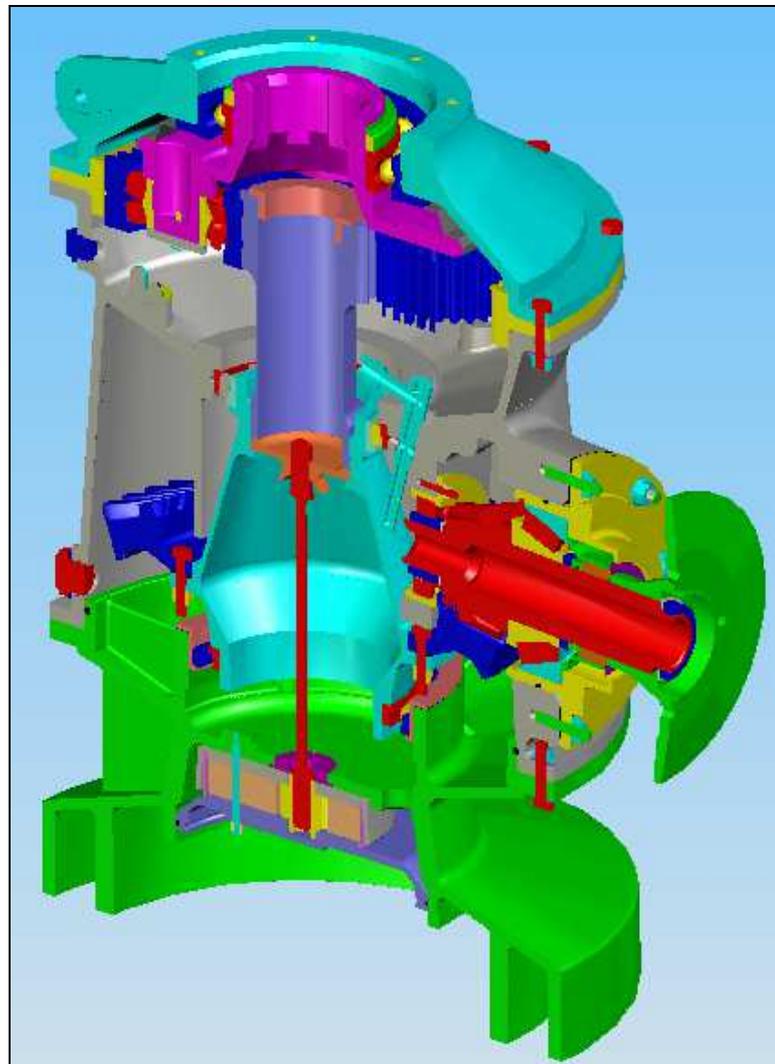


CAO et Dimensionnement des Structures



I- Introduction

La mise au point et la réalisation de mécanisme technologique amène le concepteur à définir les pièces intervenant dans cette réalisation et plus particulièrement, les mouvements relatifs entre pièces. Pour assurer ces mouvements, le concepteur définit « les liaisons » entre pièces, il le modélise.

Pourquoi modéliser ?

Pour trouver une réponse à une question technologique (valider un critère du CdCF, dimensionner une pièce, ...), la complexité du réel nous contraint à effectuer des hypothèses simplificatrices. La modélisation permet, par des approximations plus ou moins grandes (les hypothèses), de faire entrer le réel dans le domaine de validité d'une théorie de calcul. (par exemple : la mécanique du solide indéformable : statique, cinématique, dynamique, RDM)

Une fois le modèle choisi, *le concepteur doit faire le choix technologique des liaisons.*

De façon générale une liaison est caractérisée par un (ou des) degrés de mobilité. Elle transmet donc un mouvement. Mais pour transmettre correctement ce mouvement, il faut interdire les autres.

Donc la liaison doit tout en facilitant une (ou des) mobilité(s), interdire les autres. Il faut donc déterminer les paramètres cinématiques de la liaison ainsi que les efforts encaissés.

Une fois les efforts connus, ils vont nous permettre de dimensionner les différentes pièces composant la liaison.

Comme les liaisons sont composées de surfaces en contact, le dimensionnement revient à définir le contact entre les solides.

On peut constater que l'étude du contact entre solides est très complexe car elle fait intervenir un grand nombre de paramètres.

Le concepteur a donc recours à des modèles souvent simplifiés qu'il faudra valider par l'expérience.

II- Rappels de modélisation

1- Les Schémas

Le schéma est une représentation graphique simplifiée, ou limitée, en éliminant tout détail inutile dans un but défini (étude comparative de solutions, étude mécanique, ...).

Il existe différents types de schémas permettant un passage progressif de l'idée au projet à l'aide d'une représentation symbolique des composants constitutifs du produit.

| Schéma technologique |
|---|
| Il décrit les solutions adoptées en termes d'agencement des principaux composants du produit. |

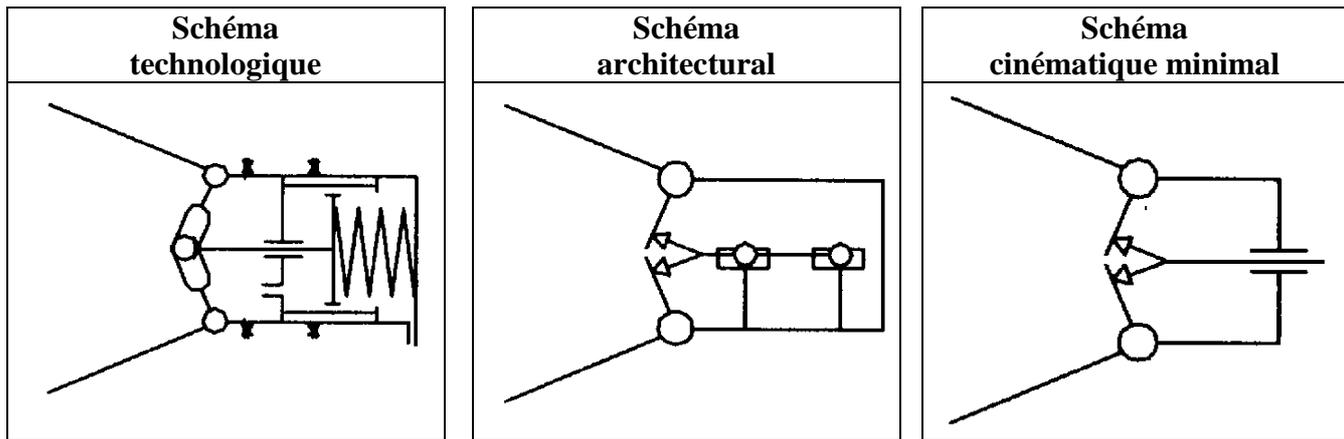
| Schéma architectural |
|---|
| Il met en évidence la position relative des différentes liaisons élémentaires entre les ensembles cinématiquement liés d'un mécanisme. |

| Schéma cinématique minimal |
|---|
| Il met en évidence les mouvements relatifs entre les ensembles cinématiquement liés d'un mécanisme. |

