

## Etude d'un robot SPHERO

( d'après concours d'entrée à Centrale/Supélec )

### Présentation du support

Une nouvelle génération de robots à mobilité non conventionnelle a vu le jour avec la conception de robots en forme de sphère. Ces robots commencent à être utilisés dans des environnements difficiles (centrale nucléaire, terrain irrégulier) pour des missions d'inspection et de surveillance. Ce type de robot est aussi présent dans l'industrie du divertissement sous la forme d'objets connectés contrôlables avec un smartphone (ou tablette).

C'est le cas du robot **Sphero** créé par la société Orbotix et qui sert de support d'étude pour ce sujet.

Créé pour le loisir et l'éducation, le robot Sphero roule sur lui-même pour se déplacer. Une base robotique appelée module interne et dite différentielle (plateforme munie de deux roues motrices indépendantes, de même axe) est placée dans une sphère (le corps du robot) qui sert de liaison au sol et permet le déplacement (figure 1).

Le Sphero est commandé par un smartphone avec lequel l'utilisateur guide le robot.

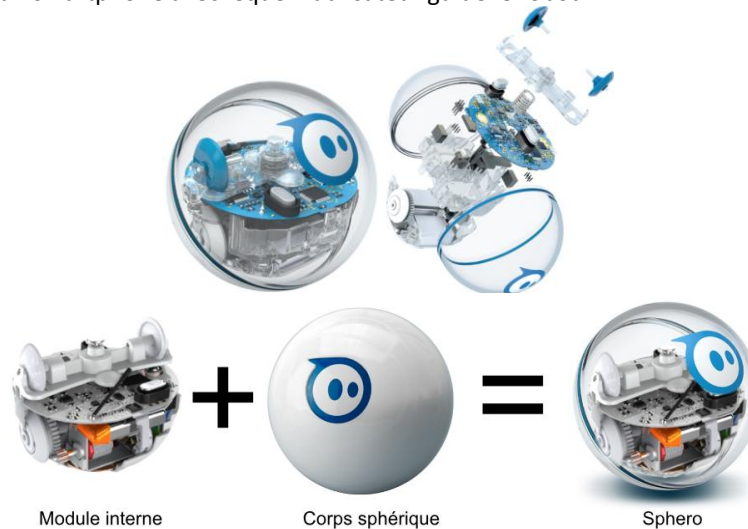


Figure 1 Constitution du Sphero

Même si les consignes de l'utilisateur correspondent au comportement attendu du Sphero (cap et vitesse du corps sphérique), c'est en réalité le module interne que l'utilisateur commande grâce à son smartphone. Le principe de déplacement du Sphero peut être comparé à celui d'une roue de hamster : quand l'animal court à l'intérieur, il déplace le centre de gravité du système, ce qui fait tourner la roue. Ainsi, les deux roues motrices du module interne créent le roulement du corps sphérique du Sphero.

### Déplacement et réglage de cap du robot Sphero

Le robot est équipé de deux actionneurs (moteurs électriques à courant continu) indépendants. Il est de fait nécessaire de mettre en évidence le lien entre le comportement du robot Sphero et celui des actionneurs.

#### Objectif

Mettre en évidence la relation entre les actionneurs et le comportement du Sphero, afin de déterminer la façon dont les actionneurs doivent être commandés.

#### Modélisation et paramétrage

- 1 : corps sphérique du robot,
- 2 : roue motrice droite,
- 3 : arbre moteur denté droit,
- 4 : la roue motrice gauche,
- 5 : arbre moteur denté gauche
- 6 : châssis du module interne.

La désignation « **module interne** » correspond à l'ensemble {2+3+4+5+6}.

