

# Mécanique des structures et Résistance Des Matériaux



concevoir



réaliser



exploiter

## Sommaire

### **1 – Introduction**

### **2 - Hypothèses et principes de la résistance des matériaux**

- Notion de solide
- Modèle poutre et ses propriétés
- Loi de Navier-Bernouilli – Loi de Hooke
- Hypothèse de Barré Saint-Venant
- Modélisation des liaisons
- Chargements

### **3 – Contraintes**

- 3-1 - Contrainte dans un matériau
- 3-2 - Etat de contrainte en un point

### **4 – Modélisation des déplacements et des déformations**

- 4-1 – Torseur des petits déplacements
- 4-2 – Torseur des petites déformations

### **5 – Modélisation des liaisons et des actions mécaniques extérieures**

- 5-1 – Géométrie de la structure
- 5-2 – Modélisation des liaisons
- 5-3 – Actions mécaniques extérieures

### **6 – Torseur de cohésion**

- 6-1 – Définition
- 6-2 – Détermination du torseur de cohésion
- 6-3 – Identification des sollicitations simples
- 6-4 – Synthèse – exemples d'application

### **7 – Traction – Compression**

- 7-1 – Exemple
- 7-2 – Définition
- 7-3 – Essai de traction
- 7-4 – Relation contrainte-effort normal
- 7-5 – Analyse de la déformation
- 7-6 – Dimensionnement d'une poutre en traction
- 7-7 – Dimensionnement des cables
- 7-8 – Compression simple
- 7-9 – Matage

### **8 – Concentration de contraintes**

### **9 – Cisaillement**

- 9-1 – Exemple
- 9-2 – Définition
- 9-3 – Relation contrainte-effort tranchant
- 9-4 – Analyse de la déformation
- 9-5 – Dimensionnement d'une poutre en cisaillement

### **10 – Caractéristiques des sections droites d'une poutre**

- 10-1 – Centre de gravité
- 10-2 – Moment statique
- 10-3 – Moment quadratique
- 10-4 – Moment produit

## Sommaire

### **11 – Torsion**

- 11-1 – Exemple
- 11-2 – Définition – Familles de torsion
- 11-3 – Hypothèses complémentaires
- 11-4 – Essai de torsion
- 11-5 – Déformation
- 11-6 – Répartition des contraintes dans une section
- 11-7 – Relation déformation-rotation
- 11-8 – Dimensionnement d'une poutre en torsion

### **12 – Flexion**

- 12-1 – Exemple
- 12-2 – Définition
- 12-3 – Essai de flexion
- 12-4 – Analyse de la déformation
- 12-5 – Expression de la contrainte
- 12-6 – Expression de la déformée
- 12-7 – Relation entre  $M_f$  et les contraintes dans une section droite de la poutre

### **13 – Flambage**

- 13-1 – Mise en évidence du flambage
- 13-2 – Charge critique d'Euler
- 13-3 – Influence des liaisons aux appuis
- 13-4 – Contrainte critique d'Euler
- 13-5 – Dimensionnement et vérification des sections

Compétences visées:

- Comparer qualitativement les caractéristiques physiques des matériaux.
- Justifier le choix d'un matériau en fonction de ses caractéristiques.
- Réaliser l'inventaire des actions mécaniques agissant sur un solide ou un système de solides.
- Associer le modèle poutre du solide déformable globalement en petites déformations à la géométrie et au comportement d'un solide.
- Connaître la signification et des ordres de grandeur du module d'Young, coefficient de Poisson des matériaux courants.
- Écrire le torseur des petits déplacements et le torseur des déformations au centre d'inertie d'une section droite.
- Déterminer le torseur de cohésion dans un solide.
- Identifier les sollicitations (traction, compression, flexion, torsion, cisaillement, flambage).
- Identifier la nature des contraintes (normale et tangentielle) en un point de la section droite.
- Déterminer les contraintes dans une section droite à partir des composantes du torseur de cohésion.
- Déterminer les déplacements le long de la ligne moyenne à partir des déformations.

**Objet de la mécanique des structures**

**Rechercher les formes et les dimensions à donner à des éléments structuraux qui leur donne une aptitude au service satisfaisante**

**Champ d'application très vaste**

- constructions (génie civil ou bâtiments)
- mécanique (machines, moteurs, avions)
- chimie (réservoirs, chaudières)
- électricité (câbles, pylônes, centrales)
- physique (physique du solide)
- matériaux (physique des matériaux)

**1- Introduction**

L'analyse de la résistance des matériaux s'intéresse aux comportements sous charges des structures mécaniques considérées comme déformables. Pour cela, il est nécessaire d'établir des modèles de connaissance permettant de prévoir le comportement. Ces modèles faisant intervenir des caractéristiques propres aux matériaux, une approche expérimentale est indispensable à leur détermination.

Les concepts de la mécanique des milieux continus permettent de modéliser le comportement des solides déformables. Certaines hypothèses simplificatrices, portant essentiellement sur la géométrie, conduisent à la théorie des poutres.

Cette théorie permet de prévoir rapidement, en pré-dimensionnement, le comportement des structures.

Ces prévisions peuvent éventuellement être affinées en revenant à une modélisation plus complexe et en faisant appel à des outils numériques pour la résolution tels que la méthode des éléments finis.

La résistance des matériaux s'intéresse :

- à connaître les caractéristiques mécaniques des matériaux ;
- à étudier la résistance mécanique d'une pièce ou d'un ensemble de pièces ;
- à étudier la déformation d'une pièce ou d'un ensemble de pièces ;
- à dimensionner une pièce ou une structure.



Ce que l'on étudie :

- la résistance : étude des forces internes
- la rigidité : étude des déformations et des déplacements
- les instabilités : étude des conditions d'équilibre liées aux caractéristiques de la matière

On s'intéresse à la vérification et au dimensionnement des structures

### Vérification des structures

On connaît

- les actions (forces extérieures),
- les dimensions,
- les matériaux

On calcule les forces internes, les déplacements, ...et on vérifie que ces grandeurs restent inférieures aux limites

### Dimensionnement des structures

On connaît

- les actions (forces extérieures)
- le degré de sécurité à atteindre

On optimise le choix des dimensions et des matériaux

Processus de conception

- avant-projet
- vérification
- itération

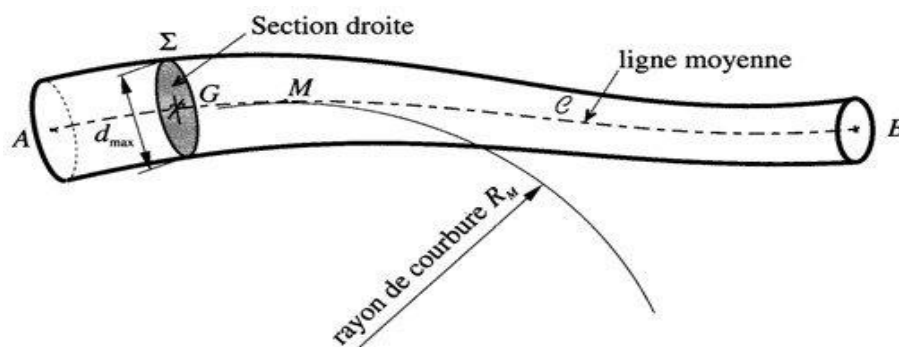
## **2 - Hypothèses et principes de la résistance des matériaux (Rdm)**

Dans un cas général, on ne peut calculer facilement les conditions de résistance pour n'importe quel solide. Il est nécessaire d'utiliser un logiciel de calcul pour déterminer les contraintes et les déformations dans un solide sollicité.

Ceci dit, la majorité des solides rencontrés dans le domaine du génie mécanique ne nécessitent pas l'élaboration d'un modèle complexe, et les résultats obtenus par le modèle poutre (qui fait l'objet de ce cours) et le modèle du cas général sont voisins. Pour utiliser ce modèle, il est nécessaire de formuler un certain nombre d'hypothèses sur ces solides.

### 2.1 Hypothèses géométriques

On appelle poutre un solide dont une des dimensions caractéristiques est très grande par rapport aux deux autres (rapport supérieur à 5).



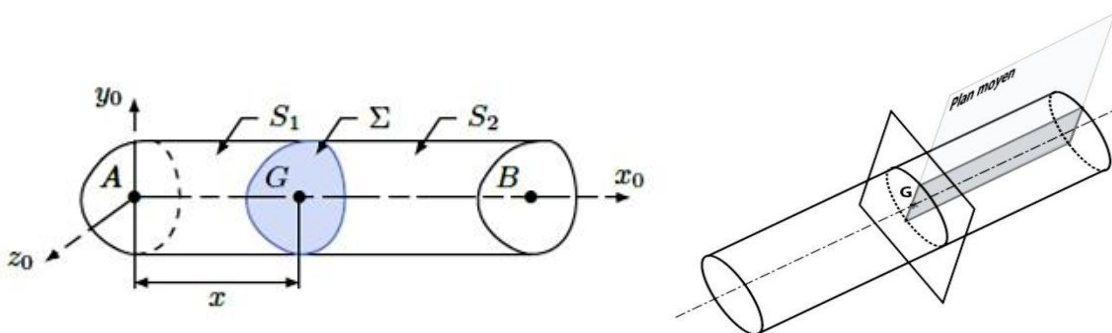
Définition : Poutre

On appelle poutre un solide dont une des dimensions caractéristiques est très grande par rapport aux deux autres (rapport supérieur à 5).

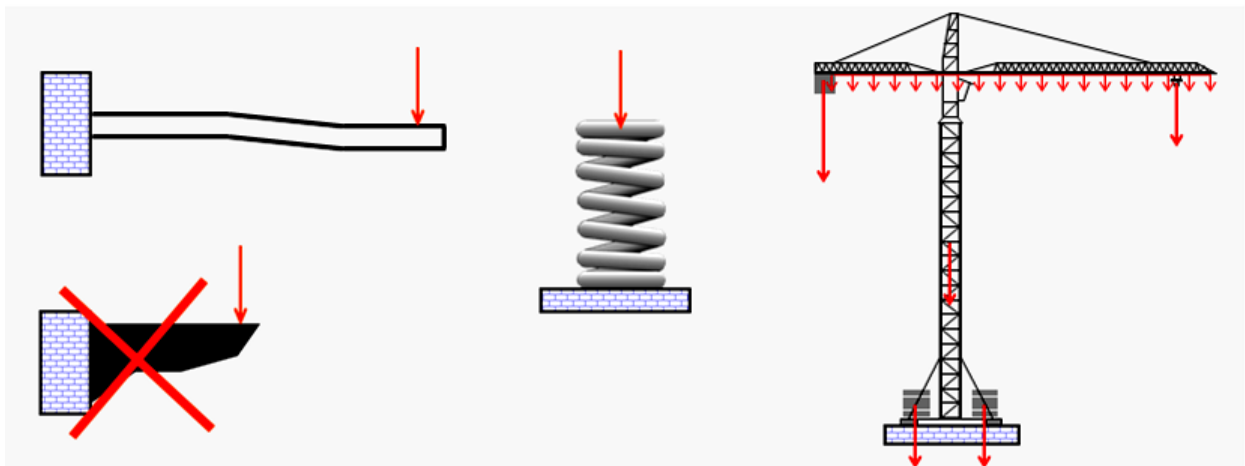
Propriétés

Une poutre est un solide engendré par une surface plane ( $\Sigma$ ) dont le centre de gravité  $G$  décrit une courbe appelée ligne moyenne (appelée aussi fibre neutre).

- Le **rayon de courbure** de la ligne moyenne est **grand** par rapport aux dimensions de la section droite ( $\Sigma$ ).
- La section droite ( $\Sigma$ ) peut être ( lentement ) variable.
- Les points disposés de façon identique sur les sections droites constituent des lignes appelées fibres.
- Lorsque la ligne moyenne est une droite, alors la poutre est appelée poutre droite.
- On fera aussi l'hypothèse que les sections droites des poutres étudiées ont un plan de symétrie et qu'elles sont chargées dans ce plan.



- On suppose également que les **déformations** de la poutres sont **infinitement petites**. En conséquence la disposition des actions mécaniques extérieures à la poutre déformée est sensiblement la même que celle de la poutre non déformée.

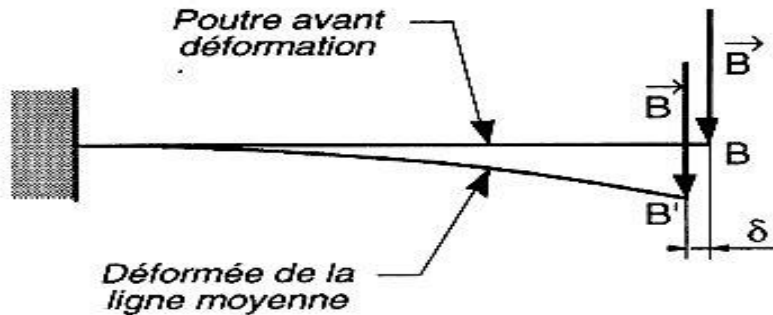
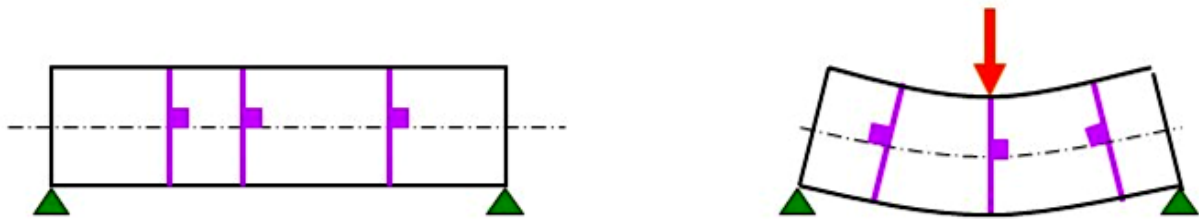


**Hypothèses de l'étude des poutres élastiques**

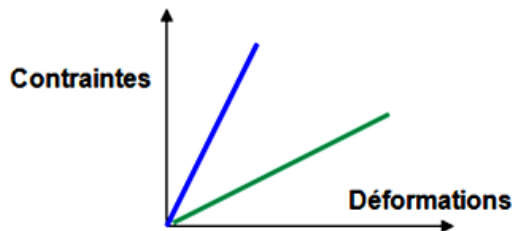
On suppose que le modèle physique étudié est constitué d'un matériau **continu, homogène** et **isotrope**.

- **Continu** : La distance intermoléculaire est petite devant les plus petites dimensions que nous allons utiliser. Les propriétés caractéristiques du matériau (densité, élasticité...) varie progressivement, sans à coups
- **Homogène** : Tous les éléments du matériau ont une structure identique
- **Isotrope** : En tous les points et dans toutes les directions autour de ces points, le matériau possède les mêmes propriétés mécaniques. Ces propriétés ne dépendent pas du repère dans lequel elles sont observées

◆ On adopte la **loi de Bernoulli-Navier** qui dit que les sections planes normales à la ligne moyenne de la pièce restent planes et normales à cette ligne après déformation

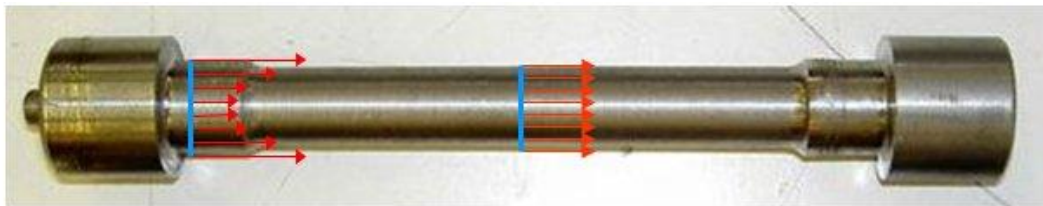


◆ On adopte la **loi de HOOKE** qui traduit la proportionnalité entre contraintes et déformations

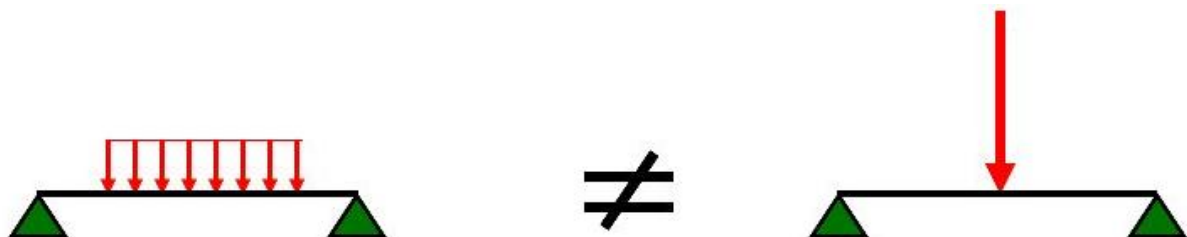


**Linéarité : Réponse proportionnelle à l'amplitude du chargement**

◆ On adopte l'**hypothèse de BARRE DE SAINT VENANT** qui dit que la répartition des déformations et des contraintes ne dépend pas du mode de mise en charge de l'élément étudié, à condition que l'on considère qu'une **zone suffisamment éloignée de la région d'application des efforts**. D'où par exemple la forme des éprouvettes de traction normalisées



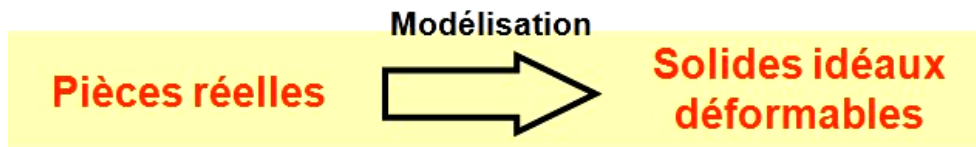
◆ On ne peut pas remplacer un chargement réparti par un effort ponctuel





Conclusion

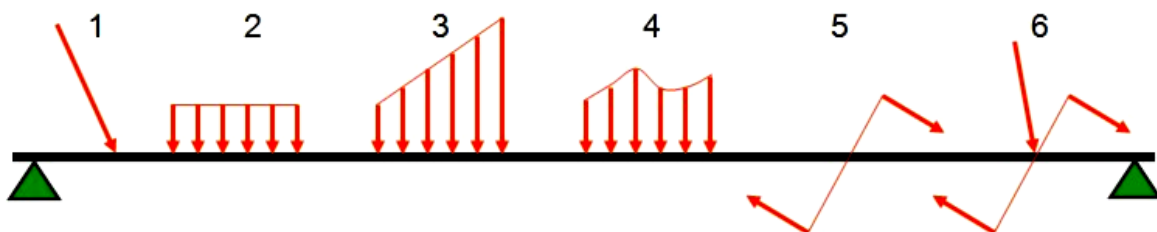
Toutes ces hypothèses permettent de modéliser une pièce réelle par un solide idéal mais déformable



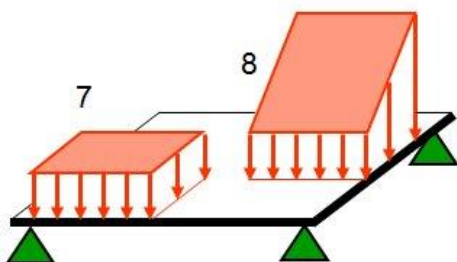
Rappel sur la modélisation des liaisons en 2D

<b>Mécanique des solides</b>				
<b>Etudes des poutres</b>				
<b>Désignation</b>	Encastrement	Rotule, Pivot, Pivot glissant	Pivot glissant, Glissière	Ponctuelle
<b>Degré de liberté (ddl)</b>	0 ddl	1 ddl	1 ddl	2 ddl
<b>Nombre d'éléments du torseur statique</b>	3	2	2	1

Principaux cas de chargement



- 1- Charge isolée ou force en N
- 2- Charge linéaire uniformément répartie  $p$  en N/m
- 3- Charge linéaire répartie uniformément  $p = k \cdot x$   $k$  en N/m<sup>2</sup>
- 4- Charge linéaire répartie décrite par une fonction quelconque
- 5- Moment d'un couple en N.m
- 6- Un torseur complet composé d'une résultante et d'un moment résultant



- 7- Charge surfacique uniformément répartie  $p$  en N/m<sup>2</sup>
- 8- Charge surfacique répartie uniformément

Actions à ne pas oublier sur les structures :

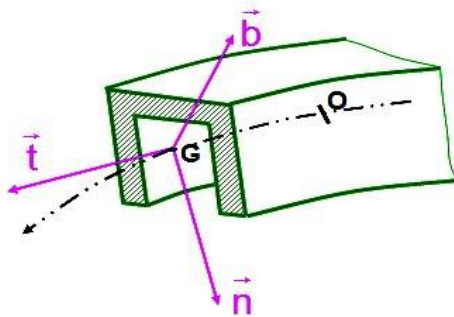
- charges permanentes : *poids propre*
- charges agissant à distance : *champs électromagnétique*
- charges d'exploitation : *foule, neige, vent, ...*
- actions indirectes : *tassements, fluage ...*
- actions dynamiques : *vent, machines, ...*
- actions exceptionnelles : *inondations, chocs, séismes*

**Fluage :**

Phénomène consistant en une augmentation de la déformation d'un système dans le temps, sous l'application d'une charge constante

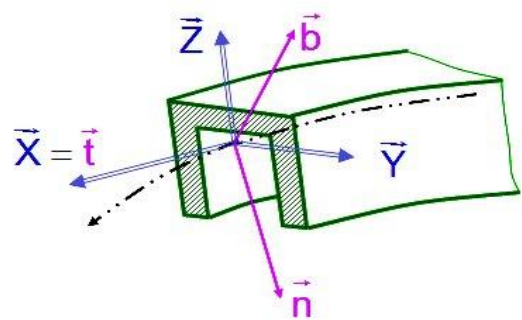
Repères d'étude

Trièdre de Fresnet



- $\vec{t} = \frac{d\vec{OG}}{d\ell}$  La tangente unitaire
- $\vec{n} = R \cdot \frac{d\vec{t}}{d\ell}$  La normale principale unitaire
- $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$  La binormale unitaire

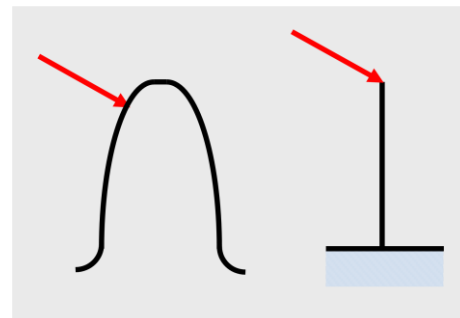
Repère principal d'inertie



- $\vec{X} = \vec{t}$  La tangente unitaire à la ligne moyenne
- $\vec{Y}$  La première direction principale d'inertie
- $\vec{Z}$  La seconde direction principale d'inertie

Que peut-on classer dans la famille des poutres ?