Exemple : Pince AUTOMAX

| | | | | |
|-------------|----------|----------------------------------|--------------|---------------------------|
| 20 | 4 | Vis CHC M5 | | |
| 19 | 2 | Vis HC M3 | | |
| 18 | 2 | Bague | | |
| 17 | 1 | Joint à 4 lobes | | |
| 16 | 1 | Bague amortisseur | Polyuréthane | |
| 15 | 1 | Piston | CuZn39Pb2 | |
| 14 | 1 | Joint à 4 lobes | | |
| 13 | 1 | Bague amortisseur | Polyuréthane | |
| 12 | 1 | Vis M6 | | |
| 11 | 1 | Ressort de rappel | 55S7 | Chromatage noir |
| 10 | 1 | Cylindre | AU4G | |
| 9 | 1 | Joint à 4 lobes | | |
| 8 | 2 | Axe d'articulation | C45 | Chromé dur |
| 7 | 1 | Axe | C45 | Oxydation anodique |
| 6 | 2 | Doigt | Acier S55 | Induction haute fréquence |
| 5 | 2 | Plaque guide | S100P6 | |
| 4 | 1 | Tige | C45 | Chromé dur |
| 3 | 1 | Flasque avant | AU4G | Oxydation anodique |
| 2 | 1 | Corps | AU4G | Oxydation anodique |
| 1 | 1 | Flasque arrière | AU4G | Oxydation anodique |
| Rep/Nbr | | Désignation | Matière | Observations |
| Echelle | 1/1 | PINCE AUTOMAX HCRA32P | | |
| Mise à jour | | | | |
| Date | 11/12/96 | | | |

Pour des raisons de lisibilité la cotation fonctionnelle du dessin d'ensemble est incomplète.



2- Le schéma architectural

Ce mode de représentation met en évidence la nature du contact et les positions relatives des différentes liaisons élémentaires qui composent les différentes liaisons.

Il permet de définir les torseurs d'action mécanique des différents éléments de liaison et donc de les dimensionner.

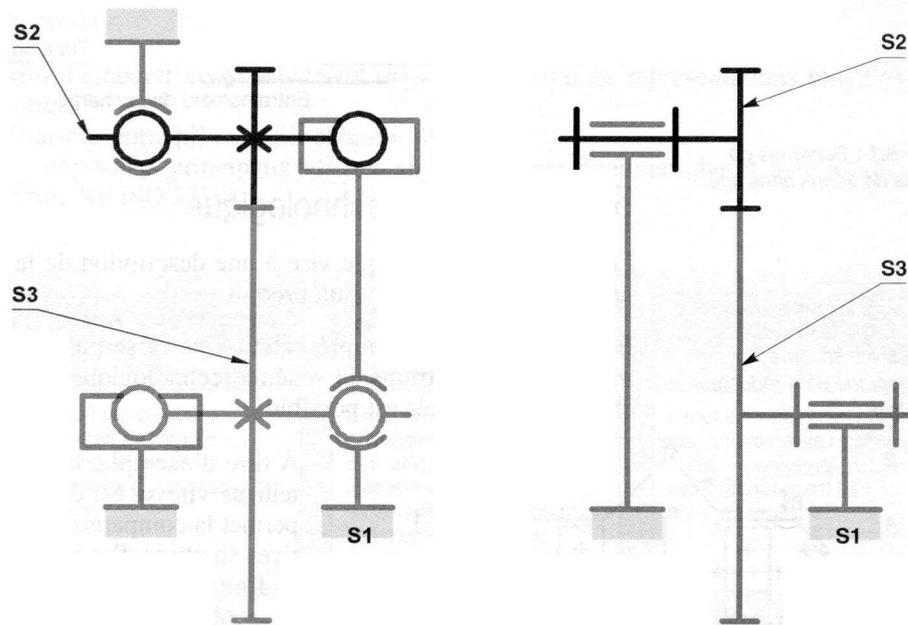


Schéma architectural d'un réducteur de vitesse

Schéma cinématique minimal d'un réducteur de vitesse

3- Représentation symbolique des liaisons

| Degrés de liberté | Nom de la liaison | Mouvements relatifs autorisés | Schématisation | |
|-------------------|------------------------------|-------------------------------|----------------|-------------|
| | | | Projection | Perspective |
| 0 | Encastrement ou liaison fixe | 0R et 0T | | |
| 1 | Pivot | 1R et 0T | | |
| 1 | Glissière | 0R et 1T | | |
| 1 | Hélicoïdale | 1R et 1T conjuguées | | |
| 2 | Pivot glissant | 1R et 1T de même axe | | |
| 2 | Sphérique à doigt | 2R et 0T | | |
| 3 | Rotule | 3R et 0T | | |
| 3 | Appui plan | 1R et 2T | | |
| 4 | Linéaire rectiligne | 2R et 2T | | |
| 4 | Linéaire annulaire | 3R et 1T | | |
| 5 | Ponctuelle ou sphère-plan | 3R et 2T | | |

III- Théorie du contact entre solides

1- Actions de contact

1.1- Problèmes posés par le contact entre deux solides

Dans un mécanisme la transmission des efforts se fait par les surfaces de contact au niveau des liaisons. Un des problèmes essentiels du concepteur est de les dimensionner correctement.

L'étude des contacts entre les solides qui composent un mécanisme est délicate à mettre en œuvre car on maîtrise difficilement tous les paramètres :

- forme et état des surfaces en contact ;
- vitesse relative des surfaces en contact ;
- conditions de lubrification ;
- température ;
- répartition des pressions de contact ;
- ...

Naturellement devant autant de paramètres on va devoir modéliser. Dans cette modélisation, deux données vont être fondamentales : l'aire de contact et la pression de contact.

1.1.1- L'aire de contact

En pratique, elle est définie par l'aire de contact nominale, c'est à dire par la surface où les deux solides paraissent en contact. Le contact réel se faisant seulement sur le sommet des aspérités : les spots ; cette surface est réellement comprise entre $1/100^{\text{e}}$ et $1/10000^{\text{e}}$ de la surface nominale.

1.1.2- La pression de contact

La pression de contact engendre des contraintes et des déformations dans les solides au voisinage de leurs surfaces communes. Les contraintes ne doivent pas dépasser une certaine limite sinon elles entraîneraient des détériorations irréversibles (écaillages, écrouissage, jeu ...) néfastes au bon fonctionnement du mécanisme.

1.2- Etude des actions de contact

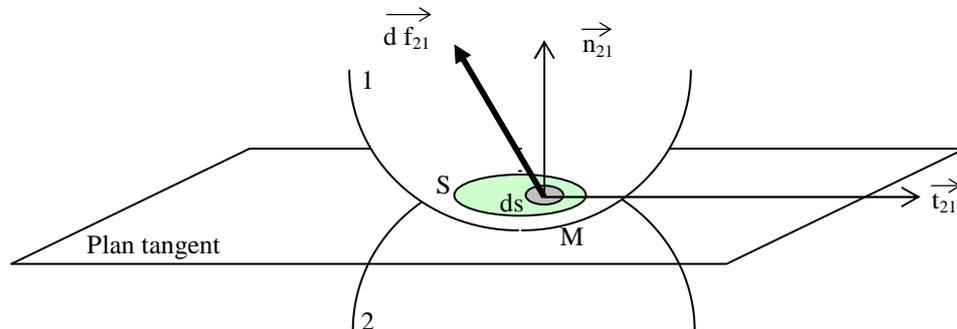
On appelle action de contact entre deux solides, l'action qu'ils exercent l'un sur l'autre au niveau de leur surface commune.

