

## Contrôle continu de dynamique

### Robot porte-sonde

L'échographie est une technique d'imagerie médicale basée sur l'exploitation de la réflexion d'une onde ultrasonore au niveau des interfaces physiologiques entre organes.

La robotisation de l'échographie s'élargit son champ d'application. Grâce à la télé-échographie robotisée (**figure ci-dessous**), il devient possible de réaliser une échographie sur un patient situé sur un site isolé (appelé site patient), alors même que le spécialiste en imagerie médicale se trouve sur un site distant de celui où est pratiqué l'examen (appelé site expert).

Sur le site patient équipé du robot porte-sonde, d'un échographe et d'un système de visioconférence, un professionnel de santé est chargé de positionner le robot porte-sonde sur le patient et de le maintenir au cours de l'examen. Depuis le site expert distant, le médecin dirige l'examen échographique.

En manipulant une sonde fictive, il donne une consigne de position pour la sonde, que le robot exécute au contact du patient. Réalisant le lien entre les deux sites, le réseau de communication (ISDN, 4G, satellite...) permet en temps réel, le contrôle du robot, la visioconférence ainsi que la transmission des images échographiques.

La **figure 2** décrit le robot porte-sonde constitué :

- d'une structure porteuse **0** ;
- d'un module de rotation, composé des sous-ensembles **1, 2, 3**, permettant d'orienter la sonde en lui imposant trois rotations ( $R_1, R_2, R_3$ ) suivant les axes 1 à 3 ;
- du **porte-sonde 4** sur lequel est fixé la sonde échographique **S**. La translation  $T$  suivant l'axe 4 permet de contrôler l'effort de contact sonde/peau du patient.

Le système de télééchographie doit lui permettre d'orienter la sonde de manière à trouver la meilleure incidence entre le plan ultrasonore et la partie de l'organe examinée.

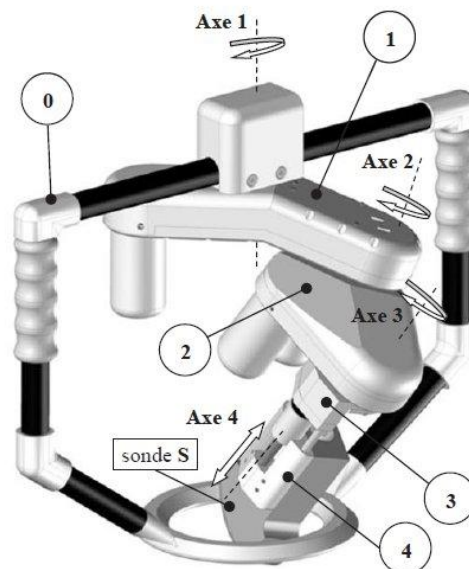


Figure 2 - Robot porte-sonde

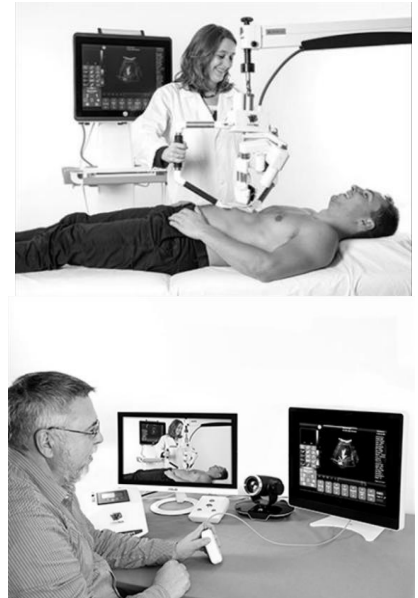


Figure 3 - Chaîne cinématique associée à l'axe 1

Réducteur (R)	Rapport de réduction $r = 1/30,7$
Poulie $P_0$	Diamètre $d_0 = 42$ mm
Poulie $P_1$	Diamètre $d_1 = 13$ mm

Tableau 1 - Caractéristiques de la transmission

La qualité du positionnement de la sonde sur le patient qui conditionne l'obtention d'images d'intérêt nécessite de maîtriser notamment :

- le mouvement imposé à la sonde par le robot porte-sonde ;
- la commande, depuis un site distant, des différents axes du robot porte-sonde.

**Objectif :** déterminer le couple moteur nécessaire à l'entraînement en rotation autour de l'axe 1.

Le robot se trouvant dans la configuration bras tendu représenté ci-après, on étudie la rotation  $R_1$  autour de l'axe 1 ( $A, \vec{z}_1$ ).