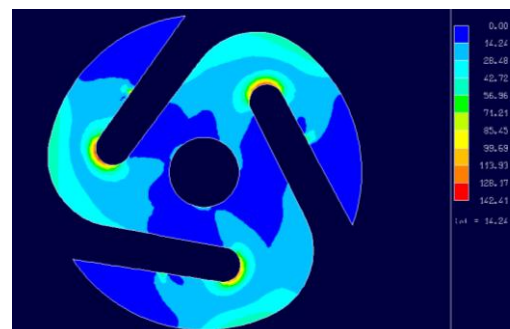
- Arbres de transmission
- Profilés de charpentes
- Ressorts hélicoïdaux
- Caissons mécano soudés longs



Qu'est ce qui n'est pas classable dans la famille des poutres ?

- Carters
- Coques
- Pièces massives

Ces pièces seront dimensionnées à l'aide de logiciels, par la méthode des « éléments finis ».



### 3 - Contraintes

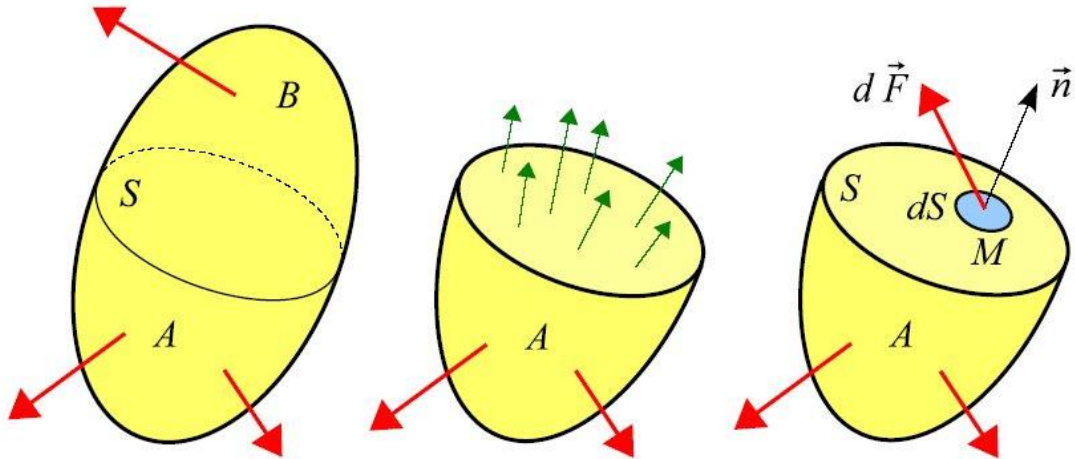
#### 3-1 Contraintes dans un matériau

Soit un solide S soumis à des actions mécaniques extérieures (concentrées ou réparties) dont on souhaite étudier les efforts internes de cohésion.

On coupe le solide S en deux parties. Considérons un point M entouré par une surface. Soit l'effort élémentaire de cohésion  $d\vec{F}$  de  $S_B$  sur  $S_A$ , qui s'exerce sur la facette  $\vec{n}$

On appelle contrainte le vecteur noté  $\vec{T}(M, \vec{n})$  tel que :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \right) = \frac{d\vec{F}}{dS} \quad \text{unité usuelle : N/mm}^2 \text{ (ou MPa)}$$



On peut décomposer  $\vec{T}(M, \vec{n})$  sur les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  ( $\vec{t}$  est un vecteur unitaire contenu dans le plan tangent à dS) sous la forme :  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}$

On appelle :

$\sigma_n$  : contrainte normale ;

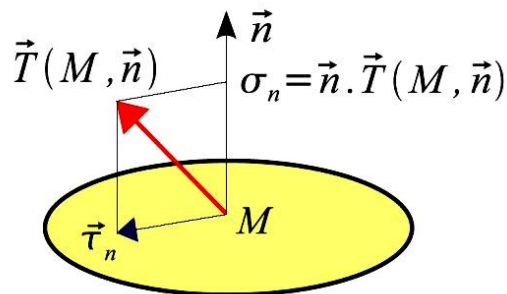
$\tau_n$  : contrainte tangentielle.

On peut exprimer les contraintes normales et tangentielles

par :

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n})$$

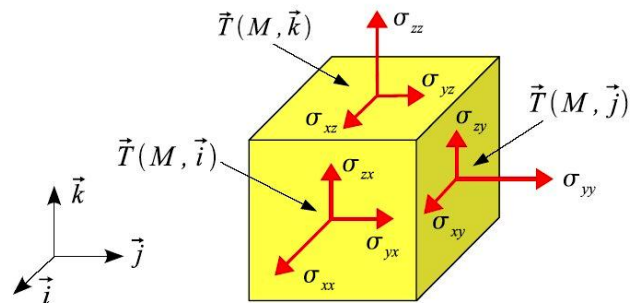
$$\tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{n})$$



#### 3-2 État de contrainte en un point

On représente les contraintes existantes dans un solide autour d'un point M par le tenseur des contraintes  $\vec{\sigma}_M$

$$\vec{\sigma}_M = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$



Le vecteur contrainte sur une petite surface dS de normale  $\vec{t}$  peut être alors défini par :

$$\vec{T}(M, \vec{t}) = \vec{\sigma}_M \cdot \vec{t} = \sigma_{xx} \cdot \vec{i} + \sigma_{yx} \cdot \vec{j} + \sigma_{zx} \cdot \vec{k}$$

Avec  $\sigma_{xx}$  contrainte normale et  $\sqrt{\sigma_{yx}^2 + \sigma_{xy}^2}$  la contrainte tangentielle. Le premier indice indique la normale à la facette considérée, le deuxième est l'axe de projection de la contrainte.

$$\sigma_{xx} = \vec{T}(M, \vec{i}) \cdot \vec{i} \quad \sigma_{xy} = \vec{T}(M, \vec{i}) \cdot \vec{j} \quad \sigma_{xz} = \vec{T}(M, \vec{i}) \cdot \vec{k}$$

Ces notations sont utilisées dans les logiciels de calculs par éléments finis

## 4 - Modélisation des déplacements et déformations

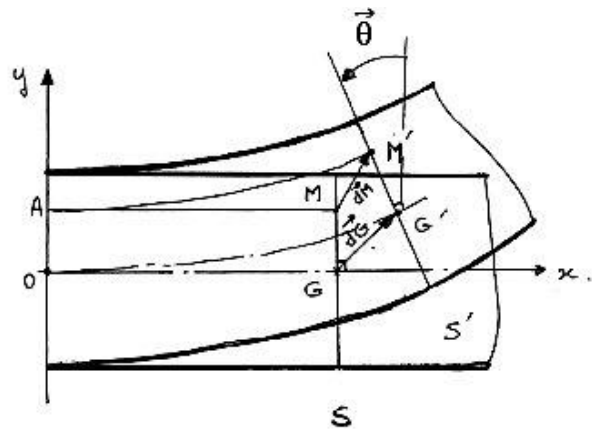
### 4-1 Torseur des petits déplacements

Dans le déplacement d'une section droite, G se déplace en G', M se déplace en M'. Deux mouvements peuvent être distingués :

une **rotation** de la section et une **translation** du centre G de cette section.

Ce mouvement peut être caractérisé par deux vecteurs :

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix}_{b_L} \quad \text{et} \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{b_L}$$



$\theta_x$  caractérise la torsion dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$

$\theta_y$  caractérise la flexion dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{z})$

$\theta_z$  caractérise la flexion dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$

$u_x$  caractérise le déplacement du point dans une sollicitation de traction-compression,

$u_y$  caractérise le déplacement du point dans une sollicitation de cisaillement pur selon  $\vec{y}$  ou de flexion dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ ;

$u_z$  caractérise le déplacement du point dans une sollicitation de cisaillement pur selon  $\vec{z}$  ou de flexion dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{z})$

Compte tenu de l'hypothèse de Navier-Bernoulli, on peut considérer que la section se déplace comme un solide, alors  $\vec{U}_M = \vec{U}_G + \vec{MG} \wedge \vec{\theta}$

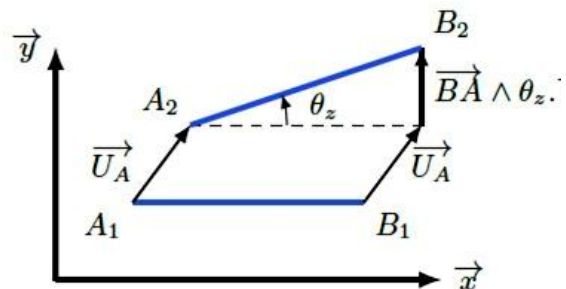
$\{U_{S/R}\}$  est donc un **torseur**, appelé **torseur de petits déplacements**.

**Définition :** Torseur des petits déplacements

$$\{U_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\theta} \\ \vec{U}_G \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} \theta_x & u_x \\ \theta_y & u_y \\ \theta_z & u_z \end{array} \right\}_{b_L}$$

**Exemple:**

Pour la barre AB, solide qui se déplace dans le plan de la position 1 ( $A_1; B_1$ ) à la position 2 ( $A_2; B_2$ ), le torseur des petits déplacements de la barre est :



$$\{U_{AB/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \theta_z \vec{z} \\ \vec{U}_A \end{array} \right\} \quad \text{Ce déplacement étant un torseur : } \vec{U}_B = \vec{U}_A + \vec{BA} \wedge \theta_z \vec{z}$$

#### 4.2 Torseur des petites déformations

Les déformations caractérisent la variation de déplacement suivant la ligne moyenne de la poutre. Comme pour les déplacements, l'état de déformations d'un solide peut-être modélisé par un torseur, appelé torseur des petites déformations, noté  $\{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})\}$ . Ce torseur est défini à partir du torseur des petits déplacements :  $\{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})\} = \left\{ \frac{dU_{S/R}}{dx} \right\}_{G(x)}$

**Définition :** Torseur des petites déformations

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\gamma} = \frac{d\vec{\theta}}{dx} \\ \vec{\varepsilon}_G = \frac{d\vec{U}_G}{dx} + \vec{x} \wedge \vec{\theta} \end{array} \right\}$$

Ce torseur caractérise l'état de déformation en un point d'une section droite d'abscisse  $x$  associé au mouvement relatif des sections les unes par rapport aux autres.

### 5 - Modélisation des liaisons et des actions mécaniques extérieures

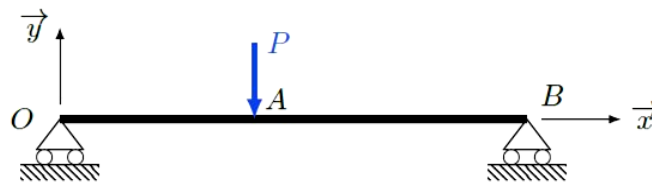
Une étude de résistance des matériaux passe nécessairement par une première phase de modélisation qui définit :

- la géométrie de la structure assimilée à un **assemblage de poutres**, sous les hypothèses énoncées précédemment ;
- les liaisons de la structure avec l'extérieur ;
- les actions mécaniques extérieures appliquées à la structure, parfois appelées chargement.

#### 5-1 Géométrie de la structure

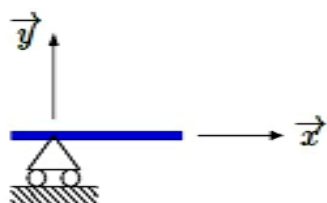
Dans un cas général, on raisonnera toujours dans la base locale de la poutre. La plupart du temps, nous traiterons des poutres droites dont la ligne moyenne sera orientée par l'axe  $x$ . Par convention, on placera l'étude dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ , l'axe  $z$  étant normal au plan.

Cette convention permettra d'identifier plus facilement les sollicitations auxquelles est soumise la poutre étudiée.

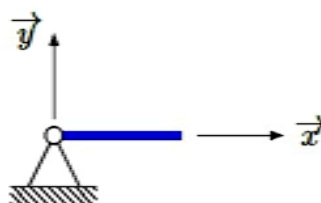


#### 5.2 Modélisation des liaisons

Pour un problème spatial, les liaisons réelles de la structure avec l'extérieur sont modélisées par les liaisons normalisées induites en mécanique du solide. Bien souvent, les configurations étudiées conduisent à un problème plan pour lequel l'ensemble des liaisons se réduit à l'appui simple (équivalent à une sphère/plan), l'articulation (équivalent à une pivot d'axe normal au plan) et l'encastrement.



Appui simple



Articulation



Encastrement

### 5-3 Actions mécaniques extérieures

Des actions mécaniques extérieures s'exercent sur les structures étudiées. Elles se décomposent en deux types :

- le chargement extérieur (connu) ; il peut s'appliquer sous la forme de charges ou couples concentrés ou de charges réparties ;
- les actions de liaisons induites par le chargement extérieur (inconnues).

La résolution des problèmes de Rdm impliquera donc très souvent une étude de statique ou dynamique préliminaire afin de déterminer les actions de liaisons.

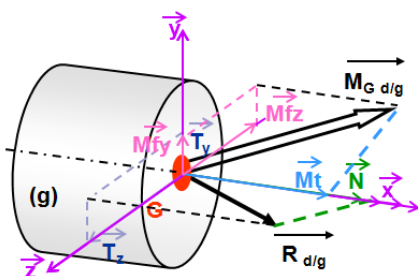
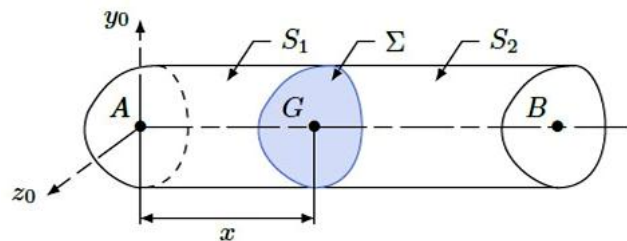
## 6 - Torseur de cohésion

### 6 -1 Définition

Considérons une poutre droite S de fibre neutre AB. Notons  $(A; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère associé à cette poutre. Soit G le point d'abscisse x tel que  $\overrightarrow{AG} = x \cdot \vec{x}$ .  $\Sigma$  est la section droite d'abscisse x. Coupons cette poutre droite de manière fictive en deux tronçons S2 et S1 séparés par  $\Sigma$ .

Par convention, on appelle **torseur de cohésion** ou **torseur des efforts intérieurs** le torseur des actions mécaniques de S2 sur S1 :

$$\{\tau_{coh}\} = \{\tau_{S_2 \rightarrow S_1}\}_{G(x)}$$



<b>Torseur des actions de cohésion</b> $\mathcal{T}_{coh}$	}	$\vec{R}_{d/g}$	$\left\{ \begin{array}{l} N \\ T_y \\ T_z \end{array} \right.$	<b>Effort normal</b> Efforts tranchants	<b>Traction Compression</b> Cisaillement
		$\vec{M}_{G \ d/g}$	$\left\{ \begin{array}{l} Mt=C \\ Mfy \\ Mfz \end{array} \right.$	<b>Moment de torsion</b> Moments de flexion	<b>Torsion</b> Flexion

$$\{\tau_{coh}\}_{G(x)} = \left\{ \begin{array}{l} N \\ T_y \\ T_z \end{array} \right\}_{b_L} \left\{ \begin{array}{l} Mt \\ Mfy \\ Mfz \end{array} \right\}_{b_L} = \left\{ \begin{array}{l} \int_S \cdot \vec{T}(M, \vec{x}) dS \\ \int_S \cdot \overrightarrow{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{x}) dS \end{array} \right.$$

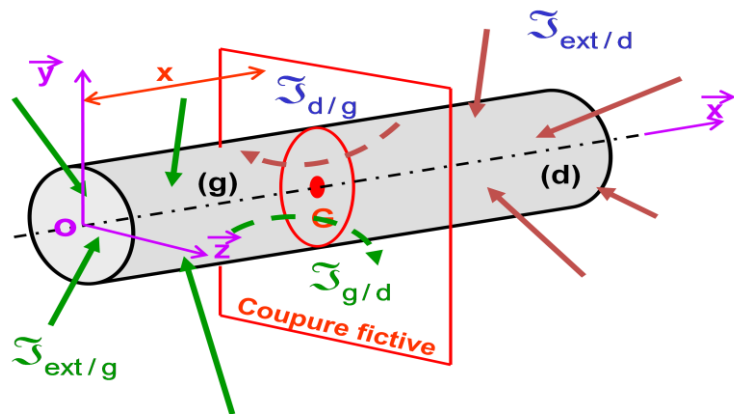
On appelle, pour une poutre de ligne moyenne suivant x :

- N : **effort normal** d'axe x ;
- Ty : **effort tranchant** selon l'axe y ;
- Tz : **effort tranchant** selon l'axe z ;
- Mt : **moment de torsion** autour de x ;
- Mfy : **moment de flexion** autour de y ;
- Mfz : **moment de flexion** autour de z.

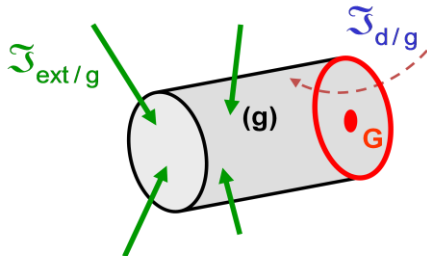
6 - 2 Détermination du torseur de cohésion

Soit une poutre en équilibre soumise à un torseur d'actions extérieures. Effectuons une coupure normale à l'axe de la poutre qui sépare la poutre en deux tronçons, gauche (g) et droit (d).