On distingue deux types de contact :

- le contact surfacique : dans le cas où le contact se fait suivant une surface nominale importante ;
- le contact dit linéique ou ponctuel : dans le cas où le contact se fait selon une petite surface nominale

1.2.1- Modélisation des actions de contact

Soit deux solides 1 et 2 en contact suivant une surface S :



\overrightarrow{df}_{21} représente la force élémentaire surfacique de 2 sur 1 correspondant à l'élément de surface ds .

Le torseur résultant de l'action de 2 sur 1 s'écrit en un point quelconque A :

$$\{T(2/1)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(2/1)} = \int_S \overrightarrow{df}_{21} \\ \overrightarrow{M}_A(2/1) = \int_S \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{df}_{21} \end{array} \right\}$$

1.2.2- Action de contact sans frottement

Dans le cas où le contact est supposé sans frottement, l'action élémentaire du solide 2 sur le solide 1 au point M s'écrit :

$$\overrightarrow{df}_{21} = (df_{21} \cdot \overrightarrow{n}_{21}) \overrightarrow{n}_{21}$$

Le torseur résultant de l'action de 2 sur 1 s'écrit donc ainsi en A :

$$\{T(2/1)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(2/1)} = \int_S (df_{21} \cdot \overrightarrow{n}_{21}) \overrightarrow{n}_{21} \\ \overrightarrow{M}_A(2/1) = \int_S \overrightarrow{AM} \times (df_{21} \cdot \overrightarrow{n}_{21}) \overrightarrow{n}_{21} \end{array} \right\}$$

1.2.3- Action de contact avec frottement

Dans le cas où le contact est supposé avec frottement, l'action élémentaire du solide 2 sur le solide 1 au point M s'écrit :

$$\overrightarrow{R(2/1)} = \int_S (df_n \cdot \overrightarrow{n_{21}} + df_t \cdot \overrightarrow{t_{21}})$$

Le torseur résultant de l'action de 2 sur 1 s'écrit donc ainsi en A :

$$\{T(2/1)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(2/1)} = \int_S (df_n \cdot \overrightarrow{n_{21}} + df_t \cdot \overrightarrow{t_{21}}) \\ \overrightarrow{M_A(2/1)} = \int_S \overrightarrow{AM} \times (df_n \cdot \overrightarrow{n_{21}} + df_t \cdot \overrightarrow{t_{21}}) \end{array} \right\}$$

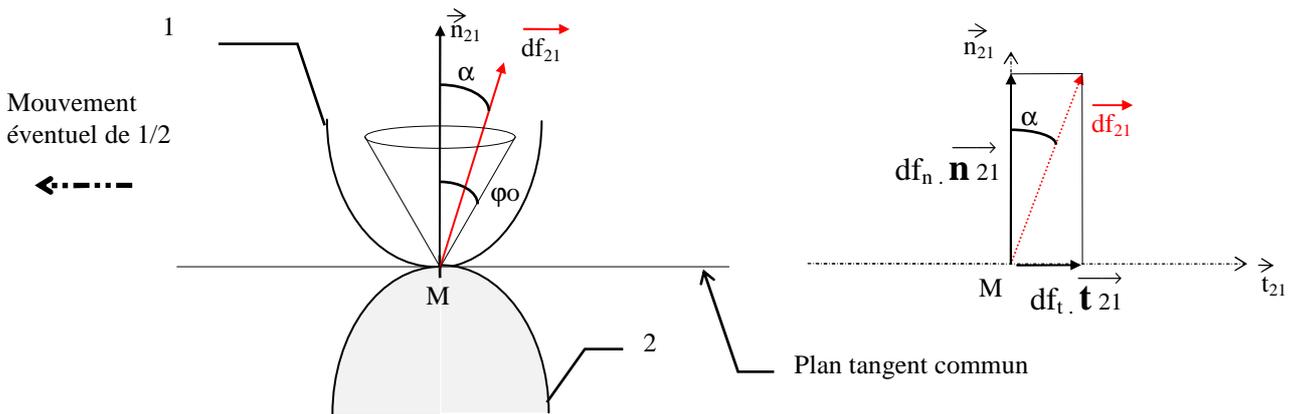
Lois du frottement (Lois de Coulomb)

Définitions :

1- En M, on dit qu'il y a adhérence s'il n'y a pas de mouvement relatif au point de contact entre 1 et 2 alors $\overrightarrow{V}_{M \in 1/2} = \overrightarrow{0}$

Dans ce cas, on a :

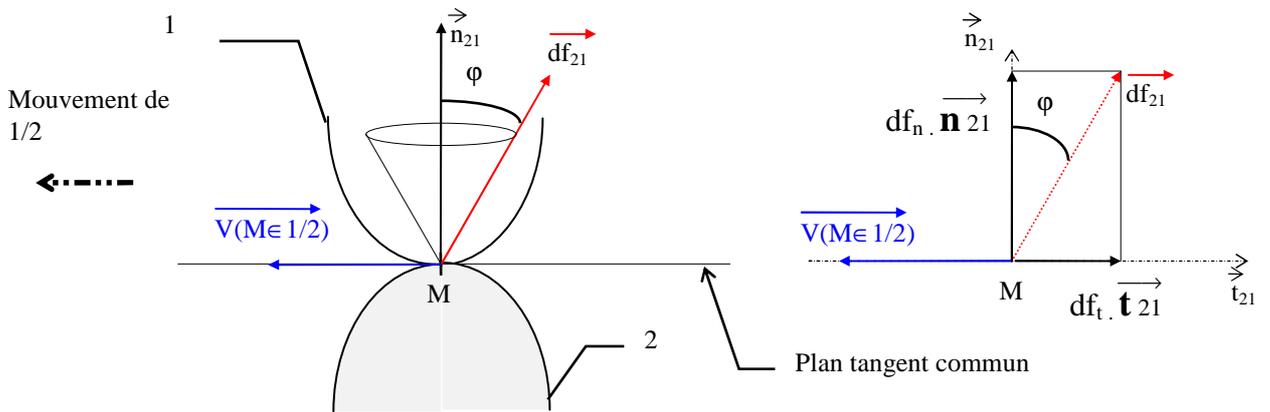
- * $df_t \cdot \overrightarrow{t_{21}}$ a même support que $\overrightarrow{V}_{M \in 1/2}$
 - $df_t \cdot \overrightarrow{t_{21}}$ a pour sens, le sens opposé de $\overrightarrow{V}_{M \in 1/2}$,
 - * $|df_t| \leq f_0 |df_n|$ et $f_0 = \tan \varphi_0$ c'est à dire que la résultante se trouve à l'intérieur du cône d'adhérence.
- ↖ angle d'adhérence



2- En M, on dit qu'il y a glissement si on a un mouvement relatif au point de contact entre 1 et 2
 alors $\vec{V}_{M \in 1/2} \neq \vec{0}$

Dans ce cas, on a :

- * $df_t \cdot \vec{t}_{21}$ a même support que $\vec{V}_{M \in 1/2}$
 - $df_t \cdot \vec{t}_{21}$ a pour sens, le sens opposé de $\vec{V}_{M \in 1/2}$,
 - * $|df_t| = f |df_n|$ et $f = \tan \varphi$ c'est à dire que la résultante se trouve sur le cône de frottement.
- ↖ angle de frottement



3- Remarque :

Pour étudier l'équilibre de deux solides à la limite du glissement, appelé aussi équilibre strict, on peut utiliser ces formules en remplaçant le coefficient de frottement f par le coefficient d'adhérence f_0 , ou en faisant l'approximation souvent suffisante $f = f_0$

Conclusion :

Pour pouvoir déterminer le plus précisément possible l'action de contact entre deux solides, il faut connaître :

- a- le coefficient de frottement ;
- b- la géométrie des surfaces en contact S et la loi de répartition de la pression de contact.

a- Le coefficient de frottement.