Les trois autres degrés de liberté (rotations  $R_2$  et  $R_3$ , translation  $T$ ) du robot sont bloqués, de telle sorte que  $\theta_2(t) = 0$ ,  $\theta_3(t) = 0$  et l'extrémité de la sonde reste confondue avec l'origine  $O$ .

La définition des solides, repères et angles, est celle proposée sur les figures page précédente, complétée ici avec le groupe de motorisation de l'axe 1, constitué du moteur (stator lié à 1 et rotor), du réducteur et de la transmission poulies-courroie.

Afin de déterminer le couple moteur nécessaire pour réaliser l'entraînement en rotation autour de l'axe 1 ( $A, \vec{z}_1$ ), on propose d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement par rapport à  $O$ .

Le référentiel auquel est associé le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est considéré comme Galiléen.

On note :

- $E_1'$ , l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et du stator moteur ;
- $E_5$ , l'ensemble constitué du rotor, des parties mobiles du réducteur et de la poulie  $P_1$

### Paramétrage cinématique

- $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est le repère associé à l'ensemble  $E_1'$  ;

La rotation de  $E_1'/O$  est paramétrée par l'angle variable  $\theta_1(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$

- $R_5(O, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  est le repère associé à l'arbre de sortie du réducteur ;

La rotation de  $R_5/R_1$  est paramétrée par l'angle variable  $\theta_5(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_5) = (\vec{y}_1, \vec{y}_5)$ .

- $R_m(O, \vec{x}_m, \vec{y}_m, \vec{z}_m)$  est le repère associé au rotor moteur ;

La rotation de  $R_m/R_1$  est paramétrée par l'angle variable  $\theta_m(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_m) = (\vec{y}_1, \vec{y}_m)$ .

### Données cinétiques

#### Ensemble $E_1' = \{1, 2, 3, 4, \text{stator}\}$

- $m_1$  : masse de l'ensemble  $E_1'$
- $G_1$  : centre d'inertie de l'ensemble  $E_1'$  tel que  $\vec{AG}_1 = y_1 \cdot \vec{y}_1 - z_1 \cdot \vec{z}_1$ ;  $y_1, z_1$  constantes
- $I(E_1', G_1)$  : matrice d'inertie dans la base  $B_1$  au point  $G_1$  telle que :

$$I(E_1', G_1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{B_1}$$

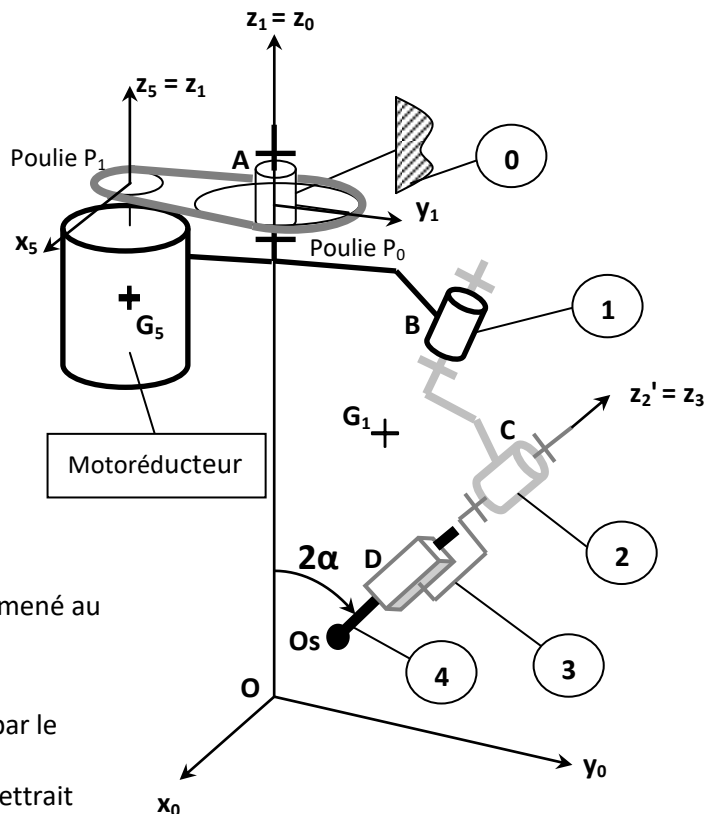
#### Ensemble $E_5 = \{\text{rotor, réducteur, poulie}\}$

