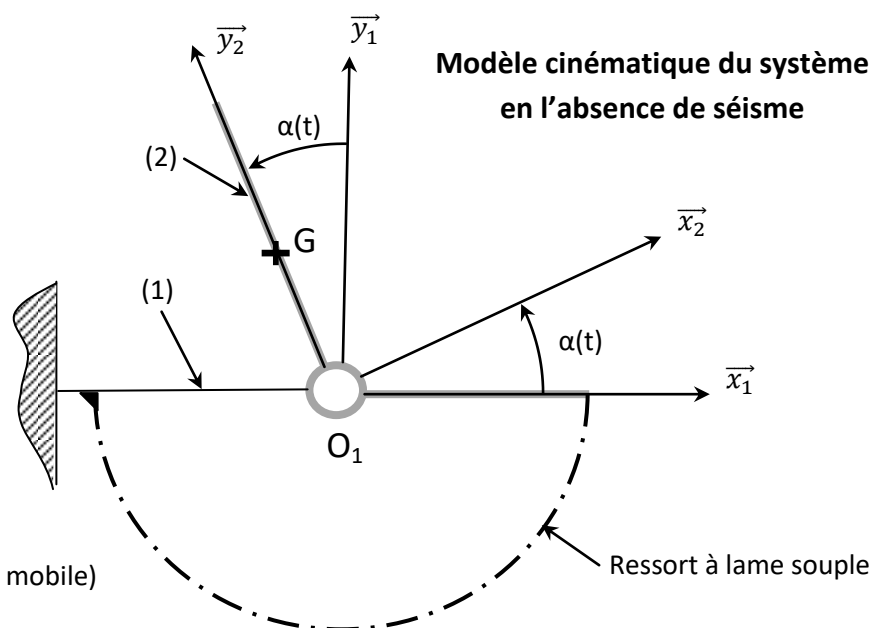
Le sismomètre VBB s'appuie sur le principe du pendule inversé. L'instabilité inhérente au pendule inversé lui confère une plus grande sensibilité que celle d'un pendule classique. Bien qu'instable par nature, le pendule inversé du sismomètre VBB conserve son équilibre grâce à un ressort à lame souple, recourbé en demi-cercle, et qui applique en permanence une action mécanique de rappel.



- (1) : Bâti lié au sol
(2) : Pendule (pièce mobile)

$$\vec{O_1G} = d \cdot \vec{y}_2$$

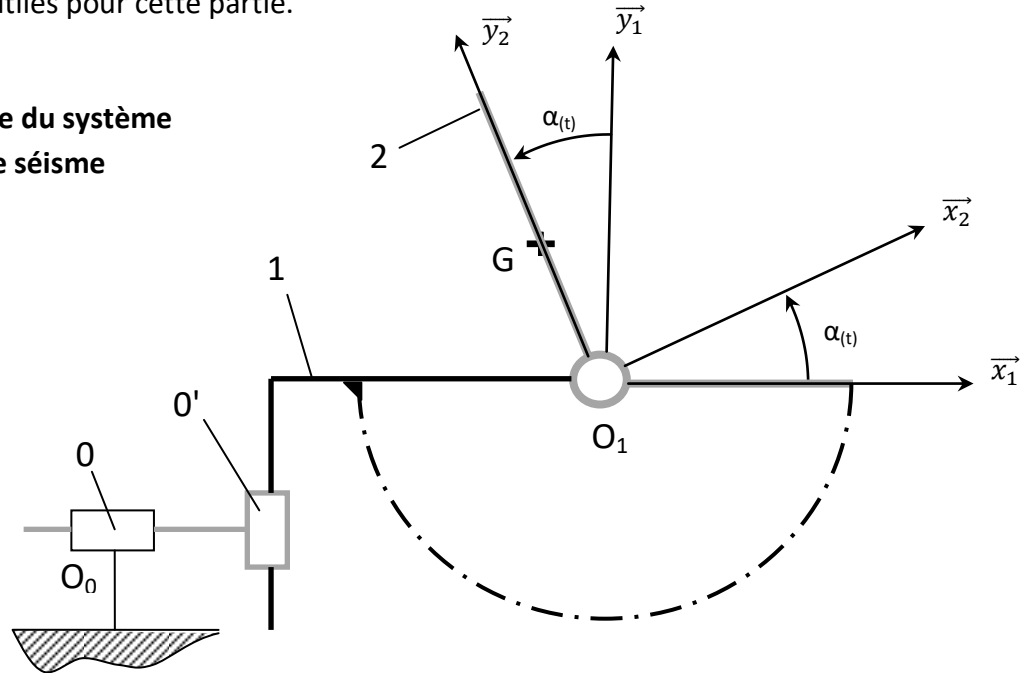
$$\alpha(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$$



Sensibilité intrinsèque du pendule à un séisme

Le schéma cinématique et le paramétrage du dispositif sont fournis ci-après ainsi que l'ensemble des notations et hypothèses utiles pour cette partie.