Pour deux solides en contact et en mouvement relatif, le frottement existe et entraîne une dissipation d'énergie.

Dans la majorité des cas, on cherche à diminuer au maximum l'énergie dissipée : cas des transmissions de mouvement dans les mécanismes.

Dans certains cas, le frottement est recherché : cas des liaisons complètes par adhérence et des transmissions de mouvement par adhérence.

Valeurs usuelles du coefficient de frottement et d'adhérence

| <i>Matériaux en contact</i> | f_0 | | f | |
|---|------------|-----------------|-------------|-----------------|
| | <i>sec</i> | <i>lubrifié</i> | <i>sec</i> | <i>lubrifié</i> |
| Acier cémenté trempé sur acier cémenté trempé | 0,2 à 0,3 | 0,15 à 0,2 | 0,2 | 0,12 |
| Acier cémenté trempé sur fonte trempée | 0,2 | 0,12 à 0,2 | 0,15 | 0,08 |
| Acier cémenté trempé sur bronze trempé | 0,2 | 0,15 à 0,20 | 0,25 | 0,12 |
| Acier inoxydable chromé sur aluminium | | | 0,4 | 0,1 |
| Acier sur cuivre étamé | | | 0,12 | 0,09 |
| Acier sur métal fritté | | 0,1 à 0,18 | 0,1 à 0,12 | 0,03 à 0,06 |
| Acier sur « férodo » | 0,3 à 0,4 | | 0,25 à 0,35 | |
| Acier sur graphite | | 0,1 | | 0,09 |
| Acier graphité sur téflon | | | 0,1 | 0,08 |
| Acier sur palier PTFE | 0,08 à 0,4 | | 0,02 à 0,08 | 0,003 à 0,05 |
| Acier sur polyéthylène | | | 0,3 à 0,8 | |
| Pneu neuf sur route | 1 | | 0,5 à 0,6 | 0,3 à 0,5 |

b- la géométrie des surfaces en contact S et la loi de répartition de la pression de contact.

Dans tous les mécanismes, la transmission des efforts se fait par l'intermédiaire des surfaces de liaison entre solides.

Quelle que soit la nature des surfaces en regard entre deux pièces, il est très difficile d'appréhender d'une part la surface réelle du contact, d'autre part la répartition des forces surfaciques sur cette surface.

Les modèles qui sont proposés sont donc relativement simples mais leur utilisation est contrainte par des hypothèses fondamentales que le concepteur se doit de maîtriser.

Ces modèles permettront d'estimer les contraintes de surface de manière à les comparer à des valeurs (pression conventionnelle de contact) déterminées empiriquement dans des cas similaires et dans certains cas de déterminer les contraintes au sein des matériaux.

L'objectif final reste pour le concepteur le dimensionnement des liaisons.

On distingue deux cas :

- **Le cas des contacts étroits : *théorie de Hertz.***
Contacts ponctuels et linéiques pour les applications dans les roulements, les engrenages, les cames, ...
- **Le cas des contacts larges :**
Contacts plans et cylindriques pour les applications dans le cas des clavettes, des freins, des paliers lisses, ...

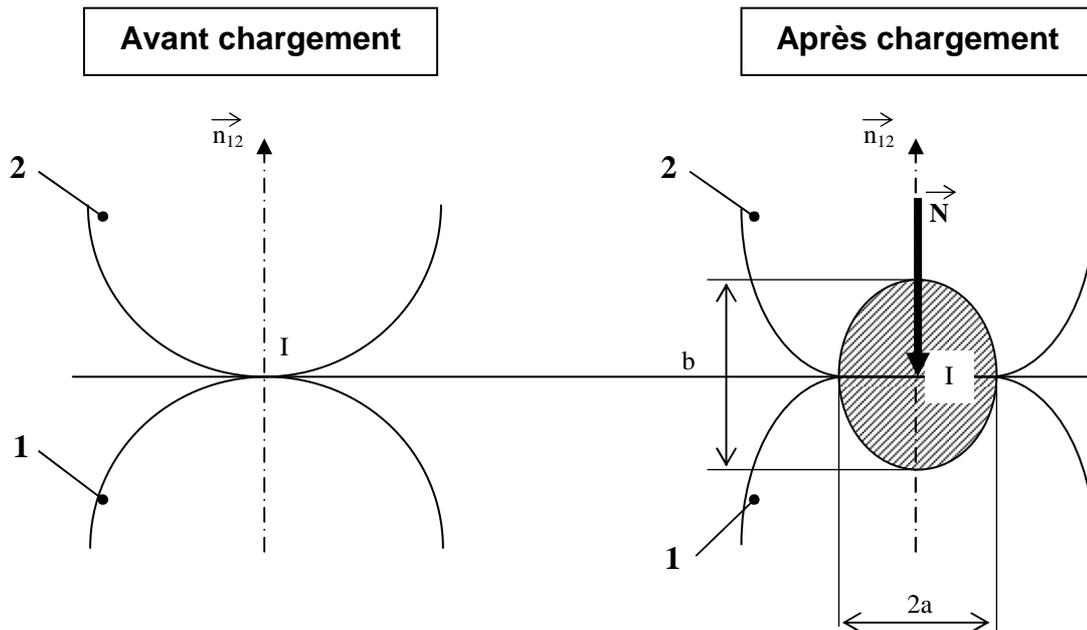
2.3- Théorie de HERTZ

Relation contraintes / déformations :

Si la déformation au niveau du point de contact I est connue, alors la théorie de l'élasticité permet de déterminer les contraintes.

Il existe une relation entre les déformations et les contraintes pour un matériau donné. Cette relation est fonction du module de Young E.

La répartition des contraintes sur la surface de déformation est maximale au centre I et s'annule à la frontière. Il en est de même pour la répartition des pressions de contact.



La pression de contact entre les deux pièces entraîne une déformation des surfaces de contact. Cette déformation est fonction de l'effort \vec{N} exercé, de la nature des matériaux et de la forme des surfaces de contact, c'est à dire les rayons de courbure r.