- $M_5$  : masse de l'ensemble  $E_5$
  - $G_5$  : centre d'inertie de l'ensemble  $E_5$  tel que  $\vec{AG}_5 = -y_5 \cdot \vec{y}_1 - z_5 \cdot \vec{z}_1$ ;  $y_5, z_5$  constantes
  - $I_5$  : moment d'inertie équivalent de l'ensemble  $E_5$  ramené au rotor moteur
- $$\vec{\Omega}_{M/0} = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_1 + \dot{\theta}_m \cdot \vec{z}_1$$

Une étude cinématique de la transmission réalisée par le réducteur et l'ensemble poulies-courroie, dont les caractéristiques sont précisées par la figure 3, permettrait d'établir les relations suivantes :

$$\dot{\theta}_1(t) = -\frac{d_1}{d_0} r \cdot \dot{\theta}_m(t) \quad \text{et} \quad C_m = -\frac{d_1}{d_0} \cdot r \cdot C_{m_1}$$

$C_{m_1}$  = couple sur (1) ;  $C_m$  : couple moteur



Angles variables		
Angles constants		
		$\alpha = (\vec{y}_1, \vec{y}_1') = -22,5^\circ$ $\alpha = (\vec{y}_2, \vec{y}_2') = -22,5^\circ$

Le système est soumis aux actions mécaniques extérieures suivantes :

- Action de la pesanteur :  $\{\mathcal{J}_{pes \rightarrow E1}\} = \begin{Bmatrix} -m_1 \cdot \mathbf{g} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$  et  $\{\mathcal{J}_{pes \rightarrow E5}\} = \begin{Bmatrix} -m_5 \cdot \mathbf{g} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- Action associée au contact sonde/patient :  $\{\mathcal{J}_{0 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} F_C \cdot \vec{z}_3 \\ C_R \cdot \vec{y}_3 + C_P \cdot \vec{z}_3 \end{Bmatrix}$

L'action d'entraînement du motoréducteur sur (1), est modélisée par le torseur suivant :

$$\{\mathcal{J}_{\text{motoréducteur} \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{m1} \cdot \vec{z}_1 \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, \vec{z}_1)}$$

Les liaisons sont supposées sans frottement et la transmission de puissance par le système poulies-courroie s'effectue sans glissement.

### Questions

- 1) Déterminer le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V_{G_1 \in 1/0}}$  et le vecteur accélération  $\overrightarrow{\Gamma_{G_1 \in 1/0}}$  en fonction de  $y_1, z_1, \theta_1$  et leurs dérivées dans le repère  $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$
- 2) Déterminer le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V_{G_5 \in 5/0}}$  et le vecteur accélération  $\overrightarrow{\Gamma_{G_5 \in 5/0}}$  en fonction de  $y_5, z_5, \theta_1$  et leurs dérivées dans le repère  $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$
- 3) Justifier la forme de la matrice d'inertie  $I(\mathbf{E}_1', \mathbf{G}_1)$
- 4) Déterminer le moment cinétique en  $G_1$  de  $(E_1')$  par rapport à  $(0) \overrightarrow{\sigma_{G_1, E_1'/0}}$  dans le repère  $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$
- 5) Déterminer le moment dynamique en  $G_1$  de  $(E_1')$  par rapport à  $(0) \overrightarrow{\delta_{G_1, E_1'/0}}$  dans le repère  $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$
- 6) Déterminer le moment dynamique en A de  $(E_1')$  par rapport à  $(0) \overrightarrow{\delta_{A, E_1'/0}}$  dans le repère  $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$
- 7) Déterminer le moment cinétique en  $G_5$  de  $(E_5)$  par rapport à  $(0) \overrightarrow{\sigma_{G_5, E_5/0}}$  dans le repère  $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$
- 8) Déterminer le moment cinétique en A de  $(E_5)$  par rapport à  $(0) \overrightarrow{\sigma_{A, E_5/0}}$  dans le repère  $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$
- 9) Déterminer le moment dynamique en A de  $(E_5)$  par rapport à  $(0) \overrightarrow{\delta_{A, E_5/0}}$  dans le repère  $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$
- 10) Exprimer les composantes au point A des torseurs  $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow E_1'}\}, \{\mathcal{T}_{pes \rightarrow E_5}\}, \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 4}\}, \{\mathcal{T}_{moteur \rightarrow 1}\}$  dans le repère  $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$