**Cohésion** : Propriété d'un corps à résister aux forces mécaniques qui tentent de le dissocier.



Isolons le tronçon de gauche

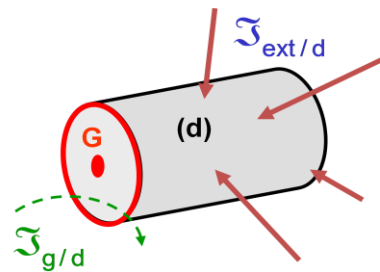


Équilibre du tronçon (g)

$$\mathcal{T}_{ext/g} + \mathcal{T}_{d/g} = 0$$

$$\mathcal{T}_{d/g} = -\mathcal{T}_{g/d} = \mathcal{T}_{coh} = -\mathcal{T}_{ext/g}$$

Isolons le tronçon de droite



Équilibre du tronçon (d)

$$\mathcal{T}_{g/d} + \mathcal{T}_{ext/d} = 0$$

$$-\mathcal{T}_{g/d} = \mathcal{T}_{d/g} = \mathcal{T}_{coh} = \mathcal{T}_{ext/d}$$

**BILAN**

$$\mathcal{T}_{coh} = -\mathcal{T}_{ext/g} = \mathcal{T}_{ext/d}$$

Convention du torseur de DROITE

Si on reprend la poutre droite du paragraphe précédent, on peut isoler le tronçon S1 et lui appliquer le Principe Fondamental de la Statique (en G). On a alors :

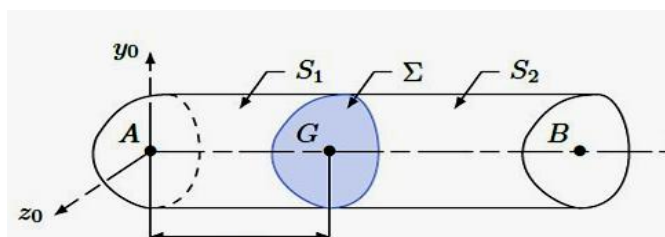
$$\{\tau_{s_2 \rightarrow s_1}\}_{G(x)} + \{\tau_{ext \rightarrow s_1}\}_{G(x)} = \{0\} \text{ avec } \{\tau_{coh}\} = \{\tau_{s_2 \rightarrow s_1}\}_{G(x)}$$

$$\text{Soit : } \{\tau_{coh}\} = -\{\tau_{ext \rightarrow s_1}\}_{G(x)}$$

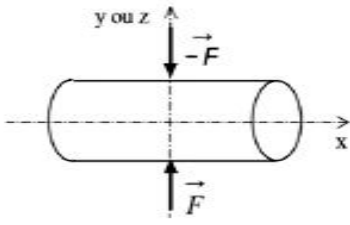
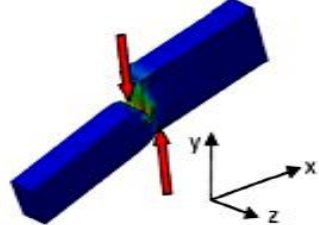

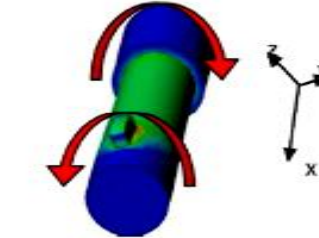
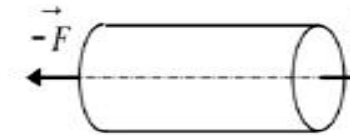
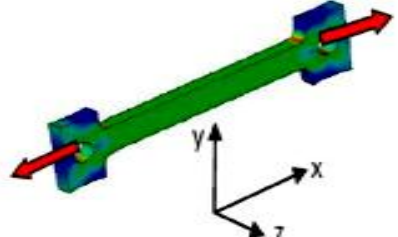
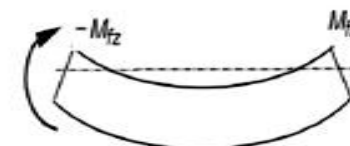
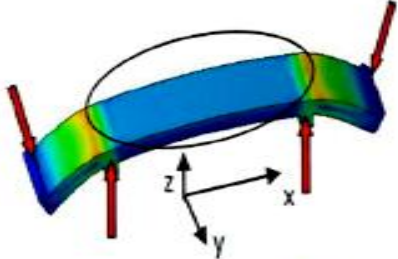
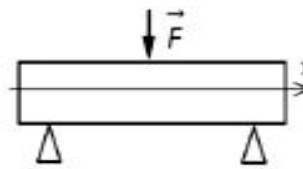
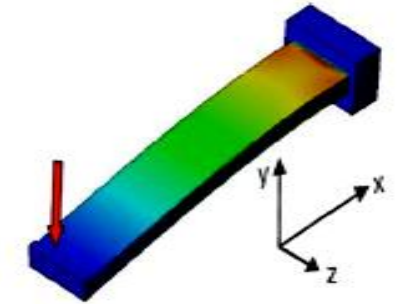
De même, si on isole le tronçon S2 et on lui applique le PFS (en G), on a :

$$\{\tau_{s_2 \rightarrow s_1}\}_{G(x)} + \{\tau_{ext \rightarrow s_2}\}_{G(x)} = \{0\} \text{ avec } \{\tau_{coh}\} = \{\tau_{s_2 \rightarrow s_1}\}_{G(x)} = -\{\tau_{s_1 \rightarrow s_2}\}_{G(x)}$$

$$\text{Soit : } \{\tau_{coh}\} = \{\tau_{ext \rightarrow s_2}\}_{G(x)}$$



6.3 Identification des sollicitations simples

$\tau_{coh}$	Désignation	Exemple 1	Exemple 2
$G \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Cisaillement		
$G \begin{pmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Torsion		
$G \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Traction Compression		
$G \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Mf_z \end{pmatrix}$	Flexion pure		
$G \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_z \end{pmatrix}$	Flexion simple		



6 - 4 Synthèse

De manière générale, lorsqu'une structure est sollicitée, plusieurs composantes du torseur de cohésion peuvent être non nulles : on parle alors de **sollicitations composées**.

Dans ce cas, le théorème de superposition permet d'étudier le comportement de la structure en superposant les problèmes associés à des sollicitations simples.

Définition : Théorème de superposition

**Les effets (contraintes et déformations) en un point d'une poutre soumise à des sollicitations composées sont la somme des effets provoqués par ces sollicitations prises séparément.**

Synthèse des combinaisons des sollicitations

Combinaison de $\downarrow$ et de $\rightarrow$	$\vec{N}$	$\vec{T}$	$\vec{M}_t$	$\vec{M}_f$
$\vec{N}$	<b>Traction-Compression</b>			
$\vec{T}$	Rare ( les effets de $\vec{N}$ sont prépondérants devant ceux de $\vec{T}$ )	<b>Cisaillement</b>		
$\vec{M}_t$	Torsion-extension ( ex: serrage d'une vis )	Rare ( les effets de $\vec{M}_t$ sont prépondérants devant ceux de $\vec{T}$ )	<b>Torsion</b>	
$\vec{M}_f$	Flexion-extension, flambement	<b>Flexion simple</b> Flexion déviée	Flexion-Torsion	<b>Flexion pure</b>

## 7 - Traction / Compression

### 7-1 Exemple : pilier d'un bâtiment

Si on isole un des piliers du Palais Bourbon représenté ci-contre, celui-ci est sollicité en compression. Si on suppose le pilier d'axe x alors au sein de celui-ci le vecteur contrainte s'écrit :

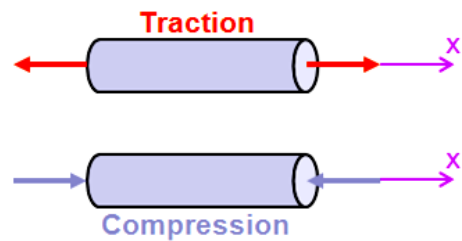
$$\vec{T}(M, \vec{l}) = \sigma_x \cdot \vec{x}$$



### 7.2 Définition

Une poutre droite d'axe x est en traction/compression au point G(x) si son tenseur de cohésion exprimé au point G est égal à :

$$\{\tau_{coh}\}_{G(x)} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{b_L}$$



- N est appelé **effort normal** ;
- Si N est positif alors on parle de contrainte de **traction** ;
- Si N est négatif alors on parle de contrainte de **compression**.

Un certain nombre de matériaux ont un comportement similaire en traction et en compression. C'est le cas des aciers, des alliages d'aluminium...

Par contre d'autre comme la fonte, le bois, le béton... ont un comportement complètement différent.

Dans un premier temps on traitera le cas général de la traction ou de la compression. Ensuite on s'intéressera aux particularités de la compression.

### 7-3 Essai de traction

L'essai de traction permet d'obtenir les caractéristiques mécaniques d'un matériau.

#### Eprouvettes



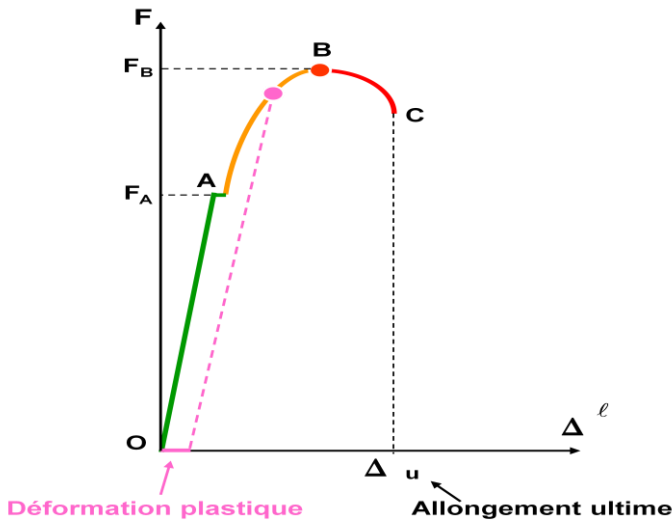
#### Machine de traction hydraulique



#### Résultats observés :

- Toute section plane et normale à la ligne moyenne de l'éprouvette le reste après déformation
- L'éprouvette casse dans la zone la plus mince
- L'éprouvette s'allonge et s'amincit

Courbe issue de l'essai de traction



Trois phases de déformation :

- OA phase d'élasticité
- AB phase de plasticité
- BC phase de striction

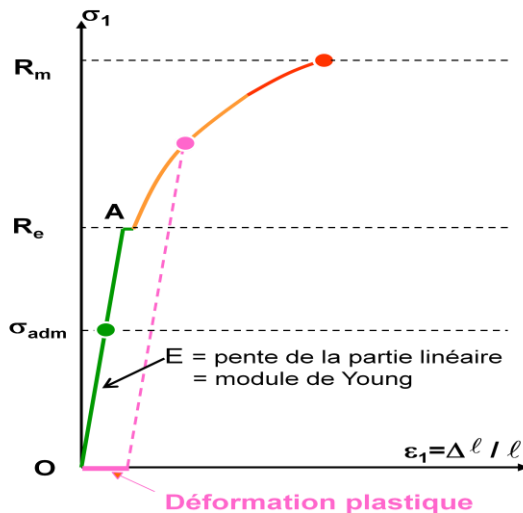
**Allongement** : Possibilité de déformation plastique du matériau

**Striction** : Phénomène de déformation localisée

**Rupture Ductile** : la limite de rupture est plus élevée que la limite élastique

**Rupture fragile** : le matériau se casse brusquement sans phase de plasticité

Cas d'une rupture ductile



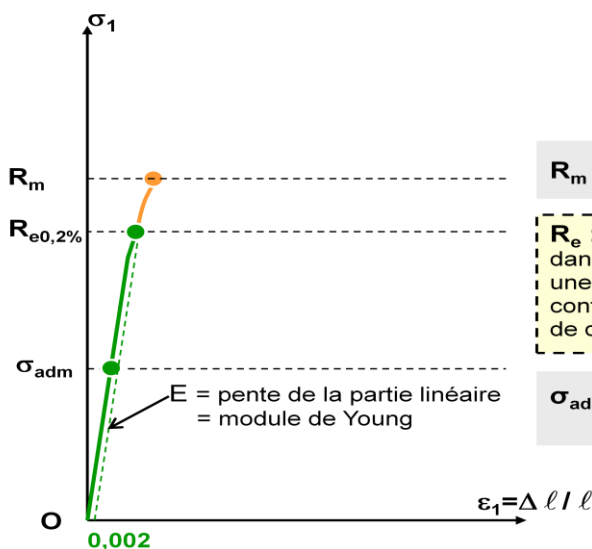
$R_m$  : résistance max ou de rupture

$R_e$  : limite d'élasticité

$\sigma_{adm} = R_e/s$

s coefficient de sécurité

Cas d'une rupture fragile: Rupture sans domaine de plasticité



$R_m$  : résistance à la rupture

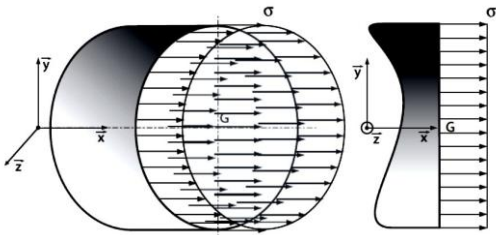
$R_e$  : Cette valeur étant difficile à déterminer dans le cas d'une rupture fragile, on relève une limite d'élasticité conventionnelle  $R_{e0,2\%}$  contrainte pour laquelle on observe un début de déformation plastique de 0,2% (0.002)

$\sigma_{adm} = R_m/s$

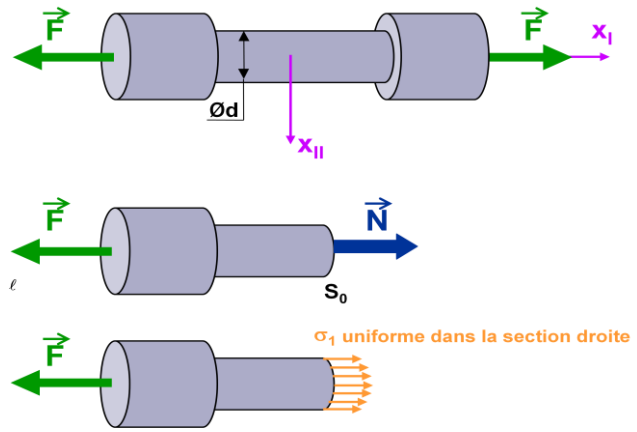
s coefficient de sécurité

7 - 4 Relation contrainte-effort normal

Soit une éprouvette normalisée de section  $S_0$  soumise à un effort de traction  $F$  (ou de compression  $-F$ ). Observons ce qui se passe dans cette section droite  $S_0$



Répartition des contraintes de traction



$$\{\tau_{coh}\}_{G(x)} = \begin{Bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix}_{G(x)} = \begin{Bmatrix} Mt \\ Mf_y \\ Mf_z \end{Bmatrix}_{b_L} = \begin{cases} \int_S \cdot \vec{T}(M, \vec{x}) dS \\ \int_S \cdot \vec{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{x}) dS \end{cases}$$

Or :  $\vec{T}(M, \vec{l}) = \sigma \cdot \vec{x}$  avec  $\sigma = \text{constante}$

$$\text{Donc } \overline{R\{\tau_{coh}\}} = \int_S \cdot \vec{T}(M, \vec{x}) dS = \sigma \int_S \cdot dS \cdot \vec{x}$$

En projetant sur  $\vec{x}$  :

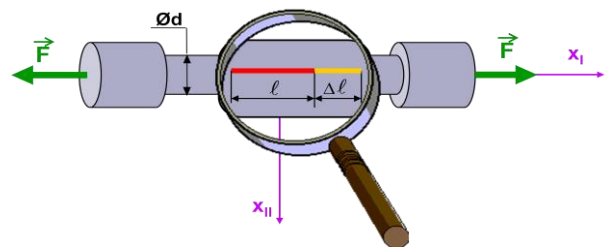
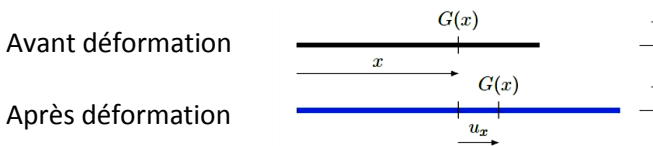
$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Avec :

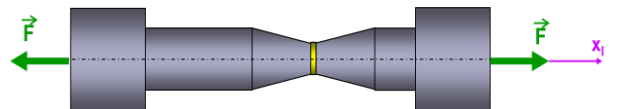
- $\sigma$  : contrainte normale de traction (en MPa)
- N : effort normal (en N).
- S : aire de la section de la pièce (en mm<sup>2</sup>)

7 - 5 Analyse de la déformation

Considérons une poutre droite d'axe x :



La striction est une déformation localisée



Le mouvement d'une section droite est une translation suivant la ligne moyenne (axe x), ce qui permet de déduire que :  $\vec{\theta} = \vec{0}$  et  $\vec{U}_G = u_x \cdot \vec{x}$

En traction/compression, le tenseur des petits déplacements d'une section droite s'écrit donc :

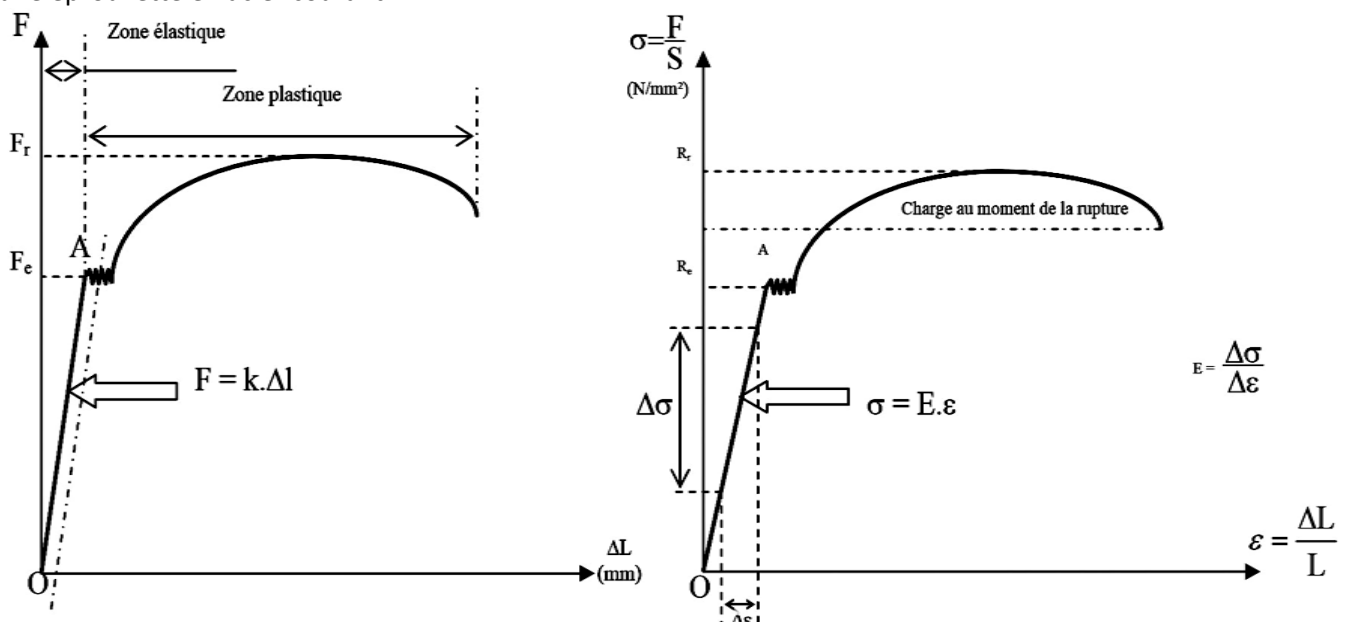
$$\{U_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\theta} = \vec{0} \\ \vec{U}_P = u_x \cdot \vec{x} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{array} \middle| \begin{array}{l} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array} \right\}_{b_L}$$

A partir de ce tenseur, on peut donner la forme du tenseur des petites déformations :

$$\{\varepsilon(x)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\gamma} = \vec{0} \\ \vec{\varepsilon}_P = \varepsilon_x \cdot \vec{x} \end{array} \right\}$$

### 7 - 5 - 1 Loi de Hooke

L'essai de traction consiste à soumettre une éprouvette normalisée à un effort de traction progressivement croissant, jusqu'à la rupture de l'éprouvette. La machine mesure les efforts appliqués et les déformations de l'éprouvette. Les courbes ci-dessous représentent le résultat d'un essai de traction sur une éprouvette en acier courant.



Dans le domaine élastique, on constate que l'allongement unitaire est proportionnel à la contrainte.

Cette relation de proportionnalité est illustrée par la **loi de Hooke** :  $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Avec :

- $\sigma$  : contrainte normale de traction (en MPa)
  - $E$  : module d'élasticité longitudinal du matériau en  $N/mm^2$  ou MPa
  - $\varepsilon$  : allongement unitaire suivant la ligne moyenne
- $E$  correspond à la pente de la droite du domaine élastique de l'essai de traction.  
On l'appelle couramment module de Young.

Quelques valeurs de E, Rm et Re:

Nuances		Rm (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
Titane		300 à 350	100 à 120	116 000
Aciers d'usage général		290 à 490	185 à 355	190 000
Aciers de construction mécanique		470 à 670	295 à 360	200 000
Aciers pour traitements thermiques	XC 38	570 à 830	335 à 490	210 000
	XC 42	620 à 880	355 à 520	210 000
	XC 48	660 à 930	375 à 580	210 000
Fontes	FGL	200 à 400	130 à 260	90 000 à 140 000
	FGS	500 à 900	320 à 600	165 000 à 170 000
Alliages d'aluminium		300 à 320	200 à 220	90 000

### 7-5-2 Expression de la déformation élastique

Sur une longueur L, la déformation totale est :  $\Delta L = \int_0^{L_0} \epsilon_x \cdot dx$

Si  $\sigma = \text{cste}$ , alors  $\epsilon_x = \text{cste}$  (cf loi de Hooke), d'où :  $\Delta L = \epsilon_x L_0$

On a alors, dans la plupart des cas (quand  $\sigma = \text{cste}$ ) :  $\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0}$  avec  $L_0$  longueur initiale de la poutre.

Ainsi, en réutilisant  $\sigma = \frac{N}{S}$ , on peut déduire la relation liant l'effort normal à la déformation de la poutre selon l'axe x :

$$\epsilon_x = \frac{N}{ES}$$

quand N = cste

En mettant cette dernière relation sous la forme  $N = k_t \Delta L$ , on peut assimiler la poutre à un ressort de raideur  $k_t$  tel que :  $k_t = \frac{ES}{L_0}$

### 7 - 6 Dimensionnement d'une poutre en traction

#### 7-6-1 Critère en contrainte

Pour qu'une pièce résiste aux efforts de traction sans subir de déformation permanente il faut que la contrainte interne ne dépasse pas la limite élastique  $R_e$  du matériau.