Pour les calculs on définit :

- Pour les matériaux composant les corps :
 E_1 et E_2 les modules d'élasticité longitudinale ;
 ν_1 et ν_2 les coefficients de poisson ;

$$\text{On note : } \frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} ; \quad E^* \text{ le module d'élasticité réduit.}$$

- Pour les surfaces de contact :
 R_1 et R_2 les rayons de courbures ;

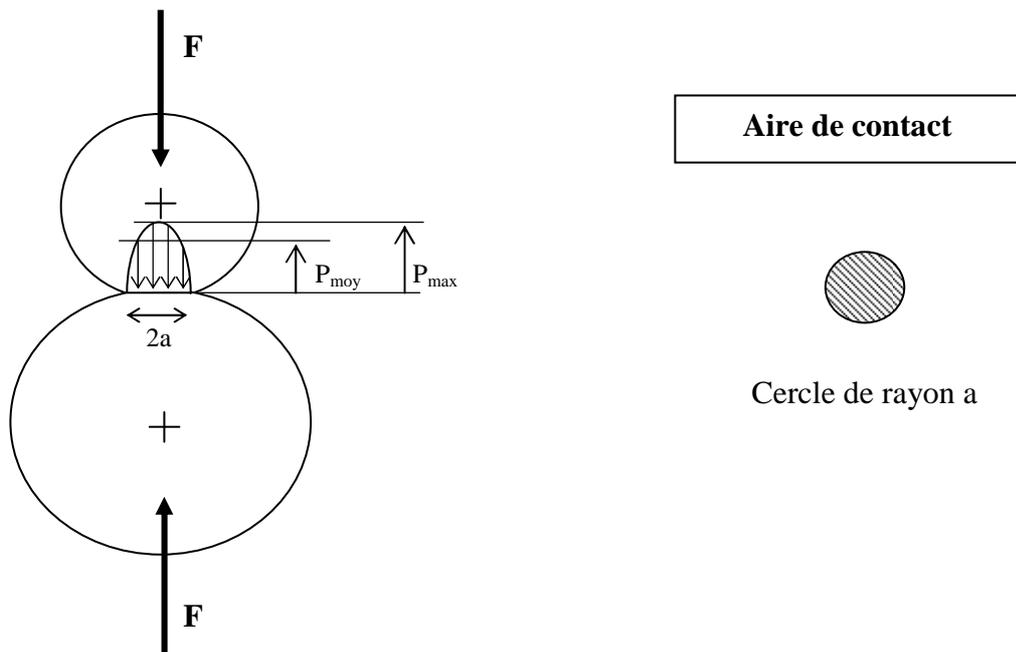
$$\text{On note : } \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} ; \quad \rho \text{ rayon de courbure réduit}$$

2.4- Contact ponctuel

On peut utiliser deux types de contacts :

2.4.1- Contact sphère / sphère.

- Forme des surfaces en contact : sphères de rayon R_1 et R_2
- Rayon de courbure réduit : $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.
- Pour une surface intérieure, le rayon de courbure R_1 ou $R_2 < 0$.



- La surface de contact est un cercle de rayon a :

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{F \cdot \rho}{E^*}}$$

Dans le cas très courant où pour les deux matériaux, $\nu = 0.3$ (aciers, bronze) :

$$a = 0,88 \cdot \sqrt[3]{\frac{F \cdot \rho}{E}} \text{ avec } \frac{1}{E} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}$$

□ Rapprochement de deux solides :

La contrainte (et donc la déformation) est localisée au voisinage du point de contact. Les solides se comportent donc globalement comme des corps rigides et on peut caractériser la déformation au contact par le rapprochement « dans la direction de la charge » de 2 points situés loin de la zone de contact.

$$\delta = \frac{a^2}{\rho}$$

□ Pression de contact :

La forme de la répartition des pressions le long de l'aire de contact est définie par un ellipsoïde, dont la surface plane du contact est plan de symétrie, la pression maximale p_{\max} aussi appelé pression de Hertz vaut :

$$p_{\max} = 1,5 \cdot p_{\text{moy}} = \frac{3 \cdot F}{2\pi \cdot a^2}$$

2.4.2- Contact sphère / plan.

- Forme des surfaces en contact : sphères de rayon R_1 et plan avec $R_2 = \infty$
- Rayon de courbure réduit : $\frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{R_1}$.

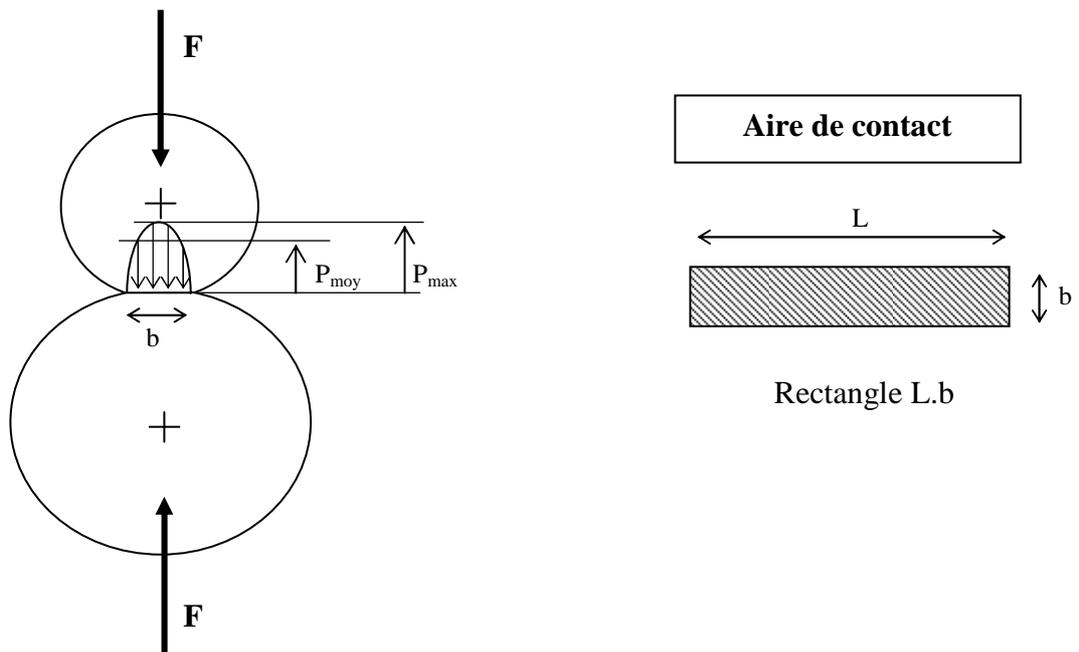
Les relations et la répartition des pressions sont analogues au contact sphère /sphère.

2.5- Contact linéique

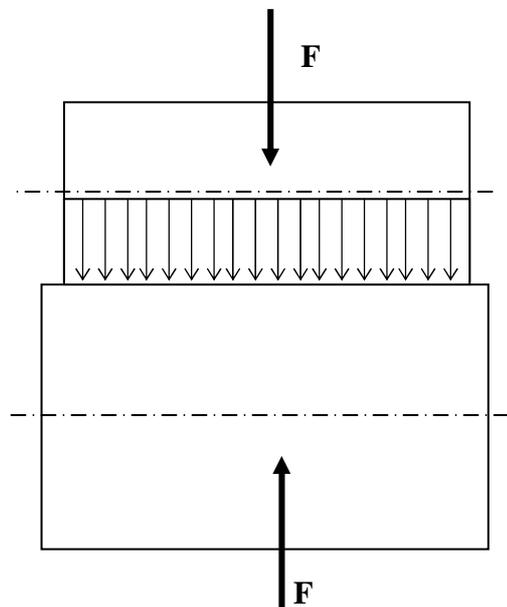
On peut utiliser deux types de contact :

2.5.1- Contact cylindre / cylindre.