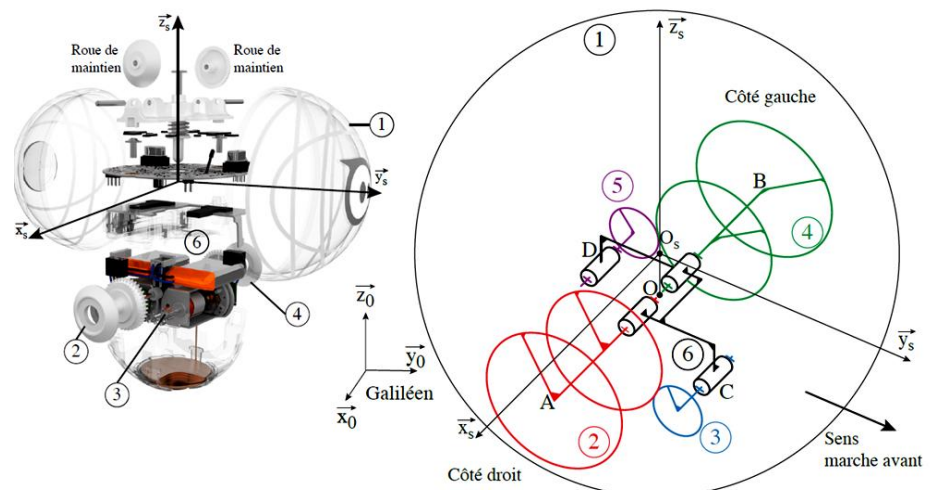
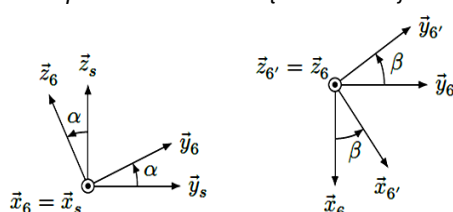


Figure 11 Définition des repères  $\mathcal{R}_6$  et  $\mathcal{R}_{6'}$

Le repère  $R_s (O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  accompagne le robot Sphero et est tel que  $\vec{z}_s = \vec{z}_0$  à chaque instant du mouvement, avec  $\vec{z}_0$  la verticale du lieu et  $\vec{y}_s$  dans la direction d'avance du robot. Le point  $O_s$  correspond au centre du corps sphérique du robot. Le châssis du module interne possède une mobilité en lacet et une en tangage par rapport au corps du Sphero.

Le roulis du châssis du module interne par rapport au corps sphérique 1 n'est pas possible du fait de la forme des roues et de leur matière.

Le repère  $R_6 (O, \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$  se déduit du repère  $R_s$  par rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $(O, \vec{x}_s)$ . Cet angle  $\alpha$  définit l'angle de tangage du châssis du module interne par rapport au repère  $R_s$ .

Le repère  $R_{6'} (O, \vec{x}_{6'}, \vec{y}_{6'}, \vec{z}_{6'} = \vec{z}_6)$  lié au châssis du module interne, se déduit du repère  $R_6$  par rotation d'angle  $\beta$  autour de l'axe  $(O, \vec{z}_6)$ . Cet angle  $\beta$  définit l'angle de lacet du châssis du module interne par rapport au repère  $R_s$ .

La figure ci-après propose un schéma cinématique du Sphero projeté dans le plan  $(O, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  ainsi que dans le plan  $(O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$  (le système de maintien n'est pas pris en compte).

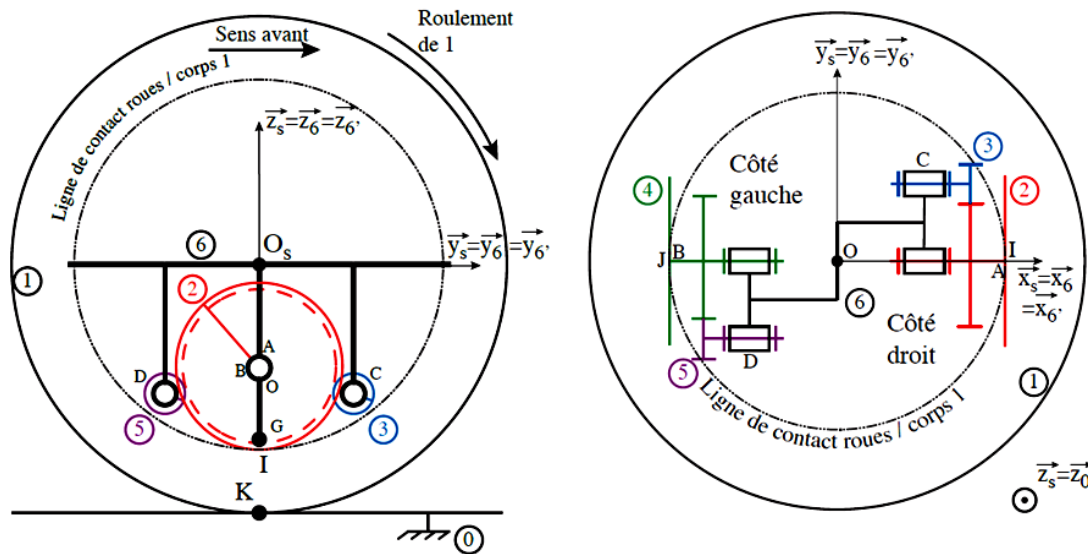


Figure 12 Schémas cinématiques du Sphero vu de côté et de dessus avec  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$

### Hypothèses

L'hypothèse de roulement sans glissement sera adoptée au point  $I$  (point de contact 2/1), au point  $J$  (point de contact 4/1) et au point  $K$  (point de contact 1/0).