Pour des raisons de sécurité et compte tenu des hypothèses simplificatrices faites avec les modélisations, la contrainte normale  $\sigma$  doit rester inférieure à une valeur limite appelée limite pratique à l'extension  $R_{pe}$  (aussi notée  $\sigma_{pe}$ ). On considère que c'est la contrainte maximale admissible.

$$\sigma_{\max} < \frac{R_e}{s} = R_{pe} \text{ soit : } \frac{N}{S} < R_{pe}$$

Avec :

- s : coefficient de sécurité (souvent compris entre 2 et 10, selon le contexte)
- $R_e$  : résistance élastique du matériau (en MPa)
- $R_{pe}$  : résistance pratique à l'extension (en MPa)

7-5-2 Critère en déformation

Le critère en déplacement traduit, moyennant un coefficient de sécurité  $s$  ( $>1$  mais différent de  $s$ ), que le déplacement en un point  $M$  (par exemple le point où le déplacement est maximum) doit rester inférieur à une valeur donnée dépendant des conditions d'utilisation  $u_{lim}$  :

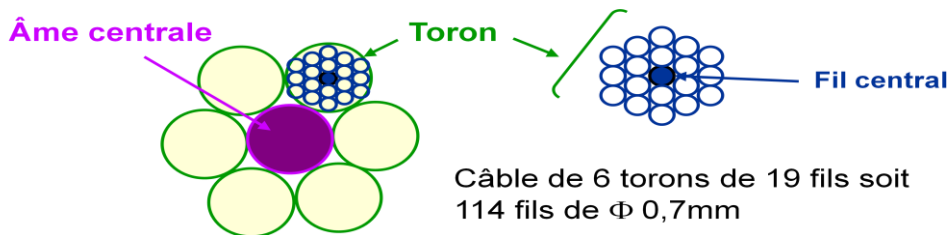
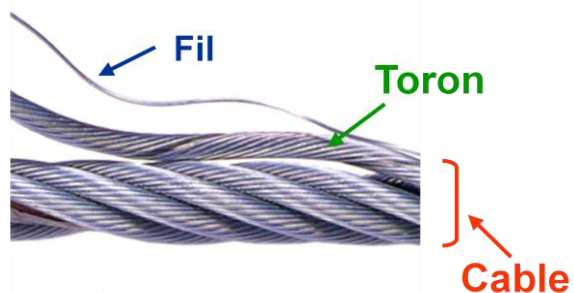
$$u_x(M) = \frac{u_{lim}}{s}$$

7 - 7 Dimensionnement des câbles

**On peut penser que les câbles sont des pièces soumis à de la traction pure, ce n'est pas exactement le cas.**

Les câbles sont obtenus en torsadant en torons des fils d'acier (acier Martin 0,3 à 0,85% de carbone) de faibles diamètres ( 0,3 à 2,2 mm).

Ces fils sont obtenus par tréfilage, ils sont fortement écrouis ( $R_m = 1000$  à  $2000$  Mpa). Chaque toron est formé d'un nombre variable de ces fils, enroulés en hélice autour d'un fil central. Les torons sont eux-même torsadés ensemble autour d'une «âme centrale» (textile ou métallique).



**Attention :**

- ne pas confondre la section du diamètre extérieur et la section résistante
- ne pas calculer l'allongement du câble avec l'une de ces sections, car il y a détorsion du câble
- pour les câbles de grande longueur, tenir compte du poids propre du câble

Le fabricants donnent pour chaque câble la charge de rupture effective résultat d'un essai de traction. Cette charge de rupture est inférieure de 10 à 20 % à celle que l'on obtiendrait en considérant la section totale des fils et la  $R_m$  de l'acier, conséquence du câblage ou torsion des brins.

On adoptera un coefficient de sécurité  $s$  qui pour un câble en acier varie entre 6 et 12. La norme donne les coefficients de sécurité en fonction de l'application.

$$s = \frac{\text{Charge effective de rupture}}{\text{Charge appliquée}}$$

Par ailleurs l'utilisation de câbles implique généralement des passages sur des poulies, des tambours ainsi que des liaisons d'extrémités à l'aide de cosses; ceci conduit toujours à des augmentations de contraintes dues à la flexion. Il est nécessaire de voir dans la norme les coefficients qu'il faut utiliser



Zone de flexion du câble



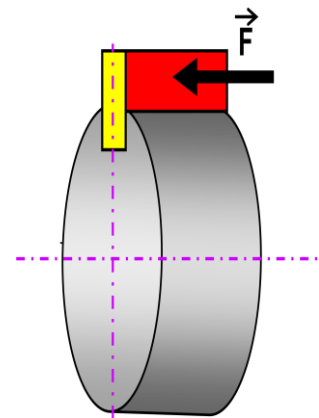
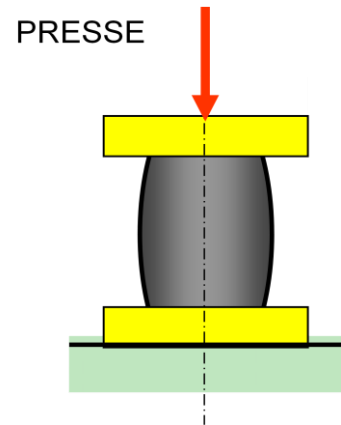
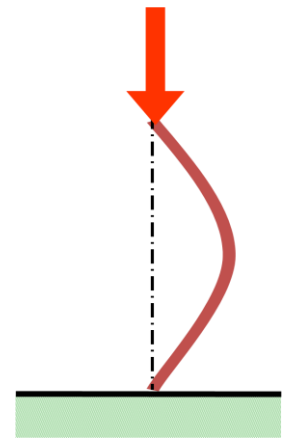
7 - 8 Compression simple

La compression est analogue à la traction pour l'étude des contraintes et des déformations, mais il faut noter les restrictions suivantes:

- la pièce doit être courte et massive pour ne pas risquer le **flambage**
- pour certains matériaux la résistance maximum en compression est différente que celle en traction.  
Ainsi pour la fonte, le béton  $Rm_{traction} = 10 \times Rm_{compression}$   
On dit que la fonte et le béton « travaillent » mieux en compression qu'en traction.

L'essai de compression est difficilement exploitable du fait :

- du frottement sur les mors donnant des « mises en tonneau »
- des difficultés pour observer le début de la rupture.



7- 9 Le matage

Le matage est une compression locale entre deux surfaces. Il est particulièrement destructeur dans le cas des sollicitations alternées et de chocs.

**Exemple : Dimensionnement d'une clavette**

Hypothèse : la pression de contact est uniformément répartie

$\sigma_{mat}$  = contrainte ou pression de matage

$$\sigma_{mat} = \frac{F}{S}$$

(S = surface matée en rouge)

**Condition de résistance :  $\sigma_{mat} \leq$  pression admissible**

Pression admissible en Mpa pour un acier de construction mécanique en fonction des conditions de montage et de fonctionnement

	Conditions de montage	Conditions de fonctionnement		
		médiocres	moyennes	très bonnes
Arbre cannelé avec manchon en mouvement	Glissant sous charge	3 à 10	5 à 15	10 à 20
Cannelures de boîte de vitesses	Glissant sans charge	15 à 30	20 à 50	30 à 50
Arbre / engrenage avec clavette	Fixe	40 à 70	60 à 100	80 à 150

Chocs importants concasseurs véhicules TT     
 Mécanique courante     
 Mécanique de précision



## 8 - Concentration de contraintes

Lors d'un accident de forme dans une pièce, le champ de contrainte est perturbée, la contrainte maximum peut augmenter considérablement créant ainsi une zone dangereuse.

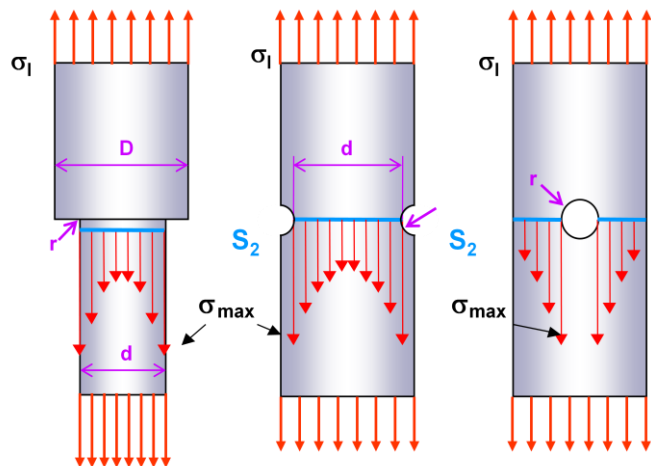
Exemples :

- Rainure de circlips
- Épaulement sur arbre

Généralement il faut éviter les accidents de forme, sauf dans le cas où la rupture de la pièce est recherchée en un lieu précis.

Exemples :

- diamant du vitrier
- tablette de chocolat
- pots de yaourt
- capsule de canette



Coefficient théorique de concentration de contraintes :  $k_t$

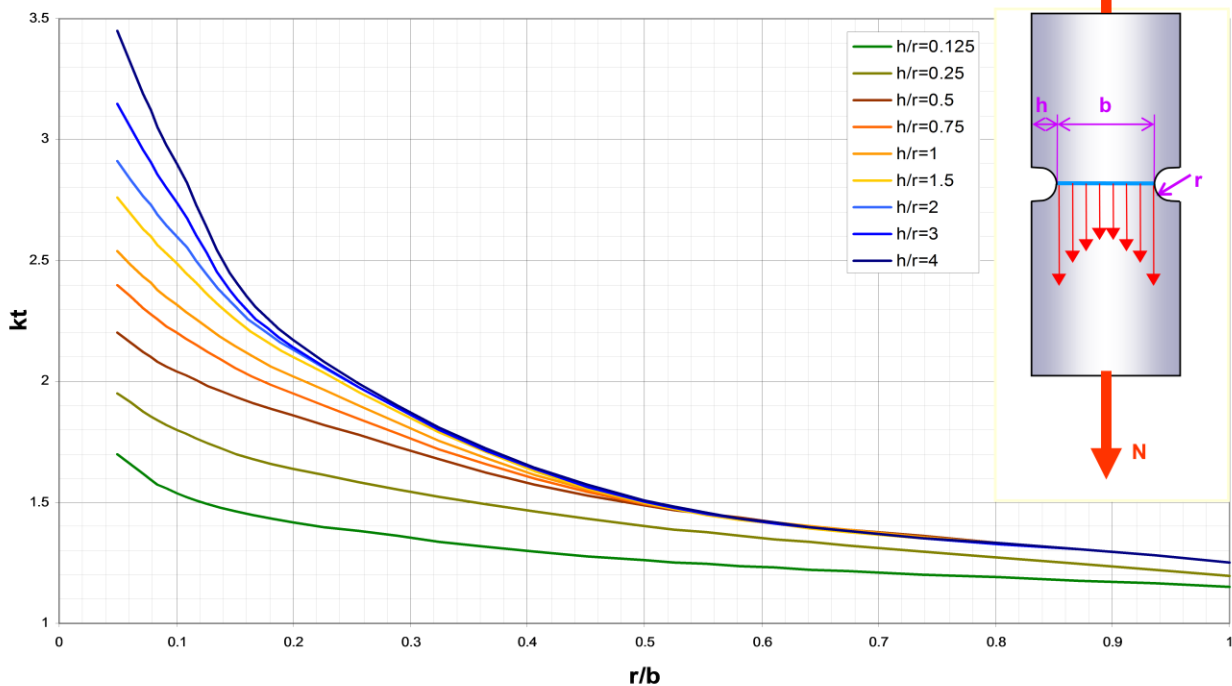
Dans la section  $S_2$  :  $\sigma_{max} = k_t \cdot \sigma_{moy}$  avec  $\sigma_{moy} = N/S_2$

Si  $r$  est très petit  $r/d < 0.005$  alors  $k_t = 3$

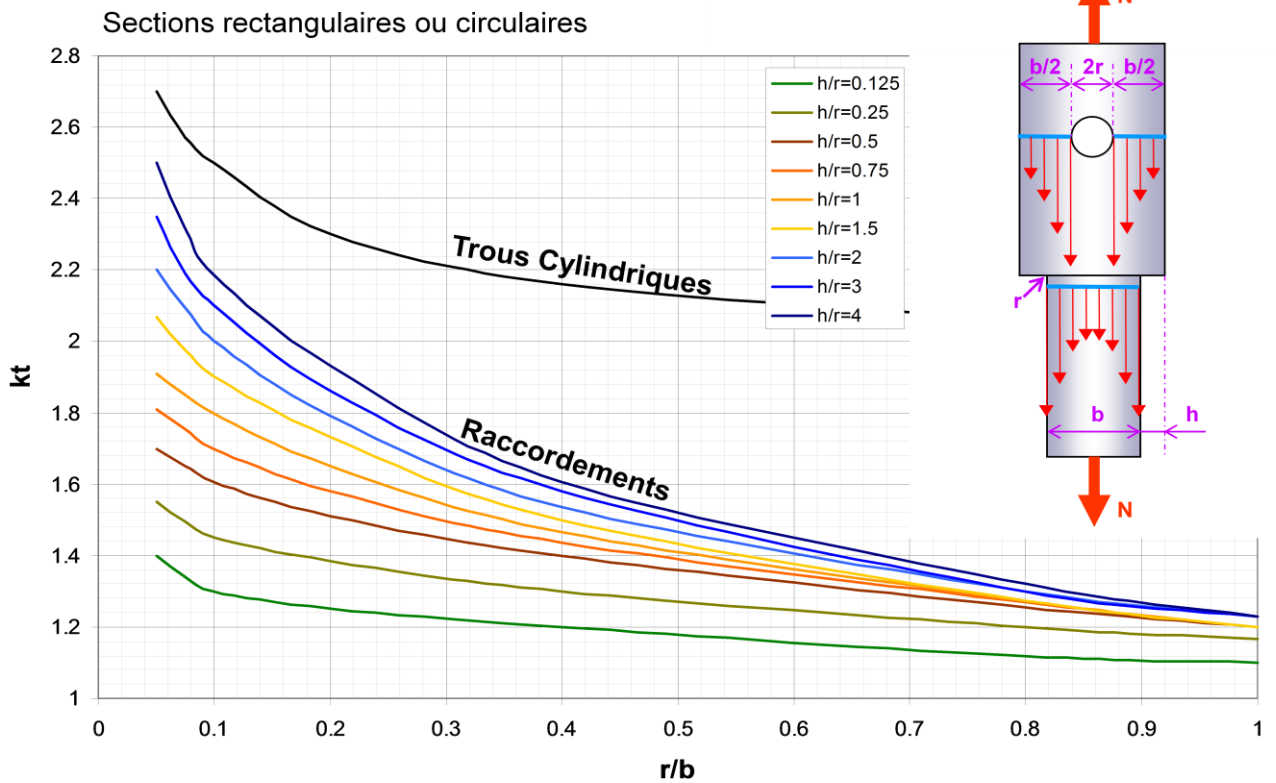
Pour un filetage ISO  $k_t = 2,5$

### Valeurs de $K_t$ pour des poutres entaillées

Sections rectangulaires ou circulaires



### Valeurs de Kt pour trous et raccordements

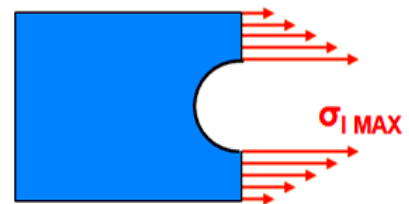
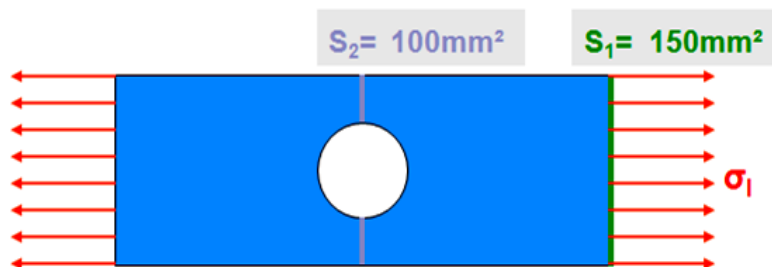
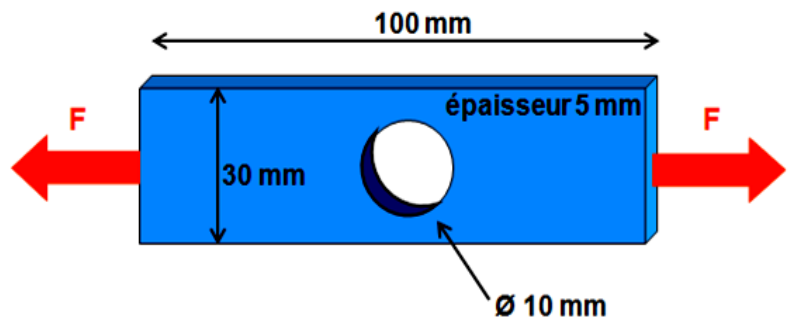


**Exemple :** Utilisation des abaques pour le calcul de Kt

Soit une plaque percée d'un trou en son centre et soumise à une traction.

On demande de calculer la contrainte maximum.

**F = 300 N**



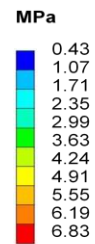
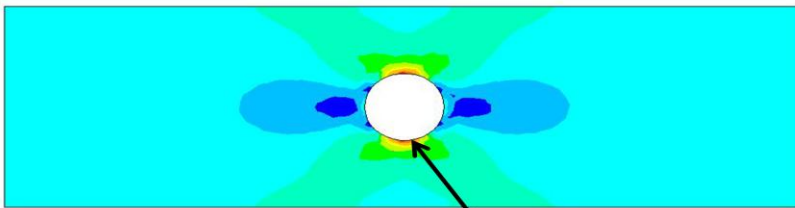
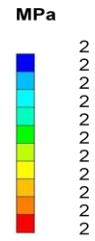
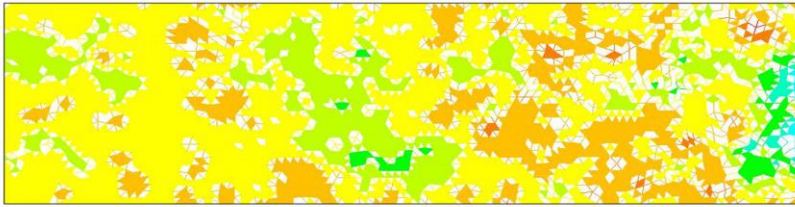
$\sigma_{1 \text{ MAX}} = ?$

$$\sigma_1 = \frac{F}{S_1} = \frac{300}{150} = 2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1 \text{ MAX}} = k_t \cdot \frac{F}{S_2} = 2,28 \times \frac{300}{100} = 6,84 \text{ MPa}$$

**Résultats comparatifs sous RDM6**

La méthode des éléments finis représente de manière discontinue la faible variation des contraintes



Valeur proche de celle calculée avec  $K_t$

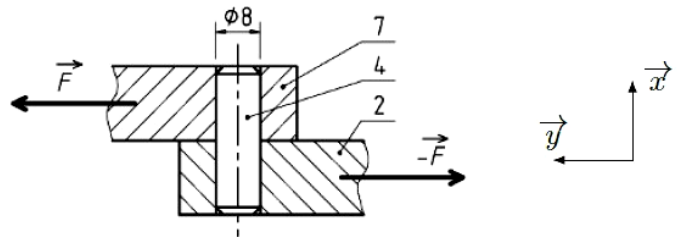
**9 - Cisaillement**

**9 - 1 Exemple : cisaillement d'une goupille**

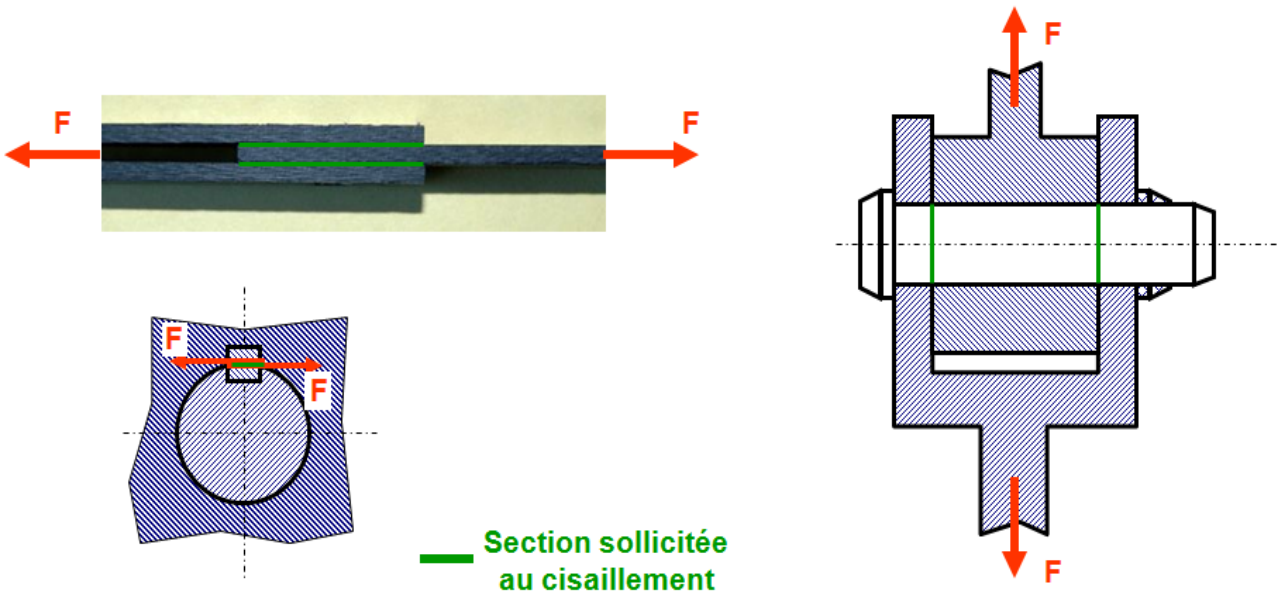
Si on suppose la goupille d'axe  $x$  alors au sein de celle-ci le vecteur contrainte s'écrit :

$$\vec{T}(M, \vec{x}) = \tau \cdot \vec{t}$$

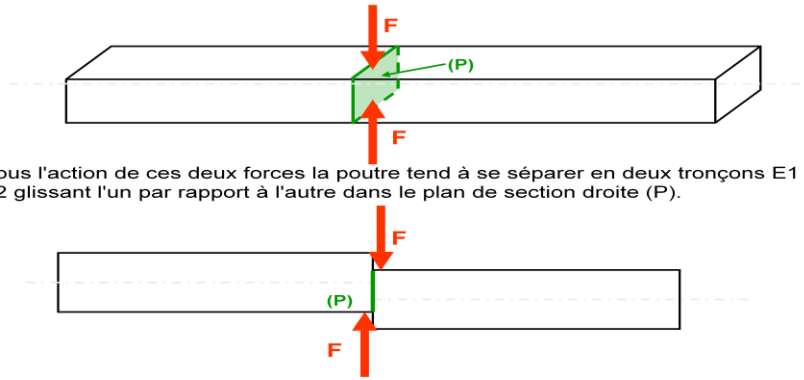
$$\vec{t} = \vec{x} \text{ dans cet exemple}$$



Un matériau réagit différemment selon qu'il est sollicité à une traction ou à un cisaillement pour lequel il résiste beaucoup moins bien  
 Dans la pratique, la résistance au cisaillement est comprise entre 0,5 et 0,8 fois la résistance à la traction



Une poutre subit une sollicitation de cisaillement simple lorsqu'elle est soumise à deux systèmes d'action de liaison qui se réduisent dans un plan (P) perpendiculaire à la ligne moyenne à deux forces directement opposées.