- Forme des surfaces en contact : cylindre de rayon R_1 et R_2
- Rayon de courbure réduit : $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.
- Pour une surface intérieure, le rayon de courbure R_1 ou $R_2 < 0$.



On suppose une répartition uniforme de charge sur la longueur L du contact : $q = \frac{F}{L}$ charge linéique



- La surface de contact est un rectangle de largeur b :

$$b = 4 \cdot \sqrt{\frac{q \cdot \rho}{\pi \cdot E^*}}$$

Dans le cas très courant où pour les deux matériaux, $\nu = 0.3$ (aciers, bronze) :

$$b = 2,15 \cdot \sqrt{\frac{q \cdot \rho}{E}} \text{ avec } \frac{1}{E} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}$$

- Rapprochement de deux solides :

Pour ce type de contact, la théorie de Hertz ne donne aucune valeur.

A. Palmgrem donne des résultats assez proches de l'expérience :

$$\delta = 3,78 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{F^{0,9}}{L^{0,8}} \right)$$

- Pression de contact :

$$P_{\max} = \frac{4}{\pi} \cdot P_{\text{moy}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{F}{L \cdot b}$$

2.5.2- Contact cylindre / plan.

- Forme des surfaces en contact : sphères de rayon. R_1 et plan avec $R_2 = \infty$
- Rayon de courbure réduit : $\frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{R_1}$.

Les relations et la répartition des pressions sont analogues au contact cylindre / cylindre.

2.6- Contraintes engendrées

2.6.1- Contraintes de surface.

En surface, les contraintes normales sont égales à la pression de contact.

Pour dimensionner et choisir le matériau devant servir à réaliser les surfaces de contact, la première étape consiste à comparer la pression maximale à la pression admissible par le matériau.

$$p_{\max} \leq p_{\text{admissible}}$$

Cette pression admissible est limitée à :

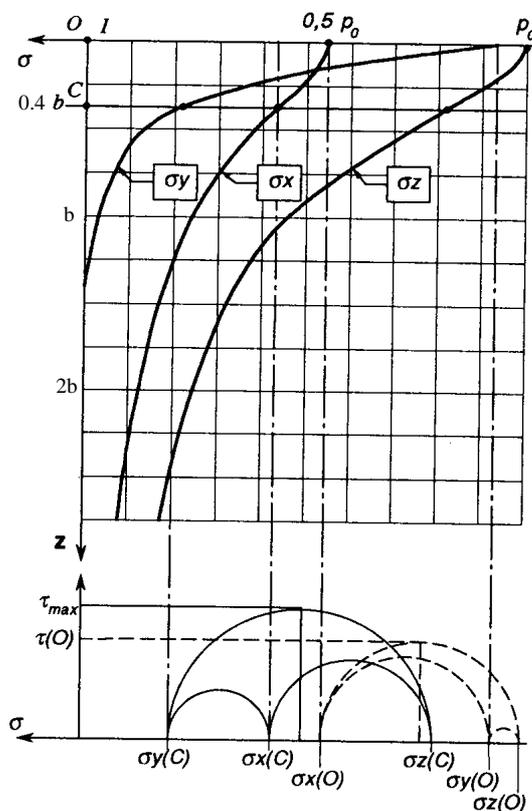
- 4200 MPa pour les roulements et butées à billes (contacts ponctuels) ;
- 4500 MPa pour les roulements à rotule (contact pseudo-linéique) ;
- 4000 MPa pour les roulements et butées à rouleaux (contact linéique).

Les valeurs obtenues sont très grandes et sont à considérer pour des charges purement statiques.

Mais souvent ce type de calcul s'avère insuffisant, parfois même, dangereux, *car la ruine des surfaces de contact a pour origine un écaillage provoqué par des contraintes de cisaillement au sein de la matière.*

2.6.2- Contraintes en profondeur.

Les lois de l'élasticité permettent de définir la variation des contraintes principales le long de la perpendiculaire en I au plan de contact.



La figure ci-contre représente la valeur de ces contraintes lorsqu'on descend dans la matière. On constate que leur évolution n'est pas parallèle. Leur différence prise deux à deux donne les valeurs des contraintes tangentielles, qui sont différentes selon le niveau auquel on se situe.

La figure ci-contre représente les tricerclés de Mohr associés à ces contraintes principales. Il permet de définir les contraintes de cisaillement à différentes profondeurs.

Ici τ_{\max} se situe à environ $0,4 b$ (au point C avec $z = IC = 0,4b$).

- Le tricerclé en pointillés correspond au niveau zéro (surface de contact).
- Le tricerclé en trait continu correspond à la profondeur où la différence entre les contraintes principales prises deux à deux est maximale, ici $\sigma_z - \sigma_y$.

Cette différence représente τ_{\max} :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{10} p_{\max} - \frac{2}{10} p_{\max} \right)$$

On obtient donc une contrainte de cisaillement maximale :

$$\tau_{\max} = 0,3 \cdot p_{\max}$$

En appliquant le critère de Tresca dans le cas courant des aciers, on obtient :

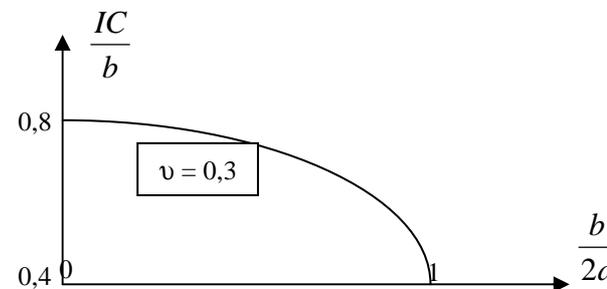
$$\tau_{\max} \leq \frac{\sigma_{adm}}{2} \rightarrow p_{\max} \leq 1,7 \cdot \sigma_{adm}$$

On peut ainsi choisir le matériau correspondant à ces caractéristiques.

On montre que la profondeur où se trouve la contrainte de cisaillement maximale dépend seulement de l'excentricité de l'ellipse de contact et du coefficient de Poisson.

Dans le cas des matériaux métalliques, le coefficient de Poisson ν est peu différent de 0,3.

La position du point C est représentée en fonction de l'excentricité $e = \frac{b}{2a}$ de la zone elliptique du contact.