Modèle cinématique du système en présence de séisme



Notations

G	Centre d'inertie du pendule (2)
M	Masse du pendule (2)
C_0	Moment de précontrainte de l'ensemble { ressort+articulation }
k	Raideur de l'ensemble { ressort+articulation } sur l'axe (O_1, \vec{z}_1)
α_0	Position angulaire à vide du pendule
α_{eq}	Position angulaire du pendule à l'équilibre (sous l'effet des actions de la pesanteur et du ressort)
\vec{g}_M	Champ de la pesanteur à la surface de Mars, de direction $-\vec{y}_1$

Hypothèses

Le référentiel R_1 , auquel est associé le repère $R_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié au sol, est supposé galiléen en l'absence de séisme.

La liaison pivot réalisée par l'articulation à lamelles sur l'axe de rotation (O_1, \vec{z}_1) du pendule par rapport à (1) n'est pas parfaite. Les frottements visqueux sont pris en compte à travers un coefficient de frottement μ ($\mu > 0$) :

$$\{\mathcal{J}_{(1 \rightarrow 2)}\}_{o_1} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = X_{o_1} \cdot \vec{x}_1 + Y_{o_1} \cdot \vec{y}_1 + Z_{o_1} \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{M}_{o_1 \rightarrow 2} = L_{o_1} \cdot \vec{x}_1 + M_{o_1} \cdot \vec{y}_1 - \mu \cdot \dot{\alpha}(t) \cdot \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{(x_1, y_1, z_1)}$$

L'action de rappel de l'ensemble {ressort+ articulation} est assimilée à un couple sur l'axe de rotation (O_1, \vec{z}_1) du pendule :

$$\{\mathcal{J}_{(ressort \rightarrow 2)}\}_{o_1} = \left\{ (C_0 - k \cdot (\alpha(t) - \alpha_0)) \cdot \vec{z}_1 \right\}_{(x_1, y_1, z_1)}$$

En tenant compte des symétries, la matrice d'inertie du pendule (2) en O_1 est de la forme :

$$[I_{O_1(2)}] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)}$$

Le référentiel R_0 , auquel est associé le repère $R_0 = (\mathbf{O}_0; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, est supposé galiléen.

On note la vitesse du sol (1) par rapport à R_0 : $\overrightarrow{V_{O_1 \ 1/R_0}} = V_x(\mathbf{t}) \cdot \vec{x}_1 + V_y(\mathbf{t}) \cdot \vec{y}_1$

En cas de séisme, le sol (1) est en mouvement. Il entraîne dans son mouvement le bâti du système et ne peut plus être considéré comme un référentiel galiléen.

Le réglage à distance de la position du centre d'inertie permet d'imposer $\alpha_{eq} = \alpha_0$

On admet qu'il y a un mouvement de translation de (1) par rapport au repère R_0 dans les directions \vec{x}_1 et \vec{y}_1 , comme imposé par les deux liaisons glissières en série entre (1) et (0) sur le schéma cinématique précédent

Aucun degré de liberté en rotation n'est admis : $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0}$

Le système doit permettre d'amplifier les mouvements sur la plage de fréquences attendues pour les séismes martiens. On définit pour cela les exigences du tableau ci-après.

2	Être mécaniquement sensible aux séismes attendus sur Mars		
2.1	Être suffisamment sensible	Amplification mécanique	$> 2 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
2.2	Être sensible aux fréquences des séismes attendus sur Mars	Amplification en fonction de la fréquence des mouvements du sol	$\geq 10 \text{ dB}$ dans la bande $[0; 01 ; 0; 5] \text{ Hz}$ soit $[0,06 ; 3] \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$

Objectif : mettre en évidence la grandeur physique à laquelle le pendule est sensible lors d'un séisme, ainsi que ses caractéristiques dynamiques, en vue du réglage de sa commande.

1) Déterminer l'expression de la vitesse de G par rapport à R_0 $\overrightarrow{V_{G \ 2/R_0}}$

2) Déterminer, dans son mouvement par rapport au repère R_0 , l'expression du moment cinétique du pendule (2) en O_1 , $\overrightarrow{\sigma_{O_1 \ 2/R_0}}$. On l'exprimera en fonction des paramètres cinétiques de (2) et des paramètres géométriques et cinématiques du système.

3) Déterminer le moment dynamique du pendule (2) dans son mouvement par rapport au repère R_0 en O_1 , et démontrer que sa projection sur \vec{z}_1 est de la forme suivante :

$\overrightarrow{\delta_{O_1 \ 2/R_0}} \cdot \vec{z}_1 = \mathbf{J} \cdot \ddot{\alpha}(\mathbf{t}) - \mathbf{d} \cdot \mathbf{M} \gamma_{x_2}(\mathbf{t})$ où l'on précisera l'expression de J et $\gamma_{x_2}(\mathbf{t})$.