Sous l'action de ces deux forces la poutre tend à se séparer en deux tronçons E1 et E2 glissant l'un par rapport à l'autre dans le plan de section droite (P).

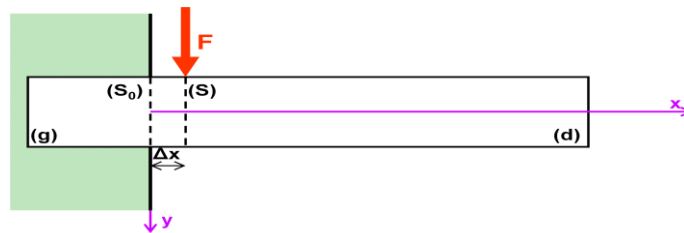
**Essai de cisaillement**

Les essais et résultats qui suivent permettent de rendre compte des actions tangentielles dans une section droite et serviront dans le calcul de pièces soumises au cisaillement.

On prendra des coefficients de sécurités pour tenir compte de l'imperfection de la modélisation.

Considérons une poutre (E) parfaitement encastree et appliquons-lui un effort de cisaillement F uniformément réparti dans le plan de la section droite (S) distante de Δx du plan (S<sub>0</sub>) d'encastrement.

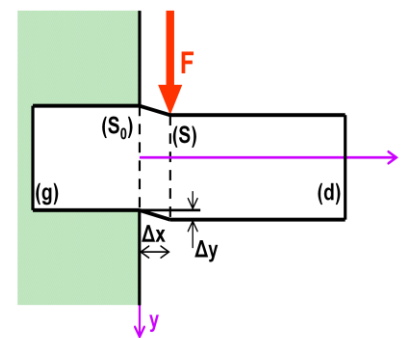
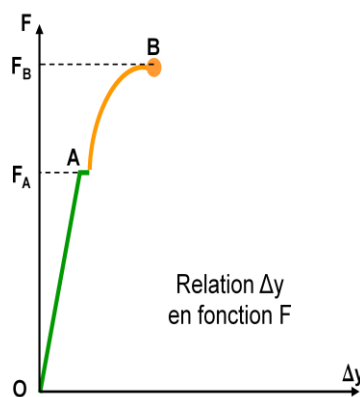
On se rapproche des conditions du cisaillement réel, à condition de vérifier que Δx est très inférieure aux autres dimensions



Si l'on isole (E1), on trouve alors le torseur de cohésion suivant :

$$\{\tau_{coh}\}_{G(x)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & F\Delta x \end{Bmatrix}_{b_L}$$

Lorsque Δx tend vers 0, on retrouve alors le torseur de cohésion du cisaillement pur



**9 - 2 Définition**

Une poutre droite d'axe x est en cisaillement au point G(x) si son torseur de cohésion exprimé au point G est égal à :

$$\{\tau_{coh}\}_{G(x)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{b_L} \quad T_y \text{ est appelé effort tranchant}$$

### 9 - 3 Relation contrainte-effort tranchant

Dans le cas du cisaillement, la contrainte tangentielle s'écrit :

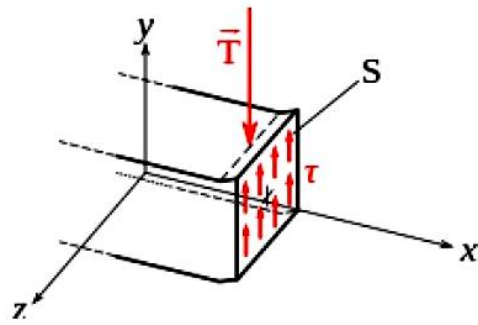
$$\tau = \frac{T_y}{S}$$

Avec :

$\tau$  : contrainte tangentielle (en MPa)

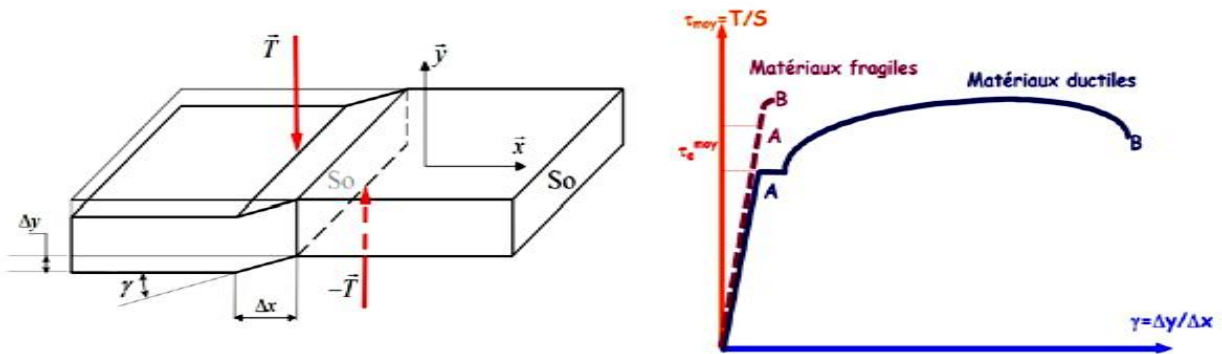
$T_y$  : effort tranchant (en N).

$S$  : aire de la section de la pièce (en mm<sup>2</sup>)

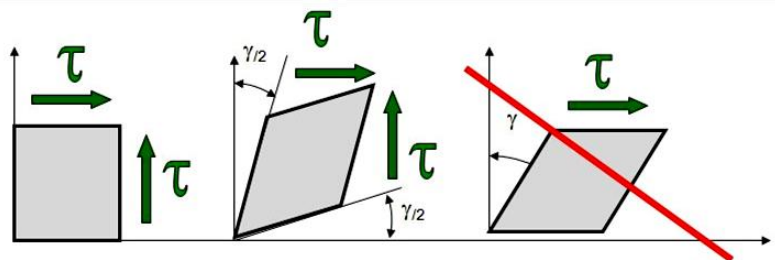


### 9 - 4 Analyse de la déformation

Dans le cas du cisaillement, les déformations sont caractérisées par un glissement des sections droites les unes par rapport aux autres. Le glissement est mesuré par l'angle appelé angle de glissement.



Un état de cisaillement pur peut être mis en évidence dans le cas d'un petit élément de plaque soumis à une distorsion ou dans le cas d'un tube à paroi mince soumis à un moment de torsion



Lorsque les déformations sont élastiques, la contrainte de cisaillement  $\tau$  est proportionnelle à l'angle de glissement  $\gamma$ . Autrement dit d'après la loi de Hooke :

$$\tau_{moy} = G \cdot \gamma$$

Avec :

-  $\tau_{moy}$  : contrainte tangentielle (en MPa)

-  $G$  : module d'élasticité transversal (en MPa) Pour les matériaux isotropes :  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

-  $\gamma$  : angle de glissement (en rad)

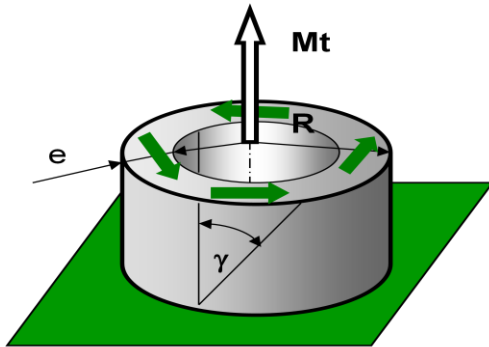
$\nu$  : coefficient de poisson

-  $E$  : module d'élasticité longitudinal

Matériau	Fontes	Aciers	Laiton	Duralumin	Plexiglas
G (MPa)	40000	80000	34000	32000	11000

Remarque : Essai de torsion

Un tel essai de torsion est plus facile à réaliser que l'essai de cisaillement de la page précédente.



$e \ll R$  paroi mince

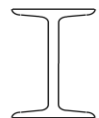
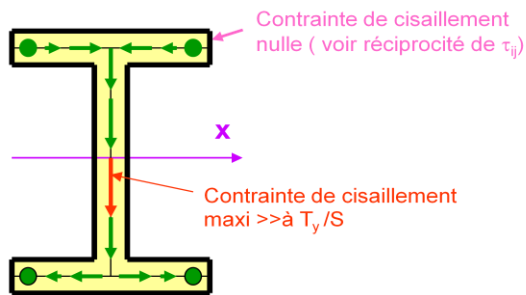
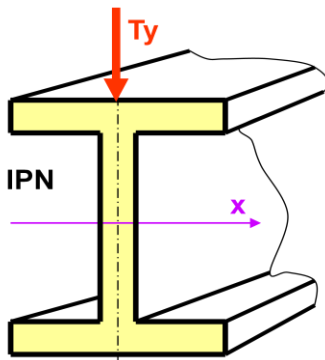
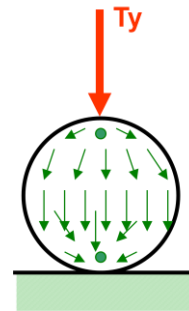
$$\tau = \frac{Mt}{2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot e}$$

Répartition de contrainte de cisaillement dans une poutre

**! Attention** : Dans le cas de profilés pleins ou creux soumis à un effort tranchant  $T_y$ , la contrainte de cisaillement n'est pas égale à  $T_y / S$  car la répartition des contraintes de cisaillement n'est pas uniforme.

La répartition réelle des contraintes est variable, passant de 0 à  $t_{max}$

ici  $\tau_{max} = \frac{2 T_y}{3 S}$



9 - 5 Dimensionnement d'une poutre en cisaillement

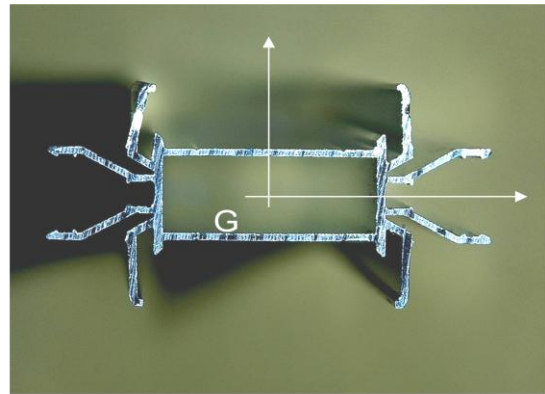
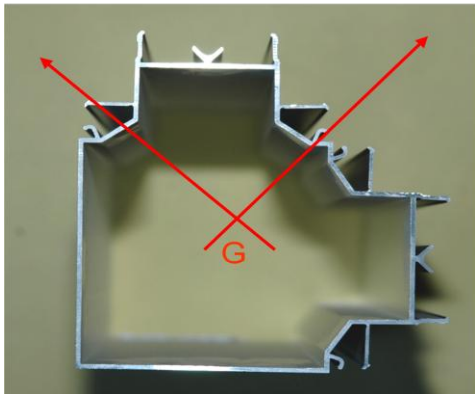
Critère en contrainte :  $\tau_{max} = k \frac{T_y}{S}$  et  $R_{pg} = \frac{R_g}{s}$  soit  $\tau_{max} = k \frac{T_y}{S} < R_{pg} = \frac{R_g}{s}$

Avec :

- S : section de la poutre
- s : coefficient de sécurité
- $R_g$  : limite élastique au glissement (pour les aciers,  $R_g = 0,7 R_e$ ),
- k : coefficient dépendant de la forme de la section ( $\frac{4}{3}$  pour une section circulaire,  $\frac{3}{2}$  pour une section rectangulaire).

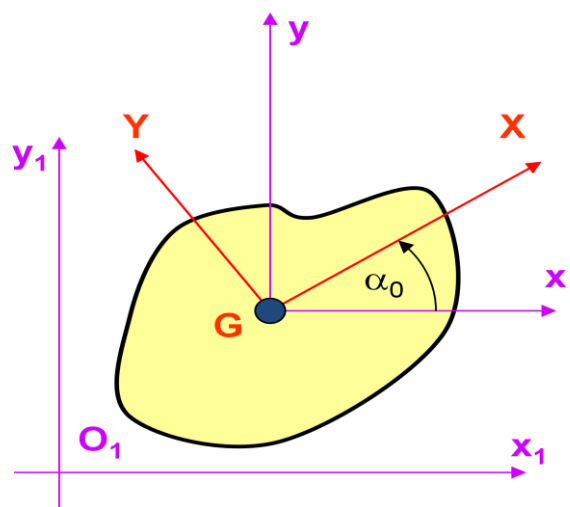
Cette situation n'est possible qu'au point d'application de l'effort sur la poutre (sinon il y a flexion).

## 10 - Caractéristiques des sections droites de poutres



Pour les sollicitations qui vont suivre (torsion, flexion), l'aire de la section droite ne suffit plus pour caractériser la poutre et en déduire son comportement. Il est nécessaire de connaître:

- la position du centre de gravité
- les moments statiques  $M_{S_{x_1}}$ ,  $M_{S_{y_1}}$
- les moments quadratiques ou moments d'inertie  $I_x$  et  $I_y$
- le moment polaire  $I_0$
- le moment produit  $I_{xy}$
- le repère principal d'inertie
- les moments principaux d'inertie  $I_x$  et  $I_y$ 
  - **Repère quelconque**  $x_1O_1y_1$
  - **Repère central**  $xGy$
  - **Repère principal**  $XGY$



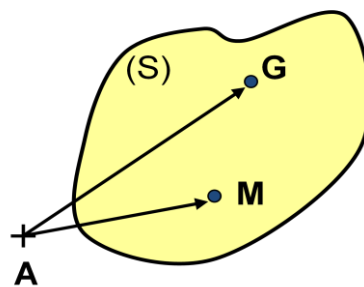
### 10 - 1 Centre de gravité

Soit (S) une section droite, M un point courant de (S) et O un point fixe du plan. Le centre de gravité géométrique est défini par :

$$\vec{AG} = \frac{1}{S} \int \vec{AG} \cdot dS$$

Le centre de gravité G est indépendant du choix de A.

$$\vec{O} = \frac{1}{S} \int \vec{GM} \cdot dS$$



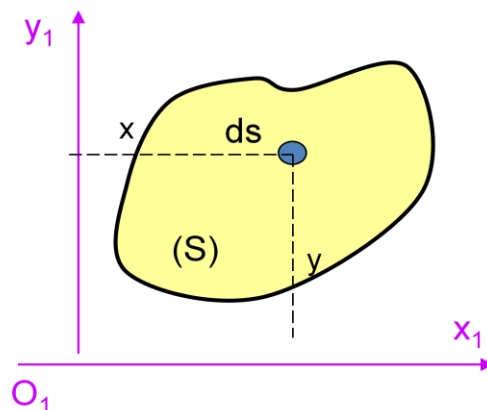
### 10 - 2 Moment statique

On appelle moment statique de la section droite S par rapport aux axes  $x_1$  ou  $y_1$  les sommes intégrales sur S de :

$$M_{S_{x_1}} = \iint y \cdot dS \quad \text{unités : m}^3$$

$$M_{S_{y_1}} = \iint x \cdot dS$$

**Un moment statique peut être positif ou négatif**



Variation des moments statiques après changement d'axes

$$M_{sx_2} = \iint y_2 \cdot dS \quad \text{et} \quad M_{sy_2} = \iint x_2 \cdot dS$$

$$x_2 = x_1 - a \quad \text{et} \quad y_2 = y_1 - b$$

donc

$$M_{sx_2} = \iint (y_1 - b) \cdot dS \quad \text{et} \quad M_{sy_2} = \iint (x_1 - a) \cdot dS$$

$$M_{sx_2} = M_{sx_1} - b \cdot S \quad \text{et} \quad M_{sy_2} = M_{sy_1} - a \cdot S$$

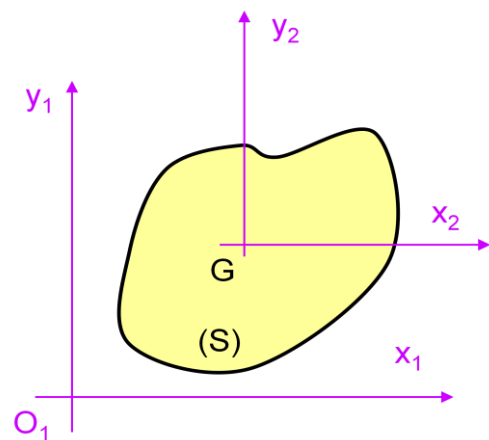
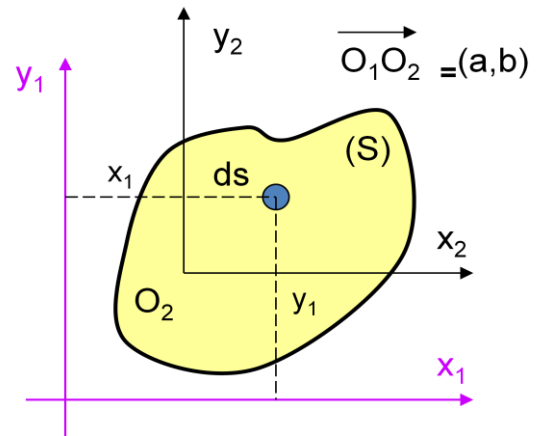
En conséquence il existe une position des axes telle que les moments statiques  $M_{sx_2}$  et  $M_{sy_2}$  sont nuls

$$M_{sx_2} = 0 \quad \text{si} \quad b = \frac{M_{sx_1}}{S}$$

$$M_{sy_2} = 0 \quad \text{si} \quad a = \frac{M_{sy_1}}{S}$$

Dans ce cas les axes  $O_2x_2$  et  $O_2y_2$  sont les axes centraux et  $O_2$  un point particulier appelé centre de gravité de la section  $S$

$$\text{Coordonnées de } G : \begin{cases} x_{1G} = \frac{1}{S} \iint x_1 \cdot dS \\ y_{1G} = \frac{1}{S} \iint y_1 \cdot dS \end{cases}$$



On montre avec une rotation des axes que le moment statique par rapport à n'importe quel axe passant par le centre de gravité est nul

Exemple 1 : Moment statique d'un rectangle

$$M_{sx_1} = \iint y \cdot dS = \int_a^{a+b} \int_0^h y \cdot dy \cdot dx$$

$$M_{sx_1} = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

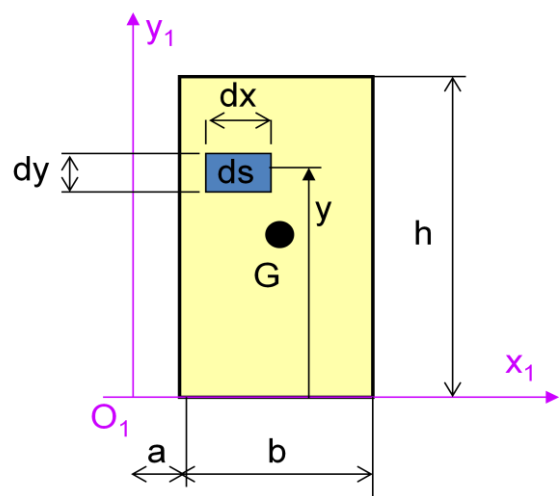
$$M_{sy_1} = \iint x \cdot dS = \int_0^h \int_a^{a+b} x \cdot dx \cdot dy$$

$$M_{sy_1} = \frac{h \cdot b^2}{2}$$

Autre méthode si on connaît la position de  $G$  :

$$M_{sx_1} = y_{1G} \cdot S \quad \text{avec} \quad y_{1G} = \frac{h}{2} \quad \text{et} \quad S = b \cdot h$$

$$\text{Donc} : M_{sx_1} = \frac{b \cdot h^2}{2}$$





**Exemple 2 :** Moment statique d'un demi disque et position de G

$$M_{sx_1} = \iint y \cdot dS = \int_0^R \rho^2 \cdot d\rho \int_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta$$

$$M_{sx_1} = \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^R \cdot [-\cos\theta]_0^\pi = 2 \frac{R^3}{3}$$

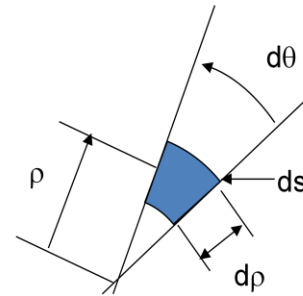
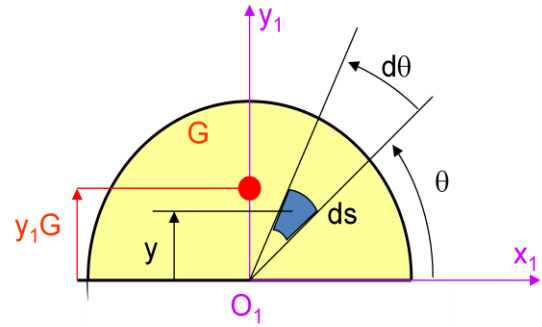
$$M_{sy_1} = \iint x \cdot dS = \int_0^R \rho^2 \cdot d\rho \int_0^\pi \cos\theta \cdot d\theta$$

$$M_{sy_1} = \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^R \cdot [\sin\theta]_0^\pi = 0$$

$y_1$  est axe de symétrie

Recherche de la position du centre de gravité

$$y_{1G} = \frac{M_{sx_1}}{S} = \frac{2 \frac{R^3}{3}}{\pi \frac{R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi} \text{ et } x_{1G} = 0$$



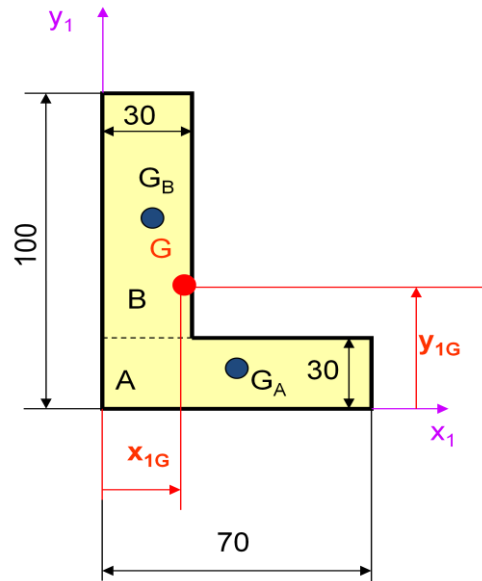
**Exemple 3 :** Moment statique d'une surface complexe

Pour des surfaces complexes divisibles en surfaces élémentaires pour lesquelles la position de C.D.G. est connue.