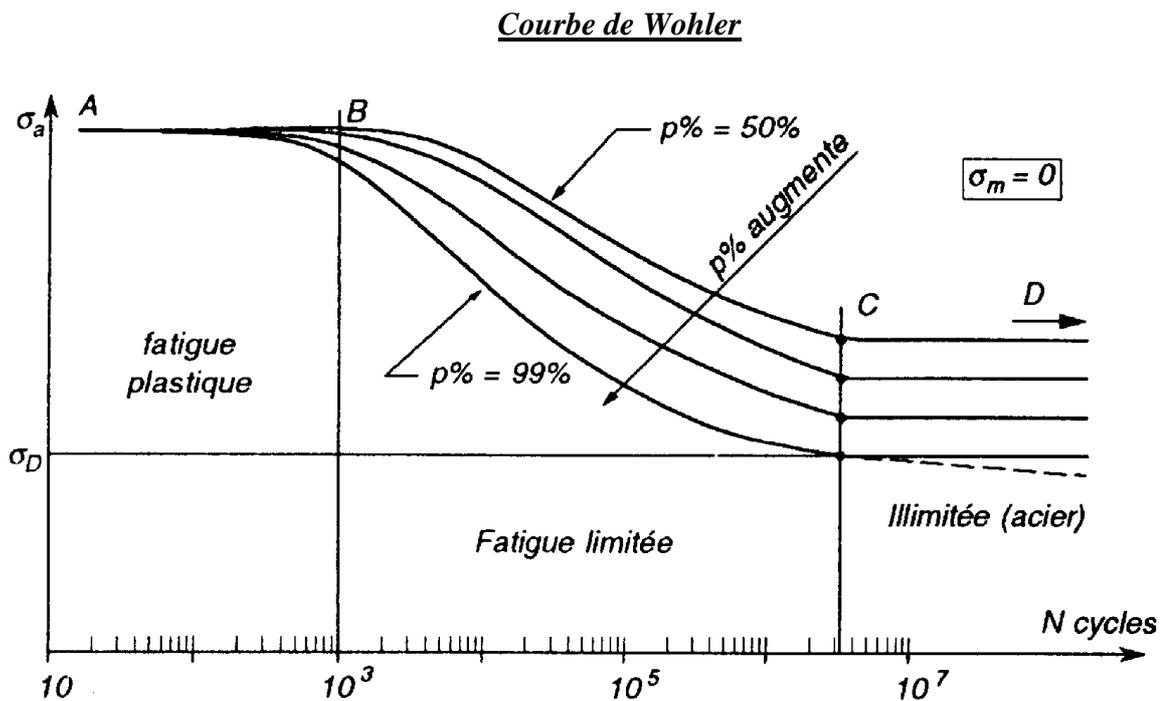
La valeur maximale de la contrainte de cisaillement est atteinte à une certaine profondeur de la surface de contact :

$z = 0,8 \cdot a$ cas d'un contact ponctuel (surface de contact : cercle de rayon a)

$z = 0,4 \cdot b$ cas d'un contact linéique (surface de contact : rectangle de coté b)

Un deuxième type de contrainte doit être pris en compte, il s'agit d'une contrainte de cisaillement alterné σ_a ; elle se traduit au sein de la matière par une détérioration par fatigue provoquant un arrachement en écailles.

La contrainte admissible en fatigue peut être caractérisée par les courbes de Wohler donnant, l'évolution de la contrainte admissible en fonction du nombre de cycles de fonctionnement et de la probabilité $p\%$ de survie.



Courbes de Wöhler pour différents $p\%$ de survie

On observe trois zones :

- **la zone de fatigue plastique** : elle est comprise entre les points A et B, pour un nombre de cycles inférieur à 10^3 . La rupture de la pièce survient après un petit nombre de cycles, avec une déformation plastique importante pour une amplitude de contrainte voisine de la limite de rupture statique du matériau testé ;
- **la zone de fatigue limitée** : elle est comprise entre les points B et C. La rupture se produit pour un nombre de cycles d'autant plus élevé que l'amplitude de la contrainte est faible ;
- **le domaine d'endurance illimité** : cette partie comprise entre les points C et D ne s'applique qu'aux matériaux ferreux. Quand l'amplitude de la contrainte est en dessous d'un certain seuil, la rupture ne se produit plus par fatigue quel que soit le nombre de cycles.

2.7- Conclusions

Les liaisons réalisées à partir de contacts ponctuels ou linéiques sont utiles dans les mécanismes lorsque l'on cherche un modèle isostatique. Malheureusement, elles ne permettent pas de transmettre des efforts importants.

Souvent on est obligé de les remplacer par des liaisons à contact surfacique associées en série.

Néanmoins lorsqu'elles sont utilisées, la conception de ce type de liaisons résulte souvent d'un compromis entre :

- Une diminution de l'énergie dissipée par frottement, ce qui revient à diminuer l'aire de contact.
- Une diminution de la pression maximale (à charge égale), ce qui revient à augmenter l'aire de contact.

Dans la pratique, on privilégie la diminution de l'énergie dissipée par frottement en optant pour des surfaces ayant une dureté superficielle élevée (traitement thermique).

Dans ce cas l'aire de contact est bien sûr petite et la pression maximale plus grande.

On devra donc déterminer la contrainte de cisaillement maximale pour vérifier qu'elle ne dépasse en aucun point un certain seuil défini à partir du critère de Tresca.

D'autre part, il faudra également définir la profondeur où se trouve cette contrainte maximale afin que ce point se trouve largement noyé dans la couche de matière traitée. Ceci pour éviter de superposer les contraintes résiduelles, dues au traitement thermique, entre la couche traitée et celle non traitée avec des contraintes tangentielles.

Généralement, les traitements de surfaces sont réalisés à deux fois la profondeur critique.

3- Contact large

3.1- Introduction

Lorsque l'étendue de la surface devient importante le contact se fait de manière aléatoire sur les aspérités des pièces.

Le concepteur utilise dans ce cas plusieurs modèles simples. La validation des résultats se fait souvent en laboratoire à partir d'essais.

3.2- Modèles de répartition et critères

3.2.1- Répartition de pression.

Pour définir précisément la pression maximale au contact entre les deux solides, il faudrait connaître la répartition exacte des forces surfaciques élémentaires sur les surfaces réelles de contact. Or ceci est impossible.

On met en place deux modèles couramment utilisés :

- Premier modèle : *Pression uniforme*

Hypothèses :

- Géométrie parfaite des surfaces de contact (pas de défaut macro et micro-géométrique) ;
- Indéformabilité des solides ;
- Liaisons sans jeu ;
- Un mode de chargement qui donne un glisseur résultant parfaitement centré.

Ce modèle suppose que la répartition de pression de contact est uniforme sur toute la surface de contact.

$$p(M) = p_0 = cst$$

- Deuxième modèle : *Pression fonction de la déformation*

Hypothèses :

- Géométrie parfaite des surfaces de contact, de formes simples pour en rendre la définition et l'usinage aisés.
- Indéformabilité globale des solides, seules les surfaces de contact se déforment ;
- Liaisons sans jeu ;

Ce modèle suppose que l'un ou les deux solides se déforment et qu'il y a une relation entre la déformation $\delta(M)$ en un point de la surface de contact et la pression $p(M)$ en ce même point :

$$p(M) = K \cdot \delta(M)^\alpha$$

avec K : coefficient lié à la rigidité des matériaux en contact ;
 α : indice de comportement des matériaux en contact
 $\alpha = 1$ pour les matériaux métalliques ;
 $\alpha > 1$ pour les matériaux plastiques.