### Modèles cinématiques

— Les torseurs cinématiques sont notés :  $\{ \mathbf{v}_{S_i/S_{1j}} \} = \begin{Bmatrix} p_{ij} & u_{ij} \\ q_{ij} & v_{ij} \\ r_{ij} & w_{ij} \end{Bmatrix}_{X, B_{6i}}$

— Du fait de l'hypothèse de roulement sans glissement au point  $I$ , le torseur cinématique de la liaison 2/1

s'écrit en  $I$  et dans la base  $R_{6'} (O, \vec{x}_{6'}, \vec{y}_{6'}, \vec{z}_{6'})$  :  $\{ \mathbf{v}_{2/1} \} = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{I, B_{6i}}$

Pour les mêmes raisons,  $\{ \mathbf{v}_{4/1} \} = \begin{Bmatrix} p_{41} & 0 \\ q_{41} & 0 \\ r_{41} & 0 \end{Bmatrix}_{J, B_{6i}}$

— Le torseur cinématique  $\{ \mathcal{V}_{6/1} \}$  en  $O$  est de la forme  $\{ \mathcal{V}_{6/1} \} = \begin{Bmatrix} p_{61} & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{61} & 0 \end{Bmatrix}_{O, B_{6i}}$

$p_{61}$  correspond au taux de rotation en tangage du châssis du module interne par rapport au corps sphérique 1 du Sphero, et  $r_{61}$  correspond au taux de rotation en lacet du châssis du module interne par rapport au corps sphérique 1 du Sphero.

— Les autres liaisons mécaniques ont aussi leur torseur cinématique défini dans le repère  $R_{6'}$ .

### Données géométriques

$\vec{IA} = R \cdot \vec{z}_{6'} = \vec{JB}$  avec  $R = 8$  mm rayon de la roue motrice 2 ;

$\vec{OA} = L \cdot \vec{x}_{6'} = -\vec{OB}$  avec  $R_s = 74$  mm rayon du corps sphérique 1 ;

— le rapport de réduction entre 2 et 3 (et entre 4 et 5) est noté  $k$  avec  $k = 0,21 = \left| \frac{p_{26}}{p_{36}} \right| = \left| \frac{p_{46}}{p_{56}} \right|$

Questions :

- 1) Exprimer  $\vec{V}_{I2/1}$  en fonction de  $\vec{V}_{I6/2}$  et de  $\vec{V}_{I6/1}$ .
- 2) Ecrire  $\vec{V}_{I2/6}$  en fonction de  $\vec{\Omega}_{2/6}$
- 3) Que vaut  $\vec{V}_{I2/1}$  ? Justifier. En déduire une relation entre  $p_{26}$ ,  $p_{61}$  et  $r_{61}$  ainsi que les paramètres R et L
- 4) Exprimer  $\vec{V}_{J4/1}$  en fonction de  $\vec{V}_{J6/4}$  et de  $\vec{V}_{J6/1}$
- 5) Ecrire  $\vec{V}_{J4/6}$  en fonction de  $\vec{\Omega}_{4/6}$
- 6) Que vaut  $\vec{V}_{J4/1}$  ? Justifier. En déduire une relation entre  $p_{46}$ ,  $p_{61}$  et  $r_{61}$  ainsi que les paramètres R et L
- 7) Montrer qu'il est possible d'écrire que  $r_{21} = k \cdot \frac{R}{2L} (p_{36} - p_{56})$  avec  $p_{36}$  le taux de rotation du moteur droit et  $p_{56}$  celui du moteur gauche.
- 8) Montrer que l'expression de  $r_{61}$  en fonction de  $p_{36}$  et  $p_{56}$  est de la forme  $r_{61} = \lambda (p_{36} - p_{56})$  avec  $\lambda$  à déterminer.
- 9) Écrire au point A les torseurs cinématiques suivants :  $\{\mathcal{V}_{6/1}\}$ ,  $\{\mathcal{V}_{2/6}\}$  et  $\{\mathcal{V}_{1/2}\}$
- 10) Donner l'expression de  $p_{21}$  en fonction de  $p_{36}$ , de  $p_{56}$  et de  $k$ .
- 11) Montrer que l'expression de  $p_{61}$  est de la forme  $p_{61} = \mu (p_{36} + p_{56})$  avec  $\mu$  à déterminer.