N°	$S_i$	$x_{1i}$	$x_{1i} \cdot S_i$	$y_{1i}$	$y_{1i} \cdot S_i$
A	2100	35	73500	15	31500
B	2100	15	31500	65	136500
$\Sigma$	4200		105000		168000

$$x_{1G} = \frac{\sum x_{1i} \cdot S_i}{\sum S_i} = \frac{105000}{4200} = 25 \text{ mm}$$

$$y_{1G} = \frac{\sum y_{1i} \cdot S_i}{\sum S_i} = \frac{168000}{4200} = 40 \text{ mm}$$



Longueur en mm

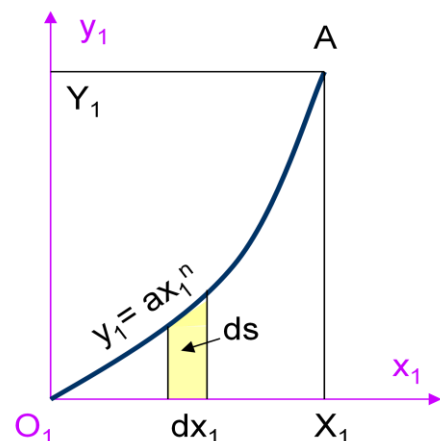
**Exemple 4 :** Moment statique d'une surface quelconque

$$x_{1\max} = X_1 \text{ et } y_{1\max} = Y_1 ; dS = y_1 \cdot dx_1 = a \cdot x_1^n \cdot dx_1$$

$$S = \iint dS = \int_0^{X_1} a \cdot x_1^n \cdot dx_1 = \left[ \frac{a \cdot x_1^{n+1}}{n+1} \right]_0^{X_1} = \frac{a \cdot X_1^{n+1}}{n+1} = \frac{Y_1 \cdot X_1}{n+1}$$

$$x_{1G} = \iint \frac{x_1 \cdot dS}{S} = \frac{n+1}{Y_1 \cdot X_1} \int_0^{X_1} a \cdot x_1^{n+1} \cdot dx_1 = \frac{n+1}{Y_1 \cdot X_1} \left[ \frac{a \cdot x_1^{n+2}}{n+2} \right]_0^{X_1}$$

$$x_{1G} = \frac{n+1}{Y_1} \frac{a \cdot X_1^{n+1}}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot X_1$$



10 - 3 Moments quadratiques

$$I_{S_{x1}} = \iint y^2 \cdot dS \text{ et } I_{S_{y1}} = \iint x^2 \cdot dS$$

Le moment quadratique polaire est:

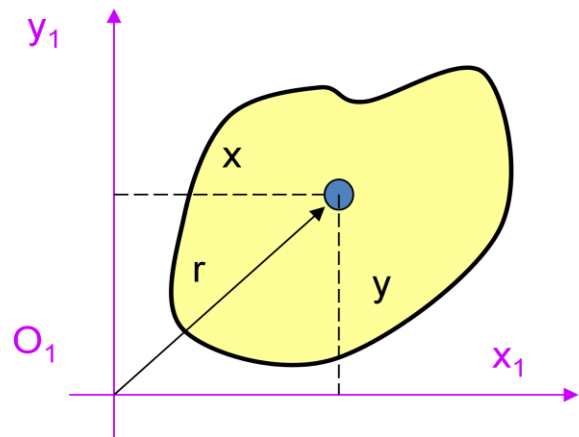
$$I_O = \iint r^2 \cdot dS \text{ avec } r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_O = I_{S_{x1}} + I_{S_{y1}}$$

**Un moment quadratique est toujours positif**

Unités:  $m^4$  ou  $mm^4$

Remarque: pour les profils normalisés les moments quadratiques sont donnés dans des catalogues



Changement d'axes pour les moments quadratiques : Théorème de Huygens

$$\vec{O_1O_2} = a \cdot \vec{x_1} + b \cdot \vec{y_1}$$

$$y_2 = y_1 - b$$

$$I_{S_{x2}} = \iint y_2^2 \cdot dS = \iint (y_1 - b)^2 \cdot dS$$

$$I_{S_{x2}} = \iint (y_1^2 - 2b y_1 + b^2) \cdot dS$$

$$I_{S_{x2}} = \iint y_1^2 \cdot dS - \iint 2b y_1 \cdot dS + \iint b^2 \cdot dS$$

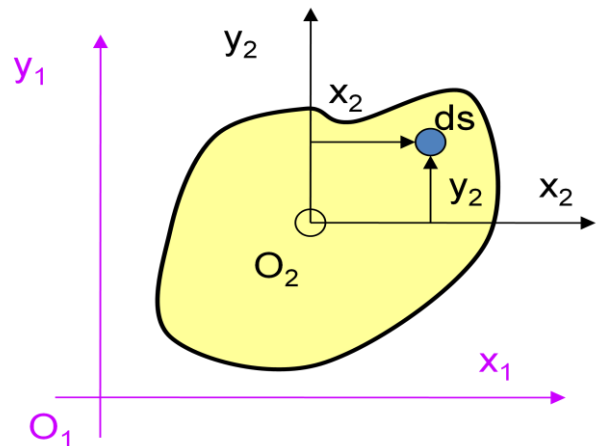
$$I_{S_{x2}} = I_{S_{x1}} - 2bM_{S_{y1}} + b^2 \cdot S$$

De même :

$$I_{S_{y2}} = I_{S_{y1}} - 2aM_{S_{x1}} + a^2 \cdot S$$

Si  $O_1$  est le centre de gravité :

$$M_{S_{x1}} = M_{S_{y1}} = 0$$



Exemple : Moment quadratique d'un rectangle

$$I_{S_{x1}} = \iint y_1^2 \cdot dS$$

$$I_{S_{x1}} = \iint y_1^2 \cdot dx_1 \cdot dy_1$$

$$I_{S_{x1}} = \left[ \frac{y_1^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} \left[ x_1 \right]_{-b/2}^{b/2}$$

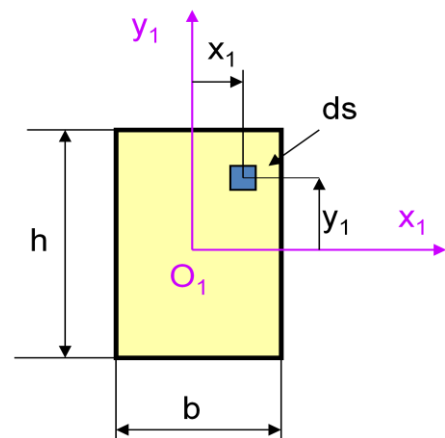
$$I_{S_{x1}} = b \cdot \frac{h^3}{12}$$

$$I_{S_{y1}} = \iint x_1^2 \cdot dS$$

$$I_{S_{y1}} = \iint x_1^2 \cdot dS \cdot dx_1 \cdot dy_1$$

$$I_{S_{y1}} = \left[ \frac{x_1^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} \left[ y_1 \right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$I_{S_{y1}} = h \cdot \frac{b^3}{12}$$



Exemple : Moment quadratique d'un disque

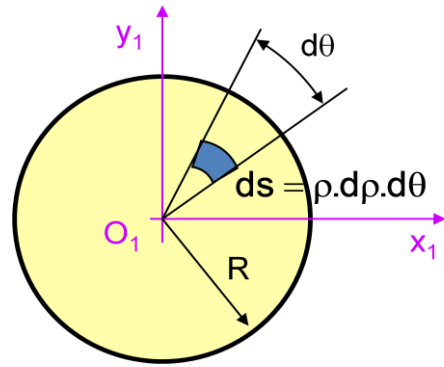
Moment quadratique polaire d'un disque :

$$I_{O_1} = \iint \rho^2 \cdot dS = \iint \rho^3 \cdot d\rho \cdot d\theta$$

$$I_{O_1} = \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} = \pi \frac{R^4}{2} = \pi \frac{d^4}{32}$$

Moment quadratique d'un disque:

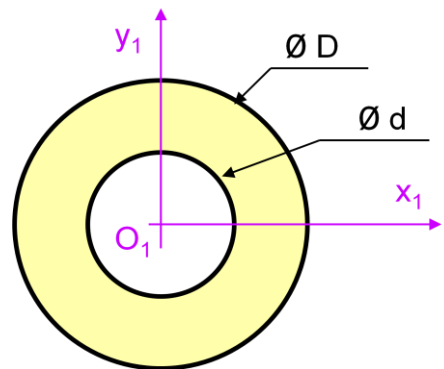
$$I_{O_1} = I_{x_1} + I_{y_1} \text{ or } I_{x_1} = I_{y_1} \text{ donc } I_{x_1} = I_{y_1} = \pi \frac{d^4}{64}$$



Exemple : Moment quadratique d'une couronne circulaire

$$I_{x_1} = I_{y_1} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

$$I_{O_1} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$



10 - 4 Moments produits

Le moment produits de S par rapport aux axes X1 et Y1 est égale à :

$$I_{x_1y_1} = \iint x_1y_1 \cdot dS \quad \text{Unité : m}^4$$

**Remarque** : un moment produit peut être positif ou négatif .

Changement d'axes

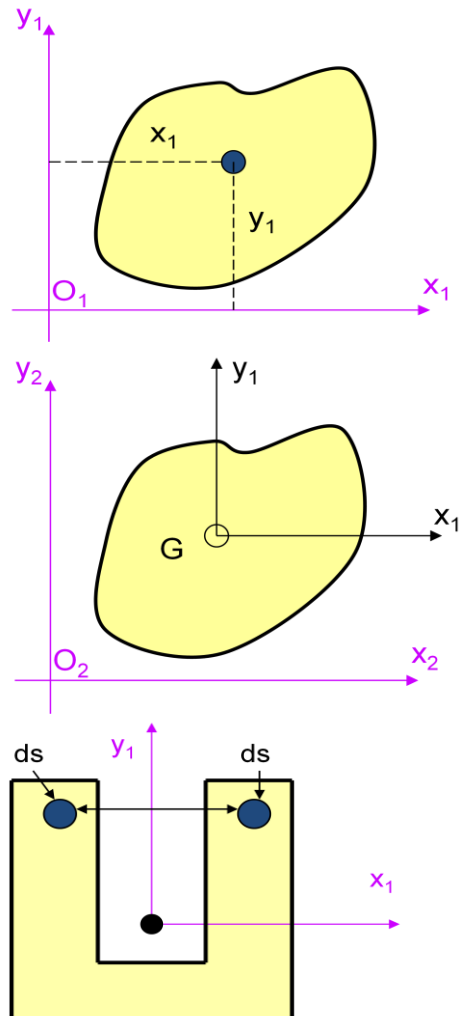
Si les repère x1y1 est central (passe par G) le moment produit par rapport à x2O2y2 est égal à :

$$I_{x_1y_1} = I_{x_2y_2} + S \cdot x_{2G}y_{2G}$$

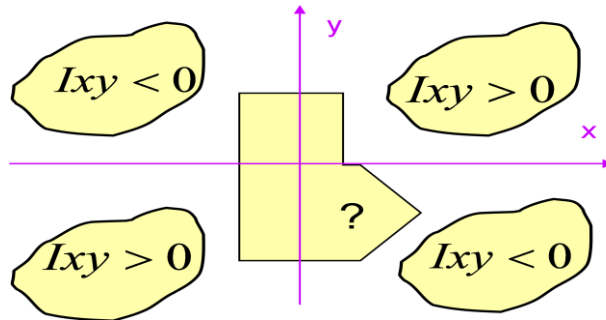
Ou x2G et y2G sont les coordonnées de G dans le nouveau repère x2, y2

Propriétés du moments Produits

Si un des axes au moins est axe de symétrie de la surface, le moment produit par rapport au repère est nul.



Signe des moments produits



**Exemple : Pour une surface complexe**

$$I_x = I_{x_{S_A}} + I_{x_{S_B}}$$

$$I_{x_{S_A}} = I_{x_{A_{S_A}}} + (b_1)^2 S_A = \frac{70 \cdot 30^3}{12} + (25)^2 \cdot 2100 = 147 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_{S_B}} = I_{x_{B_{S_B}}} + (b_2)^2 S_B = \frac{30 \cdot 70^3}{12} + (-25)^2 \cdot 2100 = 217 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_x = 364 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

De même

$$I_y = 143,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

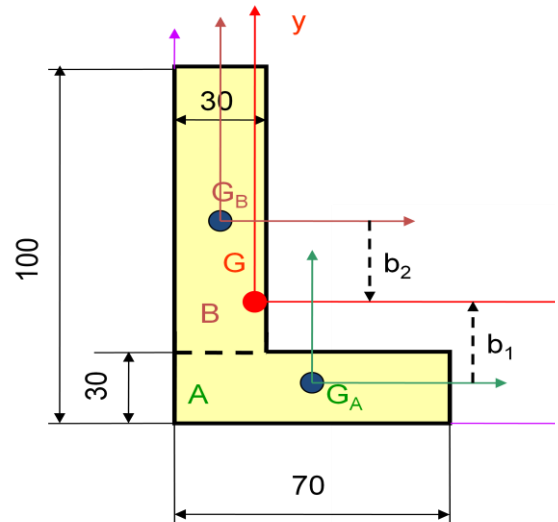
$$I_{xy} = -105 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

D'où

$$\alpha_0 = 21,8^\circ$$

$$I_x = 406 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 101,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$



$$x_{1G} = 25 \text{ mm}$$

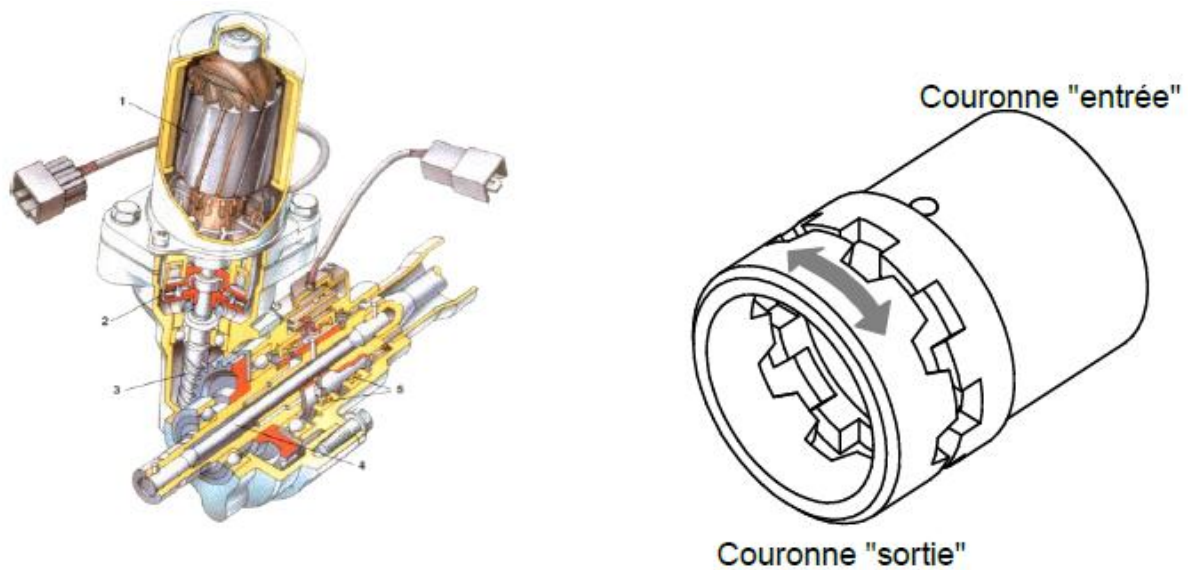
$$y_{1G} = 40 \text{ mm}$$

**Récapitulatif**

	Moment statique	Moment quadratique

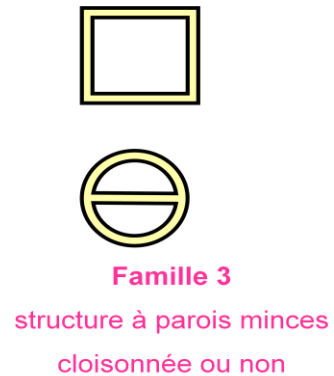
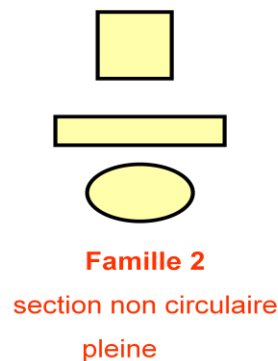
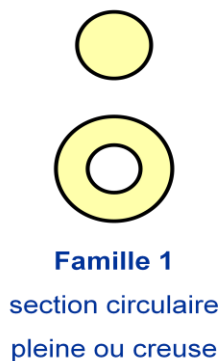
## 11 - Torsion

### 11 -1 Exemple : barre de torsion du capteur de couple de la direction assistée électrique



### 11 - 2 Définition - Familles de torsion

Pour étudier la torsion des pièces, telles que les arbres de transmissions de puissance ou les poutres, on les classe en trois familles pour lesquelles le calcul se fait de manière différente



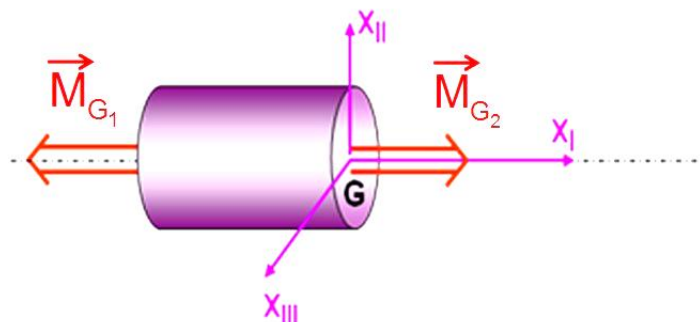
Une poutre est sollicitée en torsion simple lorsqu'elle est soumise à ses deux extrémités à des actions mécaniques dont les torseurs associés se réduisent à 2 torseurs couples opposés d'axe la ligne moyenne



Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$\{\tau_{coh}\}_{G(x)} = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{b_L}$$

$M_t$  est appelé **moment de torsion**



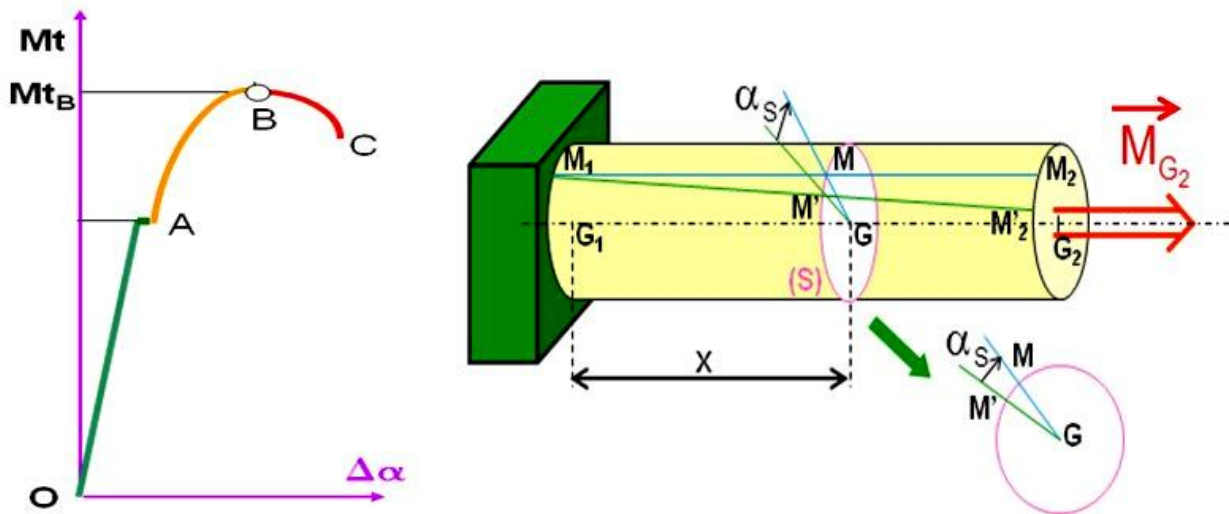
### 11 - 3 Hypothèses complémentaires

Pour pouvoir étudier la sollicitation élémentaire de torsion, il faut restreindre le cadre d'application. En effet, l'étude de la torsion présentée ici se limitera au cadre des poutres droites à sections circulaires. Ainsi, les poutres étudiées sont des cylindres de révolution à base circulaire. Cette restriction est liée au fait que pour toute section qui n'est pas circulaire, les résultats qui seront présentés sont faux car :

- les sections ne restent pas planes et se gauchissent,
- la contrainte de cisaillement qui est perpendiculaire au rayon vecteur (comme nous le verrons par la suite) ne peut pas être tangente au contour non circulaire de la section.