On déduit de cette équation que \vec{x}_2 est la direction de sensibilité du pendule, c'est-à-dire que le pendule n'est sensible qu'aux accélérations du sol en projection sur \vec{x}_2

4) Isoler le pendule (2) et faire le bilan des actions mécaniques qui lui sont appliquées

5) Ecrire le moment résultant en O_1 des actions qui lui sont appliquées $\overrightarrow{M_{O_1 \ 2 \rightarrow 2}}$

6) Montrer que l'application du théorème du moment dynamique à (2) en O_1 en projection sur \vec{z}_1 permet d'obtenir l'équation du mouvement du pendule suivante :

$$\mathbf{J} \cdot \ddot{\alpha}(\mathbf{t}) + \mu \cdot \dot{\alpha}(\mathbf{t}) + \mathbf{k}(\alpha(\mathbf{t}) - \alpha_0) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{M} \cdot g_M \cdot \sin \alpha(\mathbf{t}) + \mathbf{d} \cdot \mathbf{M} \gamma_{x_2}(\mathbf{t}) + C_0$$

Justifier que l'équation obtenue n'est pas linéaire, indépendamment de l'expression de $x_2(\mathbf{t})$.

Afin de mettre en évidence les caractéristiques du pendule en réponse à une accélération du sol $x_2(\mathbf{t})$, ses oscillations ayant une amplitude très faible, l'équation du mouvement est linéarisée autour du point d'équilibre $\alpha_{eq} = \alpha_0$ du pendule.

On pose $\alpha(\mathbf{t}) = \alpha_0 + \Delta\alpha(\mathbf{t})$, avec $\Delta\alpha(\mathbf{t}) \ll \alpha_0$

7) Montrer que l'équation du mouvement linéarisée s'écrit :

$$\mathbf{J} \ddot{\Delta\alpha}(\mathbf{t}) + \mu \cdot \dot{\Delta\alpha}(\mathbf{t}) + \mathbf{k} \cdot \Delta\alpha(\mathbf{t}) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{M} \cdot g_M \cdot \Delta\alpha(\mathbf{t}) + \mathbf{d} \cdot \mathbf{M} \gamma_{x_2}(\mathbf{t}) + C_0$$

Rappels :

Le torseur des actions transmissibles du solide 1 sur le solide 2 par la liaison entre 1 et 2 au point A sera noté :

$$\left\{ \mathcal{T}_{A(1 \rightarrow 2)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{A1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A1 \rightarrow 2}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{A1 \rightarrow 2}} = X_{A12} \cdot \vec{x} + Y_{A12} \cdot \vec{y} + Z_{A12} \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{A1 \rightarrow 2}} = L_{A12} \cdot \vec{x} + M_{A12} \cdot \vec{y} + N_{A12} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_{(x,y,z)} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{A12} & L_{A12} \\ Y_{A12} & M_{A12} \\ Z_{A12} & N_{A12} \end{array} \right\}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinématique $\{v_{S/R}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R exprimé au point A sera noté :

$$\left\{ v_{(S/R)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{AS/R}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_{S/Rx} \cdot \vec{x} + \omega_{S/Ry} \cdot \vec{y} + \omega_{S/Rz} \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{V_{AS/R}} = v_{AS/Rx} \cdot \vec{x} + v_{AS/Ry} \cdot \vec{y} + v_{AS/Rz} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_{(x,y,z)} = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_{S/Rx} & v_{AS/Rx} \\ \omega_{S/Ry} & v_{AS/Ry} \\ \omega_{S/Rz} & v_{AS/Rz} \end{array} \right\}_{(x,y,z)}$$

Le torseur cinétique $\{C_{S/R}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\left\{ C_{(S/R)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{V_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{AS/R}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{V_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{AS/R}} = m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{AS/R}} + \overrightarrow{J_A}(S, \overrightarrow{\Omega_{S/R}}) \end{array} \right\}_{(x,y,z)} \quad \overrightarrow{J_A} = \text{opérateur d'inertie de S en A}$$

Le torseur dynamique $\{D_{S/R}\}$ du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\left\{ D_{(S/R)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{\Gamma_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{AS/R}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{\Gamma_{GS/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{AS/R}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{AS/R}} \right]_R + m \cdot \overrightarrow{V_{AS/R}} \wedge \overrightarrow{V_{GS/R}} \end{array} \right\}_{(x,y,z)}$$

L'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \left\{ C_{(S/R)} \right\} \otimes \left\{ v_{(S/R)} \right\} = \frac{1}{2} (m \overrightarrow{V_{GS/R}} \cdot \overrightarrow{V_{AS/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{AS/R}})$$