Pour la suite il est considéré que  $\lambda = 0,074$  et  $\mu = 0,105$ .

Lors d'un changement de cap du Sphero le châssis du module interne admet un mouvement de lacet autour de l'axe  $(O, \vec{z}_{6'})$ . Le cap du robot Sphero est en fait imposé par celui du module interne. Le lacet du châssis du module interne ne doit pas induire de tangage car l'avance et le changement de cap du Sphero doivent être indépendants.

**Comportement des actionneurs pour un changement de cap**

- 12). Quelle doit être la valeur de  $p_{61}$  lors d'un changement de cap ?
- 13). En déduire la relation entre les taux de rotation des moteurs du Sphero lors d'un changement de cap.

**Comportement des actionneurs pour un déplacement en ligne droite**

- 14). Quelle est la valeur de  $r_{61}$  lorsque le Sphero se déplace en ligne droite ?
- 15). En déduire la relation entre les taux de rotation des moteurs du Sphero afin que ce dernier puisse se déplacer en ligne droite.

**Vitesse d'avance et respect de l'exigence de déplacement :**

"Le Sphero doit se déplacer avec précision et être réactif aux changements de consigne de vitesse."

Au point  $K$  de contact entre le corps 1 et le sol noté 0 il y a roulement sans glissement et donc le torseur cinématique de la liaison

$$1/0 \text{ s'écrit en } K \text{ et dans la base } Bs(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s) : \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} p_{10} & 0 \\ p_{10} & 0 \\ r_{10} & 0 \end{Bmatrix}_{K, R_s}$$

- 16). Lors d'un mouvement d'avance en ligne droite, donner la relation entre  $p_{10}$ ,  $R_s$  et  $v$  la vitesse d'avance du robot par rapport au sol ( $v = \vec{V}_{O_S 1/0} \cdot \vec{y}_s$ ).

Pour cette étude, on se place en régime établi où l'angle de tangage  $\alpha$  du module interne est constant.

- 17). Pour  $\alpha$  constant et toujours lors d'un déplacement en ligne droite ( $\vec{x}_s = \vec{x}_6, = \vec{x}_6$ ), que vaut la composante  $p_{60} = \vec{\Omega}_{2/6} \cdot \vec{x}_s$  correspondant à la vitesse de tangage du module interne par rapport au sol ?

- 18). En déduire la relation entre  $p_{10}$  et  $p_{61}$ .

Le constructeur du robot Sphero annonce une vitesse maximale d'avance en ligne droite  $v = \vec{V}_{O_S 1/0} \cdot \vec{y}_s = 2m.s^{-1}$  alors que les moteurs possèdent un taux de rotation maximal de  $1200 \text{ tr.min}^{-1}$

- 19). Déterminer l'expression de  $v$  en fonction de  $p_{36}$  et de  $p_{56}$ . Faire l'application numérique et conclure sur le respect de l'exigence : "Le Sphero doit se déplacer avec précision et être réactif aux changements de consigne de vitesse."

**Comportement en tangage du Sphero**

**Exigences à respecter:**

"Il ne faut pas d'oscillations en tangage lors de la phase d'arrêt."

"L'angle de tangage du module interne doit être limité lors des déplacements." (Angle de tangage < 40 deg)