### 11 - 4 Essai de torsion

L'éprouvette de torsion est encastree à l'une de ses extrémités et soumise à un torseur couple à l'autre extrémité. On trace le graphe du moment appliqué en  $G_2$  en fonction de l'angle de rotation d'une section droite située à  $x$  de l'encastrement.

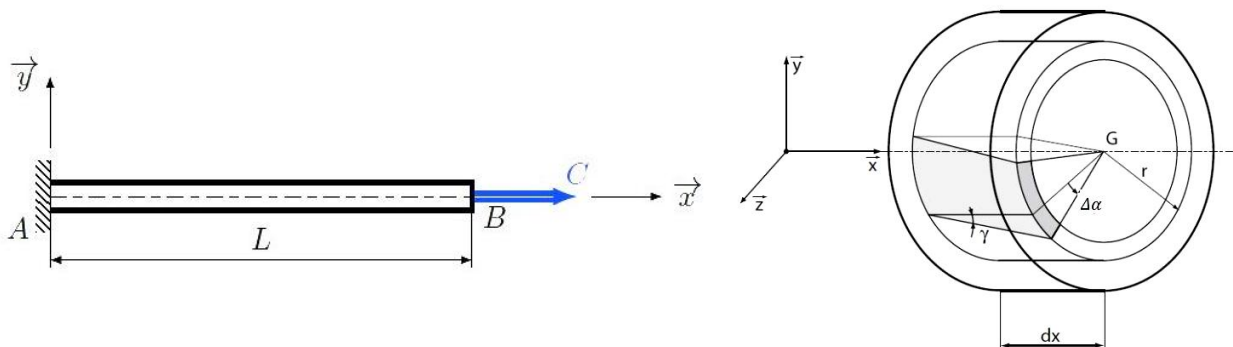


La déformation en torsion est uniformément répartie le long de la barre :  $\alpha_s = \Theta \cdot x$  et  $\alpha = \Theta \cdot L$

Angle unitaire de torsion de la barre en rad/m (déformation angulaire entre 2 sections distantes de l'unité de longueur)

Angle de torsion de la barre en rad

### 11 - 5 Déformation



Le mouvement de chaque section droite est une rotation  $\Delta\alpha$  d'axe  $(O; \vec{x})$ , ce qui permet de déduire que  $\vec{\Theta} = \Delta\alpha \cdot \vec{x}$  et  $\vec{U}_G = \vec{0}$  (pas de déplacement des centres de section).

En torsion, le torseur des petits déplacements d'une section droite s'écrit donc :

$$\{U_{S/R}\}_G = \begin{cases} \vec{\Theta} = \Delta\alpha \cdot \vec{x} \\ \vec{U}_G = \vec{0} \end{cases}$$

En un point  $P(r; \theta)$ , en utilisant la formule de changement de point du moment en coordonnées polaires, on peut écrire :

$$\{U_{S/R}\} = \underset{\forall P \in S}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{\theta} = \Delta\alpha \cdot \vec{x} \\ \vec{U}_P = r \cdot \Delta\alpha \cdot \vec{e}_\theta \end{array} \right.}$$

A partir de ce torseur, on peut donner la forme du torseur des petites déformations en un point P de la section S :

$$\{U_{S/R}\} = \underset{\forall P \in S}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{U}_P = \gamma \cdot \vec{e}_\theta = \rho \cdot \frac{d\Delta\alpha}{dx} \cdot \vec{e}_\theta = r \cdot \frac{d\Delta\alpha}{dx} \cdot \vec{e}_\theta \end{array} \right.}$$

### 11 - 6 Répartition des contraintes dans une section droite

Considérons deux sections droites S et S' distantes de  $\Delta x$ , et une ligne PM située à une distance r de l'axe de la barre. L'application de  $M_t$  crée un pivotement relatif de S par rapport à S' d'un angle  $\Delta\alpha = \theta \cdot \Delta x$ . Le déplacement absolu  $PP_1$  de P par rapport à M répond à la définition du cisaillement; l'angle de glissement  $\gamma$  s'exprime par :

$$\tan \gamma \approx \gamma = \frac{PP_1}{PM} = \rho \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \rho \theta \frac{\Delta x}{\Delta x} = \rho \theta$$

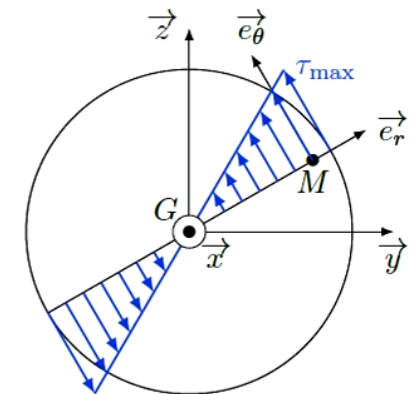
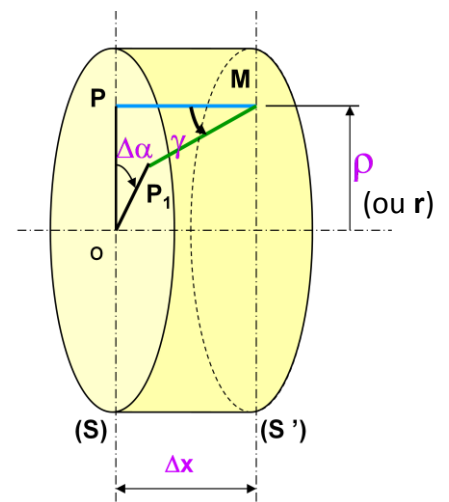
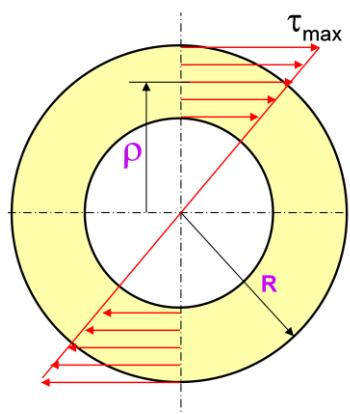
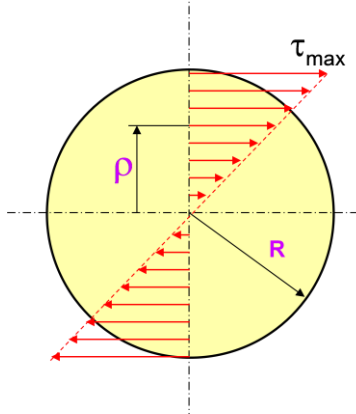
avec  $\vartheta = \frac{\Delta\alpha}{\Delta x}$  : angle unitaire de torsion en rad/m

D'après la loi de Hooke :  $\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \rho \theta = G \cdot r \theta$

L'état de contrainte étant directement lié à l'état de déformation par les lois de comportement du matériau :

- les contraintes sont tangentielles ;
- sur une section, les contraintes tangentielles sont orthoradiales : la contrainte est nulle au centre et maximale pour  $r = R$  (ou  $\rho = R$ );
- l'état de contrainte est indépendant de l'abscisse x de la section droite

Contrainte maximale :  $\tau_{max} = G \cdot R \cdot \theta$

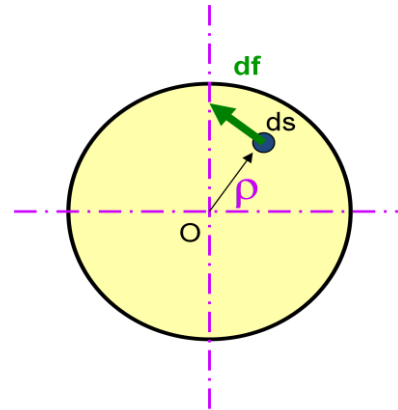


On voit que dans le cas de l'arbre plein, la zone centrale est peu chargée, il semble donc judicieux de « transférer » la matière de cette zone sur l'extérieur et utiliser des arbres tubulaires.

Équation d'équilibre de la section droite isolée

Un élément de l'arbre est en équilibre sous l'action du:

- moment de torsion  $M_t$
- du moments des actions sur la section droite avec  $df = \tau \cdot ds$  à la cote  $\rho$  (ou  $r$ )



$$M_t = \iint \rho \cdot df = \iint \rho \cdot \tau \cdot ds = \iint \rho \cdot G \cdot \rho \cdot \theta \cdot ds$$

$$M_t = \iint \rho^2 \cdot G \cdot \theta \cdot ds = G \cdot \theta \cdot \iint \rho^2 \cdot ds$$

Or  $\iint \rho^2 \cdot ds = I_0$  donc  **$M_t = G \cdot \theta \cdot I_0$**

On obtient donc :  $\tau = \frac{M_t}{\frac{I_0}{\rho}} = \frac{M_t}{\frac{I_0}{r}}$  d'où  $\tau_{max} = \frac{M_t}{\frac{I_0}{R}}$

Avec :

$\tau$  : contrainte tangentielle (en MPa)

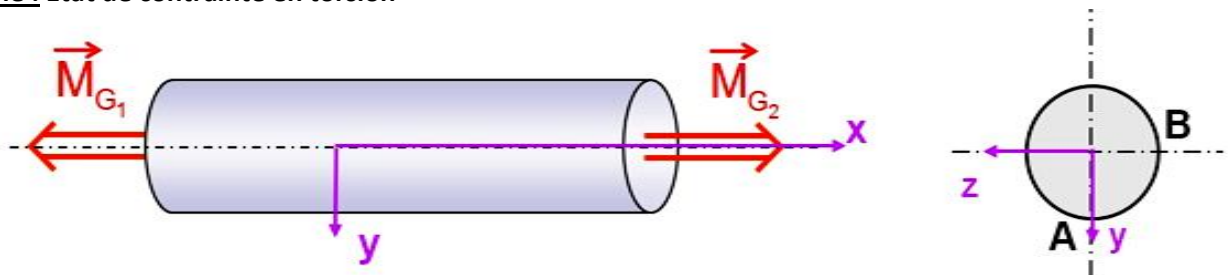
$G$  : module d'élasticité transversal (en MPa)

$\vartheta$  : angle unitaire de torsion autour de  $x$  (en rad/m)

$G$  est couramment appelé Module de Coulomb. On peut l'exprimer à partir du coefficient de Poisson  $\nu$  et du module d'Young  $E$  du matériau :

$$\mathbf{G} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

**Exemple : Etat de contrainte en torsion**



La poutre est soumise à ses deux extrémités à des actions mécaniques dont les torseurs associés se réduisent à 2 torseurs couples opposés d'axe la ligne moyenne. C'est une sollicitation de torsion simple :

Le torseur de cohésion s'écrit :  $\{\tau_{coh}\}_{G(x)} = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} 0 & M_{G2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G(x)}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

La contrainte tangentielle vaut :  $\tau = \frac{M_t}{\frac{I_0}{\rho}}$

Etat de contrainte en A et B :  $[\sigma]_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$   $[\sigma]_{(B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



11 - 7 Relation déformation-rotation

A partir de la définition de  $\gamma$  et de la loi de Hooke ( $\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \rho \theta = G \cdot r \theta$ ), on peut écrire que  $G \cdot \theta = \frac{\tau}{\rho} = \frac{\tau}{r}$

Or on a vu précédemment que  $\tau = \frac{Mt}{I_G} = \frac{Mt}{\rho \cdot r}$ , d'où :  $\frac{\tau}{r} = \frac{Mt}{I_G} = G \cdot \theta = G \cdot \frac{d\alpha}{dx}$

Soit  $\Delta\alpha = \alpha_{x2} - \alpha_{x1} = \int_{x1}^{x2} \frac{Mt}{G \cdot I_G} dx$

$$\Delta\alpha = \theta \cdot L$$

Pour une poutre de longueur L, on en déduit que la torsion totale est : avec  $\theta = \frac{Mt}{G \cdot I_G}$

On peut aussi déterminer la raideur en torsion  $k_{tor}$  de la poutre en mettant la relation sous la forme :  $Mt = k_{tor} \cdot \alpha_x$  avec :  $k_{tor} = \frac{G \cdot I_G}{L}$

11 - 8 Dimensionnement d'une poutre en torsion

*Critère en contrainte :*

Un matériau en torsion reste dans son domaine élastique si la contrainte tangentielle reste inférieure une valeur limite appelée résistance pratique au glissement notée  $R_{pg}$  (en MPa) :

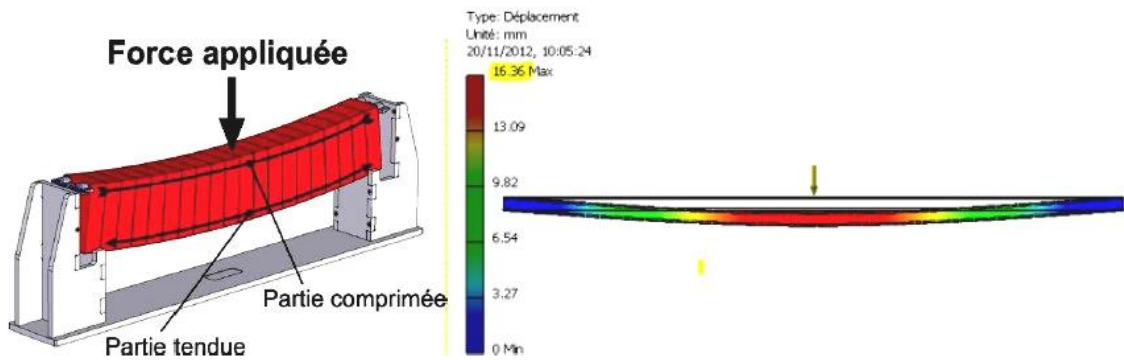
$$\tau_{max} \leq R_{pg} = \frac{R_g}{s}$$

Avec :

- $s$  : coefficient de sécurité
- $R_g$  : limite élastique au glissement (pour les aciers,  $R_g \approx 0,5Re$  à  $0,7Re$ ).

12 - Flexion

12 - 1 Exemple : flexion d'un pont



12 - 2 Définition

La flexion est un mode de chargement tel qu'il apparaît dans la section droite d'une poutre un moment de flexion.

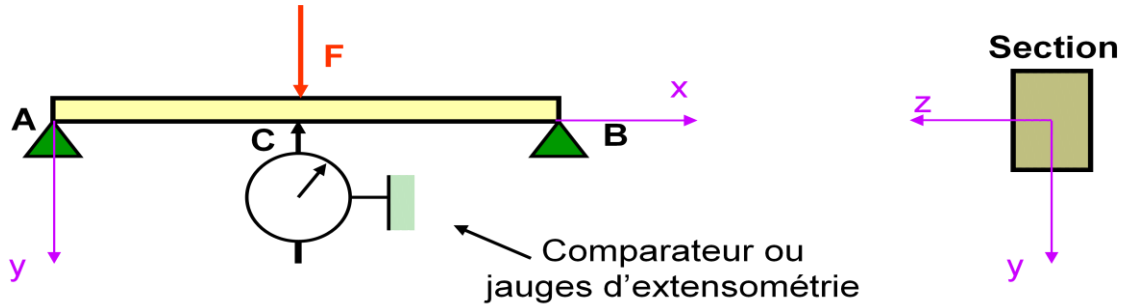
Si le moment de flexion est seul nous sommes en **flexion pure** :  $\{\tau_{coh}\}_{G(x)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

Si le moment de flexion est associé à un

effort tranchant nous sommes en **flexion simple** :  $\{\tau_{coh}\}_{G(x)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

- $T_y$  est appelé **effort tranchant** ;
- $M_{fz}$  est appelé **moment fléchissant**

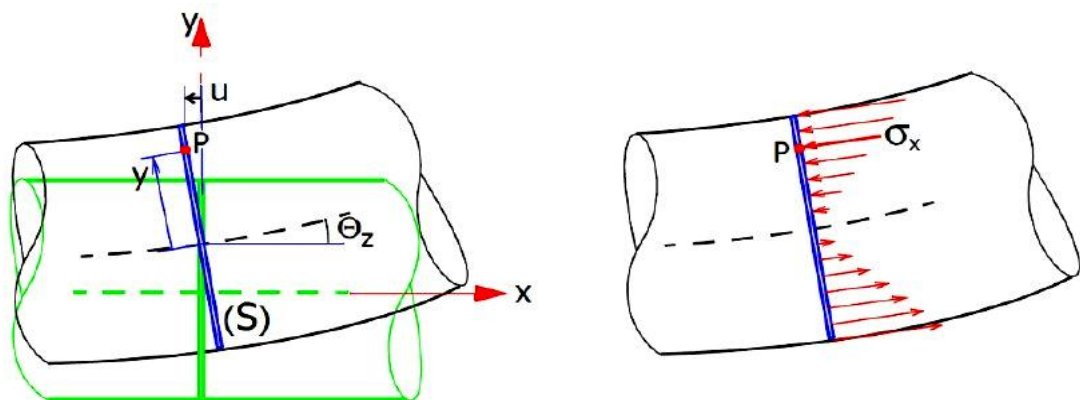
12 - 3 Essai de flexion



Constatations

- La flèche est proportionnelle à l'effort  $F$  appliqué.
- On observe, en effectuant l'essai avec différentes poutres, que la flèche en C est inversement proportionnelle au moment quadratique  $IG_z$  de la section.
- Les fibres longitudinales situées au dessus de la ligne moyenne se raccourcissent et celles situées en dessous de la ligne moyenne s'allongent.
- Les allongements et raccourcissement relatifs ( $\Delta/l$ ) sont proportionnels à la distance de la fibre considérée au plan  $(G, x, z)$ .

12 - 4 Analyse de la déformation



Le mouvement d'une section droite est une combinaison :

- d'une rotation d'axe  $(G ; \vec{z})$  donc  $\vec{\theta} = \theta_z \cdot \vec{z}$
- d'une translation suivant l'axe  $y$  donc :  $\vec{U}_G = u_y \cdot \vec{y}$

En flexion, le torseur des petits déplacements d'une section droite s'écrit donc :

$$\{U_{S/R}\} = \begin{cases} \vec{\theta} = \theta_z \cdot \vec{z} \\ \vec{U}_G = u_y \cdot \vec{y} \end{cases}$$

A partir de ce torseur, on peut donner la forme du torseur des petites déformations en un point P de la section S (en admettant  $\epsilon_y = 0$  du fait des hypothèses des petits déplacements et de Navier-Bernoulli) :

$$\{\epsilon(x)\} = \begin{cases} \vec{\gamma} = \gamma_z \cdot \vec{z} \\ \vec{\epsilon}_P = \epsilon_x \cdot \vec{x} = -y \frac{d\theta_z}{dx} \cdot \vec{x} \end{cases}$$

12 - 5 Expression de la contrainte

La loi de Hooke a permis de mettre en évidence que la contrainte est proportionnelle à allongement relatif. Dans le cas de la flexion, les contraintes se réduisent essentiellement à des contraintes normales. On peut donc écrire :

$$\sigma_x(y) = \frac{Mfz}{I_{Gz}} \cdot y$$

Avec  $I_{Gz}$  moment quadratique de la section droite S par rapport à l'axe (G;  $\vec{z}$ ) (voir .8.6.1).