On cherche à exprimer le couple que doit fournir moteur nécessaire à l'entraînement en rotation autour de l'axe 1 par application du théorème du moment dynamique dans le repère  $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$

- 11) Indiquer quel(s) ensemble(s) ou sous-ensembles(s) il faut isoler et préciser l'axe de projection du moment dynamique que l'on va utiliser
- 12) Isoler ce ou ces ensemble(s), faire le bilan des actions mécaniques puis appliquer le théorème du moment dynamique. Etablir les équations qui en résultent suivant les axes  $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$
- 13) Déterminer l'expression du couple moteur

On cherche maintenant à exprimer le couple que doit fournir moteur nécessaire à l'entraînement en rotation autour de l'axe 1 par application du théorème de l'énergie cinétique

- 14) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de  $T(E_1'/0)$  en fonction du paramètre de mouvement  $\dot{\theta}_1$
  - 15) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de  $T(E_5/0)$  en fonction du paramètre de mouvement  $\dot{\theta}_1$
  - 16) Déterminer les expressions des différentes puissances extérieures au système en fonction du seul paramètre  $\dot{\theta}_1$
- On rappelle que dans la configuration étudiée  $\theta_2(t) = \theta_3(t) = 0$
- 17) Déterminer l'expression de la puissance intérieure en fonction du seul paramètre  $\dot{\theta}_1$
  - 18) Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  en appliquant le théorème de l'énergie cinétique

**Rappels :**

Le torseur des actions transmissibles du solide 1 sur le solide 2 par la liaison entre 1 et 2 au point A sera noté :

$$\{ \mathcal{T}_{A(1 \rightarrow 2)} \} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{A1 \rightarrow 2} \\ \overrightarrow{M}_{A1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{A1 \rightarrow 2} = X_{A12} \cdot \vec{x} + Y_{A12} \cdot \vec{y} + Z_{A12} \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M}_{A1 \rightarrow 2} = L_{A12} \cdot \vec{x} + M_{A12} \cdot \vec{y} + N_{A12} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_{(x,y,z)} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{A12} & L_{A12} \\ Y_{A12} & M_{A12} \\ Z_{A12} & N_{A12} \end{array} \right\}_A$$

Le torseur cinématique  $\{ \mathcal{V}_{S/R} \}$  du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R exprimé au point A sera noté :

$$\{ \mathcal{V}_{(S/R)} \} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \\ \overrightarrow{V}_{AS/R} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \omega_{S/Rx} \cdot \vec{x} + \omega_{S/Ry} \cdot \vec{y} + \omega_{S/Rz} \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{V}_{AS/R} = v_{AS/Rx} \cdot \vec{x} + v_{AS/Ry} \cdot \vec{y} + v_{AS/Rz} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_{(x,y,z)} = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_{S/Rx} & v_{AS/Rx} \\ \omega_{S/Ry} & v_{AS/Ry} \\ \omega_{S/Rz} & v_{AS/Rz} \end{array} \right\}_A$$

Le torseur cinétique  $\{ \mathcal{C}_{S/R} \}$  du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{ \mathcal{C}_{(S/R)} \} = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{V}_{GS/R} \\ \overrightarrow{\sigma}_{AS/R} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{V}_{GS/R} \\ \overrightarrow{\sigma}_{AS/R} = m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}_{AS/R} + \overrightarrow{J}_A(S, \overrightarrow{\Omega}_{S/R}) \end{array} \right\}_{(x,y,z)} \quad \overrightarrow{J}_A = \text{opérateur d'inertie de S en A}$$

Le torseur dynamique  $\{ \mathcal{D}_{S/R} \}$  du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$\{ \mathcal{D}_{(S/R)} \} = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{\Gamma}_{GS/R} \\ \overrightarrow{\delta}_{AS/R} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{\Gamma}_{GS/R} \\ \overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)} \right]_R + m \cdot \overrightarrow{V}_{AS/R} \wedge \overrightarrow{V}_{GS/R} \end{array} \right\}_{(x,y,z)}$$

L'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R galiléen exprimé au point A sera noté :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}_{(S/R)} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{(S/R)} \} = \frac{1}{2} ( m \overrightarrow{V}_{GS/R} \cdot \overrightarrow{V}_{AS/R} + \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{AS/R} )$$