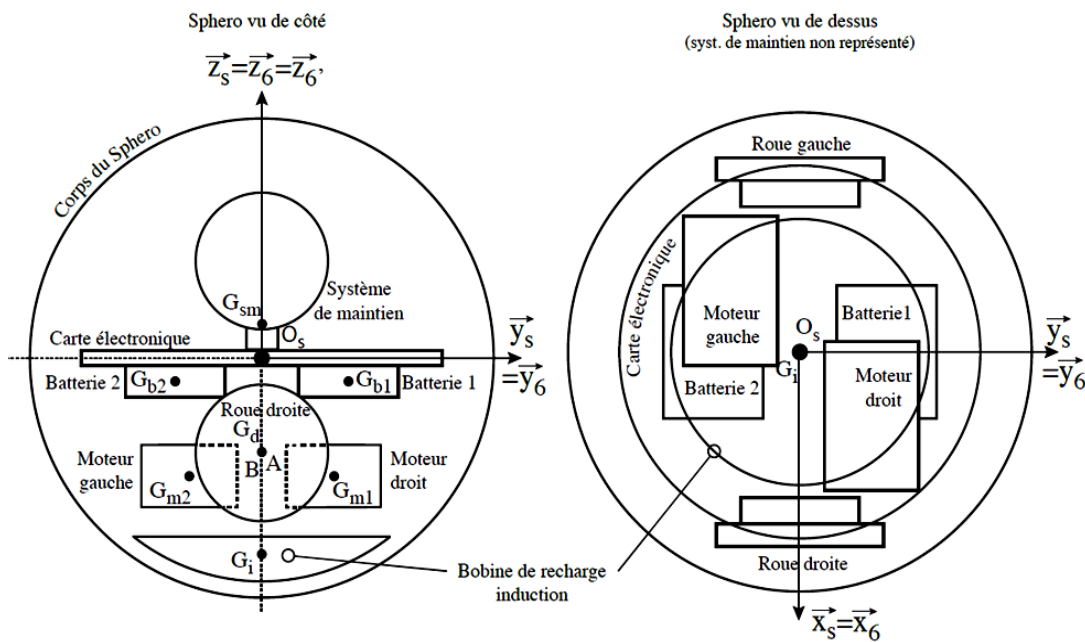
Les choix technologiques de conception du robot Sphero ont été réalisés afin que « naturellement » le robot n'ait pas d'oscillations en tangage à l'arrêt et que le tangage du module interne soit à angle constant lors des phases de mouvement à vitesse uniforme.

**Objectif**

Vérifier que la structure mécanique du robot permet le respect de la contrainte sur le tangage du module interne.

**Analyse de l'agencement mécanique du robot**

La figure 14 représente le robot Sphero à l'arrêt vu de côté et de dessus. Le robot a été conçu de façon à ce que les éléments principaux du module interne soient disposés symétriquement par rapport à l'axe  $(O_s; \vec{z}_{6'})$ . Quant à la carte électronique, son centre de gravité est confondu avec le centre  $O_s$ .



**Figure 14** Robot Sphero représenté à l'arrêt de profil et vu de dessus  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$

$G_i$  est le centre de gravité de la bobine de recharge par induction,  $G_{m1}$  celui du moteur droit,  $G_{m2}$  celui du moteur gauche,  $G_{b1}$  celui de la batterie 1,  $G_{b2}$  celui de la batterie 2,  $A$  celui de la roue droite,  $B$  celui de la roue gauche et  $G_{sm}$  celui du système de maintien.

Ces points sont définis par :

- $\vec{O_s G_{b1}} \cdot \vec{z}_{6'} = \vec{O_s G_{b2}} \cdot \vec{z}_{6'} = -h_b$
- $\vec{O_s G_{m1}} \cdot \vec{z}_{6'} = \vec{O_s G_{m2}} \cdot \vec{z}_{6'} = -h_m$
- $\vec{O_s A} \cdot \vec{z}_{6'} = \vec{O_s B} \cdot \vec{z}_{6'} = -h_r$
- $\vec{O_s G_{sm}} \cdot \vec{z}_{6'} = h_s$
- $\vec{O_s G_i} \cdot \vec{z}_{6'} = -h_i$

La masse totale du module interne est  $M = 115$  g. Les masses des différents composants sont fournies tableau 1.

Désignation	Position	Masse
Carte électronique	en $O_s$	$m_c = 12$ g
Batterie 1	$h_b = 9$ mm	$m_b = 7$ g
Batterie 2	$h_b = 9$ mm	$m_b = 7$ g
Bobine de recharge	$h_i = 35$ mm	$m_i = 27$ g
Système de maintien	$h_s = 9$ mm	$m_s = 8$ g

Désignation	Position	Masse
Roue droite	$h_r = 15$ mm	$m_r = 1$ g
Roue gauche	$h_r = 15$ mm	$m_r = 1$ g
Moteur droit	$h_m = 20$ mm	$m = 26$ g
Moteur gauche	$h_m = 20$ mm	$m = 26$ g

**Tableau 1** Masses et positions des composants

**20).** La position du centre de gravité  $G$  du module interne étant définie par  $\vec{O_s G} = x_g \cdot \vec{x}_{6'} + y_g \cdot \vec{y}_{6'} + z_g \cdot \vec{z}_{6'}$ , déterminer  $x_g$ ,  $y_g$  et  $z_g$  en fonction des paramètres dimensionnels du robot. Faire les applications numériques.