Démonstration :

La contrainte  $\sigma_x$  qui règne en P dans cette fibre vaut :  $\sigma_x = E \epsilon_x = - E \cdot y \frac{d\theta_z}{dx}$

(On remarque que  $\sigma_x$  est une fonction linéaire de y)

D'après le schéma page précédente, on constate que :

$$dMfz = - y \cdot \sigma_x \cdot dS \quad \text{donc} \quad Mfz = - \int_S y \cdot \sigma_x \cdot dS \quad \text{d'où} : \quad Mfz = E \cdot \frac{d\theta_z}{dx} \cdot \int_S y^2 \cdot dS = E \cdot \frac{d\theta_z}{dx} \cdot I_{Gz}$$

En reprenant l'expression de la contrainte  $\sigma_x$  :  $\sigma_x(y) = - \frac{Mfz}{I_{Gz}} \cdot y$

Par un raisonnement analogue, on trouve que :  $\sigma_x(z) = + \frac{Mfz}{I_{Gy}} \cdot z$

La contrainte maximale dans une poutre d'axe x soumise à une flexion d'axe z est donnée par :

$$\sigma_{max} = \frac{|Mfz|}{I_{Gz}} \cdot y_{max}$$

12 - 6 Expression de la déformée

Pour une **poutre droite** d'axe x, on désigne par  $u_y$  la translation d'ensemble suivant y de la section droite S. La rotation d'ensemble  $\theta_z$  s'écrit alors :

$$\theta_z = \frac{du_y}{dx} \quad (\text{hypothèses des petits déplacements et de Navier-Bernouilli}).$$

Cela conduit, en remplaçant  $\theta_z = \frac{du_y}{dx}$  dans l'expression de Mfz, à l'équation différentielle de la déformée :

$$Mfz = E \cdot I_{Gz} \cdot \frac{d^2 u_y}{dx^2}$$

On adopte souvent la notation suivante :  $Mfz = E \cdot I_{Gz} \cdot y''(x)$  ou  $Mfy = - E \cdot I_{Gy} \cdot z''(x)$

12 - 7 Relation entre Mf et les contraintes dans la section droite de la poutre

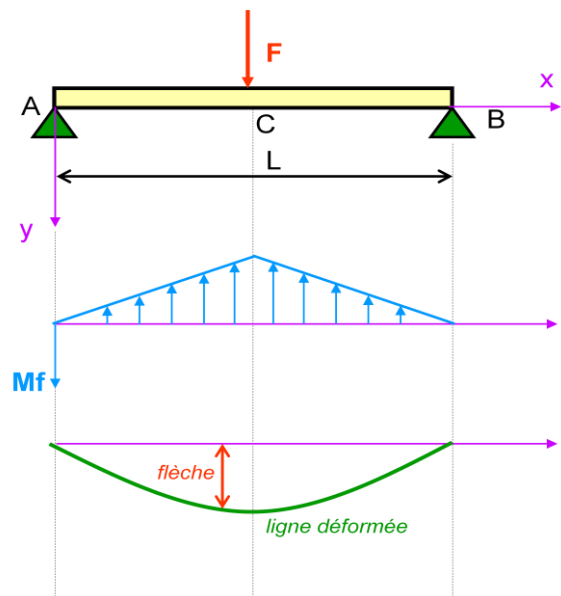
Soit une poutre droite sur deux appuis, de section constante, chargée en son milieu par une force  
Traçons le diagramme de moments de flexion

$$\text{Zone AC} : Mf = - \frac{1}{2} x \cdot F$$

$$\text{Zone CB} : Mf = - \frac{1}{2} (L - x) \cdot F$$

Nous souhaitons déterminer :

- les équations de la ligne déformée
- les tangentes à cette ligne
- la valeur de la flèche maxi



Soit un élément  $\Delta l$  de la poutre où :

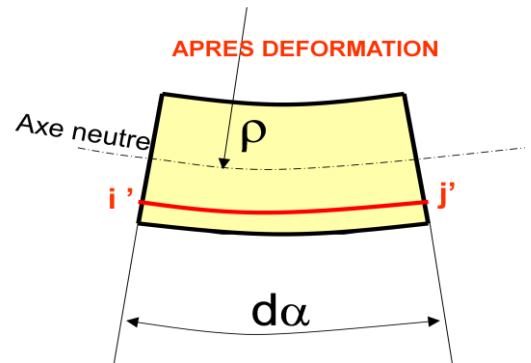
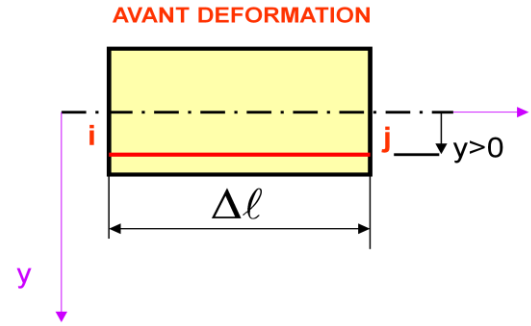
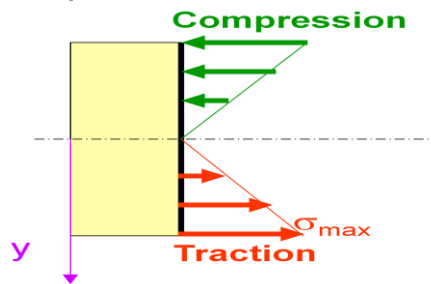
- $r$  est le rayon de courbure de la poutre au point étudié
- $d\alpha$  la rotation des sections droites délimitant  $\Delta l$

Calculons la déformation de  $ij$  :  $\epsilon_{ij}$

$$\epsilon_{ij} = \frac{i'j' - ij}{ij} = \frac{(\rho+y)d\alpha - \rho d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{y}{\rho}$$

D'où l'expression de  $\sigma$  :

$$\sigma = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{y}{\rho}$$



Calculons la somme des forces induites par ces contraintes normales

$$N = \iint_S \sigma \cdot dS = \iint_S E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot dS = 0$$

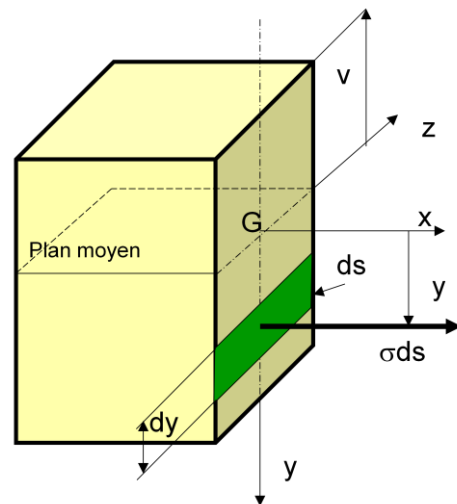
$$\iint_S y \cdot dS = \text{moment statique de } S$$

**Conclusion** : l'axe neutre = ligne moyenne de la poutre

$$M_{fz} = - \iint_S y \cdot \sigma \cdot dS = - \iint_S y^2 \cdot \frac{E}{\rho} \cdot dS$$

$$\iint_S y^2 \cdot dS = \text{moment quadratique de } S = I_{Gz}$$

$$\text{Donc : } M_{fz} = - \frac{E}{\rho} \cdot I_{Gz}$$



$$\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho} = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} \cdot y \text{ et } \sigma_{\max} = E \cdot \frac{y}{\rho} = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} \cdot v$$

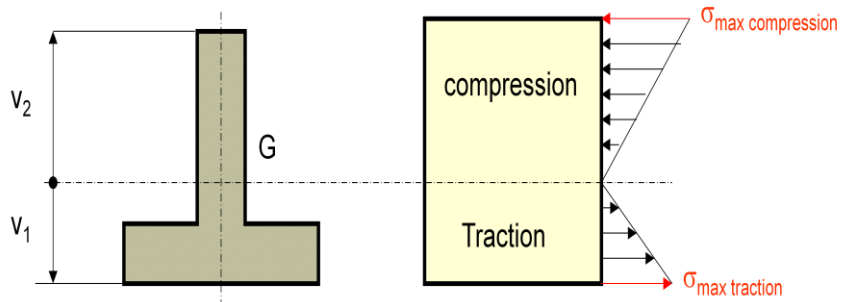
Remarque 1

Dans le cas de matériaux tels que les fontes, les bétons, certaines roches, il est nécessaire de faire le calcul de la contrainte maxi pour la traction et la compression. Pour ces matériaux  $s_{adm}$  en compression est différent de  $s_{adm}$  en traction.

Remarque 2

$$\sigma_{\max \text{ traction}} = \frac{|M_{fz}|}{I_{Gz}} \cdot v_1$$

$$\sigma_{\max \text{ compression}} = \frac{|M_{fz}|}{I_{Gz}} \cdot v_2$$



### 13 - Flambage

Le flambement est en fait une **sollicitation composée de compression et de flexion**, mais dont l'étude est différente de la flexion composée parce que les méthodes sont différentes et que le flambement est un phénomène rapidement destructif. En effet, dans le cas du flambement, les déformations ne peuvent plus être supposées infiniment petites et négligées comme dans les chapitres précédents. De même, les forces extérieures ne sont plus proportionnelles aux déformations et, dans certains cas, de grandes déformations peuvent être causées par des accroissements de charge infimes. Tous ces phénomènes sont connus sous le nom d'instabilité élastique. Le risque de flambement d'un élément étant lié aux dimensions de cet élément, on dit que **le flambement est un phénomène d'instabilité de forme**.

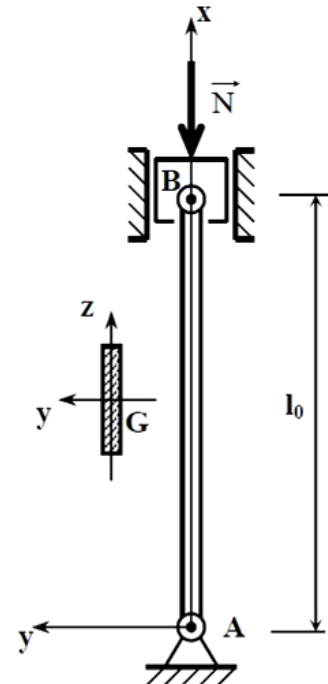
#### 13 - 1 Mise en évidence du flambage

Considérons une pièce **élançée** (telle que sa longueur soit très supérieure à sa plus grande dimension transversale), de ligne moyenne rectiligne, de section droite constante, articulée à ses deux extrémités, et soumettons la à un **effort normal de compression centré**.

On observe successivement deux types de sollicitation :

- pour un effort  $N$  inférieur à une limite  $N_c$ , la poutre est comprimée, elle reste rectiligne et se raccourcit.
- Lorsque  $N$  atteint  $N_c$ , la poutre fléchit brusquement et se rompt très vite. On observe que la flexion se produit dans le **plan perpendiculaire à la direction de plus faible moment quadratique** de la section de la poutre. Pour le schéma ci-contre par exemple, la flexion se produit dans le plan  $(A, x, y)$ , perpendiculaire à  $(G, z)$  (rotation de la poutre autour de l'axe  $z$ ).

La valeur  $N_c$  (ou  $F_c$ ) de l'effort de compression à partir de laquelle se produit le flambement s'appelle **charge critique d'Euler**.



#### 13 - 2 Charge critique d'Euler

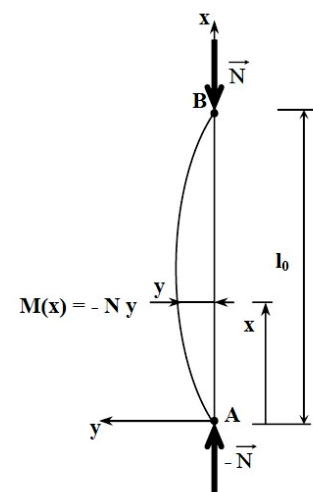
##### Hypothèses d'étude

- La poutre est de section constante, la ligne moyenne est rigoureusement droite avant déformation
- Les liaisons de la poutre avec le milieu extérieur sont des liaisons sphériques
- $A, \vec{x}$  est porté par la ligne moyenne de la poutre avant déformation
- La liaison 1-2 en A est une liaison pivot d'axe  $A, \vec{z}$
- Le poids de la poutre est négligé
- La liaison pivot 1-3 en B est une liaison pivot sans adhérence d'axe  $B, \vec{z}$

Modélisons la poutre par sa ligne moyenne AB et supposons que sous l'influence des efforts en A et B, cette ligne moyenne prenne une très légère courbure (accentuée sur le schéma ci-contre)

Si  $x$  et  $y$  sont les coordonnées d'un point courant G de la fibre moyenne,  $y$  est la déformée de cette fibre.

Habituellement, en ce qui concerne l'équilibre statique, on considère que les déformations sont petites et que la fibre moyenne n'a pas bougé après déformation. Dans ce qui suit, nous allons au contraire prendre en compte l'influence des déformations sur l'équilibre statique et considérer le moment secondaire qu'elles provoquent. Ce moment de flexion dans la section vaut :  $M_f(x) = -N.y$



Or  $EIG_z.y'' = M_f = -N.y$  ce qui est une équation du 2<sup>ème</sup> ordre avec une solution qui est de la forme :

$$y = A.\cos(\omega x) + B.\sin(\omega x) \text{ avec } \omega^2 = \frac{N}{E.I_{Gz}} \quad (1)$$

Détermination des constantes avec les conditions aux limites :

Pour  $x = 0, y(0) = 0$  ; donc  $A = 0$

Pour  $x = l_0, y(l_0) = 0$  ; donc  $B \sin \omega x = 0$

A étant nul, il est évident que  $B \neq 0$  (sinon pas de flambement),

$\Rightarrow \sin \omega l_0 = 0$

$\Leftrightarrow \omega l_0 = n \pi$  avec  $n = 1, 2, 3, \dots$

$n = 1$  : 1<sup>er</sup> mode de flambement  $\Rightarrow \omega = \frac{\pi}{l_0}$  (2)

Equation de la déformée ;  $y(x) = B \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l_0}\right)$

Les relations (1) et (2) impliquent :  $\omega^2 = \frac{\pi^2}{l_0^2} = \frac{N}{E \cdot I_{Gz}}$

La résolution de cette équation permet de trouver  $N$  provoquant la déformée, c'est-à-dire la **charge critique d'Euler  $N_c$**  au-delà de laquelle le flambement se produit :

$$N_c = \frac{E \cdot I_{Gz} \cdot \pi^2}{l_0^2}$$

dans le cas de la poutre bi-articulée étudiée ( $l_f = l_0$  - voir paragraphe suivant) et le moment quadratique le plus faible (ce n'est pas toujours le cas)  $GzI$

Plusieurs cas sont possibles pour la poutre :

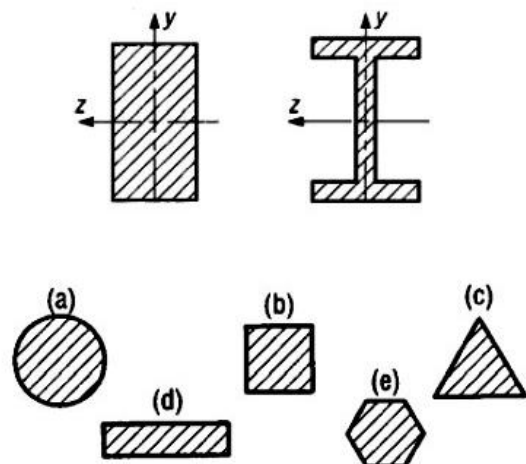
- $N < N_c$  : compression simple, la poutre reste droite, elle est dite en équilibre stable.
- $N = N_c$  : la poutre peut rester droite ou fléchir (flamber) avec une flèche égale à  $B$ , elle est dite en équilibre neutre. A noter que  $B = y_{maxi}$  est en général petit.
- $N > N_c$  : il y a instabilité en position droite (équilibre instable) avec une forte tendance au flambement.  $B$  augmentera très rapidement avec un léger accroissement de  $N$ .



Remarques

- Le flambement se produit suivant un axe perpendiculaire à l'axe du moment quadratique le plus faible. Pour les deux sections représentées,  $l_y < l_z$ , le flambement se produit dans le plan  $(x, z)$ .

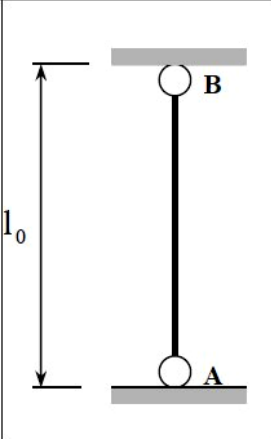
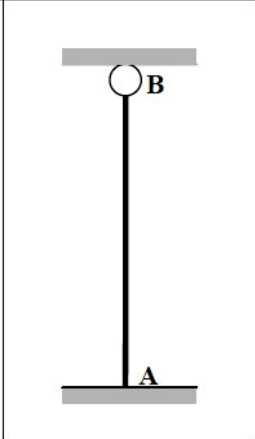
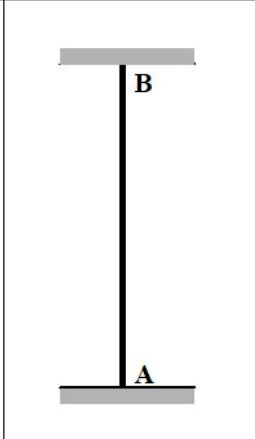
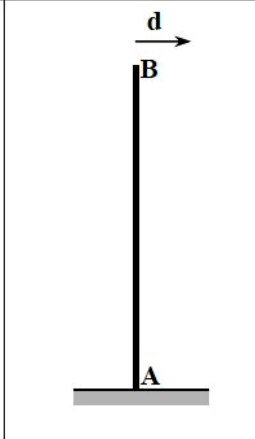
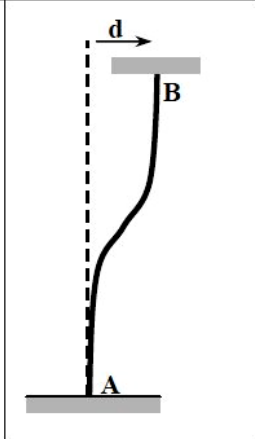
- Pour les cinq sections représentées, toutes de même aire, celle du triangle équilatéral (c) est celle qui résiste le mieux au flambement (21% plus résistante que la section circulaire)



13 - 3 - Influence des liaisons aux appuis

On peut généraliser les résultats établis pour la poutre bi-articulée pour des poutres dont les conditions d'appuis sont différentes. L'expression générale de la charge critique d'Euler est :

$$N_c = \frac{E \cdot I_{Gz \text{ ou } y} \cdot \pi^2}{l_f^2} \quad \text{avec } l_f: \text{ longueur de flambement}$$

Longueur de flambement $l_f$ en fonction des liaisons aux appuis			Déplacement de B en tête de poteau	
A et B sont sur la même verticale				
				
$l_f = l_0$	$l_f = \frac{\sqrt{2}}{2} l_0$	$l_f = \frac{l_0}{2}$	$l_f = 2 l_0$	$l_f = l_0$

Il faut en pratique envisager  $l_{fy}$  et  $l_{fz}$  pour déterminer les conditions de flambement dans les deux directions.

13 - 4 Contrainte critique d'Euler

A la force critique d'Euler  $N_c$  correspond une **contrainte critique**, qui peut prendre le nom de contrainte critique limite ou admissible, donnant un élément de sécurité vis-à-vis du flambement.

Pour une poutre comprimée de section  $S$ , la **contrainte critique**  $\sigma_c$  est définie par la relation :

$$\sigma_c = \frac{E \cdot I_{Gz \text{ ou } y} \cdot \pi^2}{l_f^2 \cdot S}$$

On sait que le **rayon de giration** est :  $i_{gz \text{ ou } y} = \sqrt{\frac{I_{Gz \text{ ou } y}}{S}}$

On définit l'**élancement** ( sans unité ) :  $\lambda_{gz \text{ ou } y} = \frac{l_{fz \text{ ou } y}}{i_{z \text{ ou } y}}$

La contrainte critique s'exprime alors sous la forme :

$$\sigma_c = \frac{E \cdot \pi^2}{\lambda^2}$$

Supposons que la poutre soit parfaitement rectiligne, que l'effort  $N$  soit centré et que le matériau soit parfaitement homogène. Soit  $\sigma = \frac{N}{S}$  la contrainte dans la poutre :

- si  $\sigma_c < \sigma_e$  (limite élastique) : il y aura ruine par flambement dès que  $\sigma$  atteindra la valeur  $\sigma_c$
- si  $\sigma_c > \sigma_e$  : la poutre périra par écrasement (ou compression simple sans flambement) dès que  $\sigma$  atteindra la valeur  $\sigma_e$ . Dans ce cas, il n'y a aucun risque de flambement. Le dimensionnement se fait en compression simple.

Attention : ce raisonnement n'est plus valable en flexion composée (si la poutre a un défaut de rectitude ou si  $N$  n'est pas bien centré,...). Le flambement surviendra dans ce cas avant que  $\sigma$  n'atteigne  $\sigma_c$ .

La relation (1) fait apparaître la notion d'élanement critique (pour  $\sigma_c < \sigma_e$ ), à partir duquel la poutre devra être calculée au flambement :

$$\lambda_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}}$$

Notons que cette valeur de l'élanement critique ne dépend que des caractéristiques mécaniques du matériau

### 13 - 5 Dimensionnement et vérification des sections

Les conditions réelles de liaisons sont différentes des modèles théoriques et varient selon les matériaux ; c'est pourquoi les différents règlements de calcul (acier, bois, béton armé, béton précontraint) adaptent la théorie d'Euler à ses particularités pour chaque matériau