**21).** À partir de la question précédente, expliquer l'intérêt de la répartition des masses des composants du module interne.

### Comportement en tangage du module interne

Même si la structure du robot semble en cohérence avec les exigences à atteindre, il reste encore à analyser le comportement en tangage du module interne lors de l'avance du robot.

Il faut que lors d'un mouvement d'avance rectiligne et pour l'accélération minimale préconisée du robot Sphero, l'angle de tangage du module interne soit constant et n'excède pas 40 deg (exigence 2.2.1.1.). Au delà de cette valeur, les oscillations en tangage du Sphero lors de son arrêt seront d'amplitude trop grande et leur nombre trop important. De plus, sur un sol dur et non parfait (tel que du béton), ces oscillations couplées aux défauts du sol peuvent induire des petites oscillations en lacet qui ont pour conséquence un changement d'orientation du robot. De fait, avant tout nouveau démarrage, l'utilisateur serait contraint de régler de nouveau le cap s'il voulait que le robot reprenne celui initialement suivi.

Pour ce qui suit  $\beta = 0$  (pas de lacet) et donc les repères  $R_6$  et  $R_6'$  sont confondus. La liaison corps 1/sol est une liaison sphère/plan de centre  $K$  et de normale  $z_s \vec{z}_s$  avec frottement.

On rappelle  $\vec{O_s K} = -R_s \vec{z}_s$  avec  $R_s = 74$  mm.

Expression du **torseur mécanique de l'action du sol sur le corps 1** :  $\{\mathcal{T}_{(0 \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{T}_{01} \cdot \vec{y}_s + \vec{N}_{01} \cdot \vec{z}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}$  avec  $N_{01} > 0$  et  $T_{01} > 0$

L'accélération constante minimale préconisée du Sphero s'écrit :  $\vec{a}_{O_s,6/0} = a \cdot \vec{y}_s$  avec  $a = 1,5 \text{ m.s}^{-2}$ .

On néglige les masses des solides 1, 2, 3, 4, 5 au regard de la masse du châssis du module interne 6. La masse de l'ensemble des solides {1, 2, 3, 4, 5, 6} est  $M = 115$  g, et le centre de gravité de cet ensemble est  $G$  avec  $\vec{O_s G} = z_g \cdot \vec{z}_6$  et  $z_g = -18$  mm.

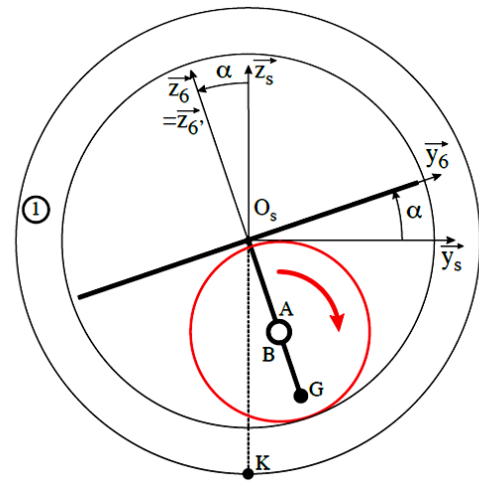
L'angle de tangage,  $\alpha$ , du châssis du module interne est défini sur la figure ci-contre

**22).** Le système isolé étant l'ensemble du Sphero constitué des solides {1, 2, 3, 4, 5, 6}, faire un inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à cet ensemble.

**23).** En considérant un mouvement rectiligne uniformément accéléré du châssis du module interne du Sphero et un angle  $\alpha$  de tangage du châssis du module interne constant, donner l'expression de  $\vec{\delta}_{K(S/0)}$  (avec  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ) moment dynamique de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6} au point  $K$ .

**24).** Après avoir précisé le théorème utilisé, déterminer l'accélération  $a$  en fonction de l'angle de tangage  $\alpha$  de  $z_g$  et de  $R_s$  :  $a(\alpha, z_g, R_s)$ .

**25).** En admettant que la fonction  $a(\alpha, z_g, R_s)$  est croissante en  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0\text{deg}, 50\text{deg}]$ , conclure au regard de l'exigence : "L'angle de tangage du module interne doit être limité lors des déplacements." (Angle de tangage < 40 deg)



Vue de profil du Sphero avec  $\alpha \neq 0$  et  $\beta = 0$