3.2.2- Critère statique.

Ce critère nous permet de comparer la pression maximale au contact à une pression admissible trouvée expérimentalement que l'on associe à la pression conventionnelle de matage

$$p_{\max} \leq p_{adm}$$

Valeurs de pressions admissibles

Le tableau ci-dessous donne les pressions limites tolérables (ou admissibles) entre deux pièces immobiles ou en mouvement dans des conditions d'utilisation déterminées.

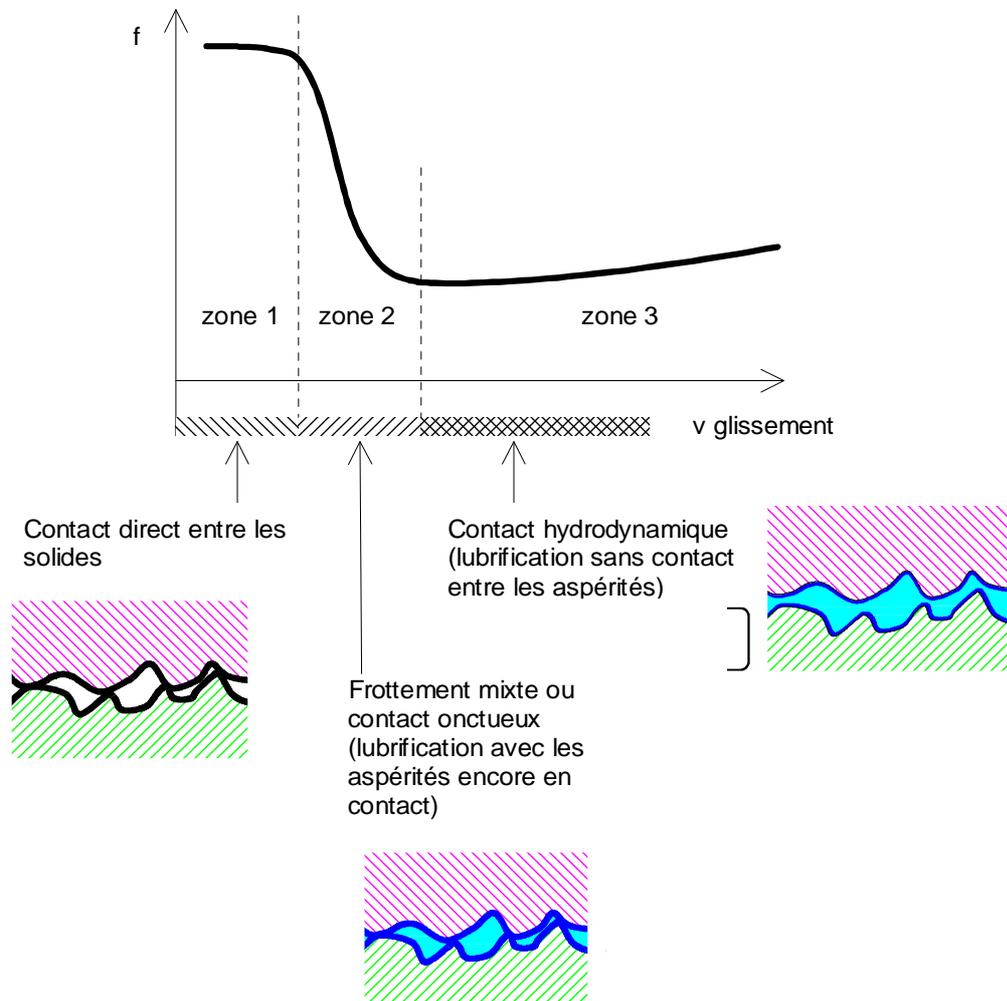
| Contact entre pièces fixes | Pression admissible (en MPa) |
|--|---------------------------------|
| Sur acier ou fonte sans matage | 80 à 100 |
| Sur acier ou fonte avec un léger matage (ou sur béton) | 200 à 250 |
| Contact entre filets (ex : vis d'assemblage) | 15 à 30 |
| Contact entre pièces mobiles | Pression admissible (en MPa) |
| Contact entre filets (mobiles en fonctionnement) | 2 à 6 |
| Articulation en porte à faux | 0.5 à 8 |
| Articulations en chape (ou fourchette) | 1 à 25 |
| Paliers rigides avec flexion de l'arbre ; acier / fonte | 1 à 1.5 |
| Paliers à rotule, acier sur bronze à graissage intermittent | 1.5 à 2.5 |
| Palier acier trempé / bronze. Lubrification sur film d'huile | 2.5 à 4 |
| Paliers rectifiés de bielles ; graissage normal ou sans pression | 6 à 9 ou 9 à 15 |
| Paliers de moteur (automobile, aviation) ; rotules de coussinets | 10 à 25 |

3.2.3- Critère dynamique

Le deuxième critère couramment utilisé est lié à la capacité de dissipation d'énergie au niveau du contact.

La rigidité plus ou moins élevée des corps en contact conduit à limiter la pression de contact afin de limiter les déformations de la liaison et donc les problèmes de battement des pièces guidées. De plus, le matage des surfaces limite la pression de contact maximale p_{max} .

La vitesse de glissement V_{lim} , et par suite la fréquence de rotation dans le cas des guidages en rotation est limitée par les problèmes d'écoulement du film d'huile assurant la lubrification. En effet pour de grandes vitesses de glissement le taux de cisaillement augmente et cette dissipation visqueuse conduit à un échauffement excessif du lubrifiant.



Par conséquent :

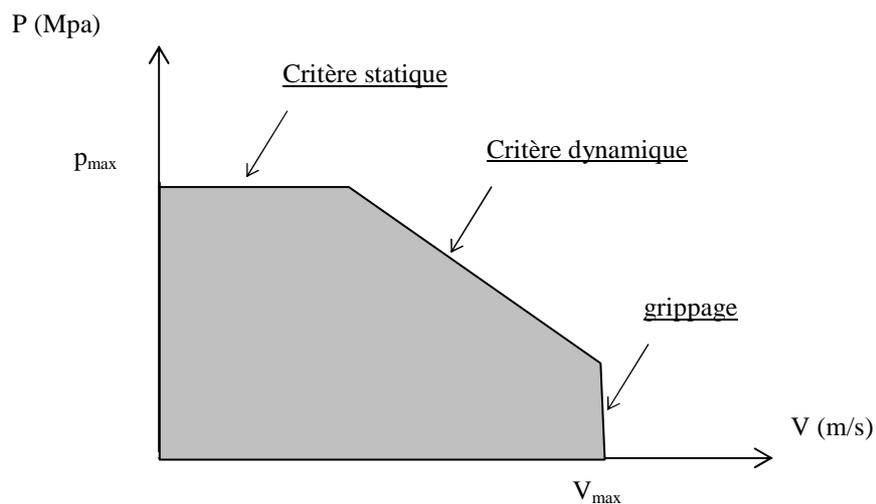
La puissance dissipée est donc proportionnelle à la vitesse relative, à la pression de contact et au coefficient de frottement f .

La capacité du matériau à absorber cette puissance dissipée limite, le produit $(p.V)_{\max}$.

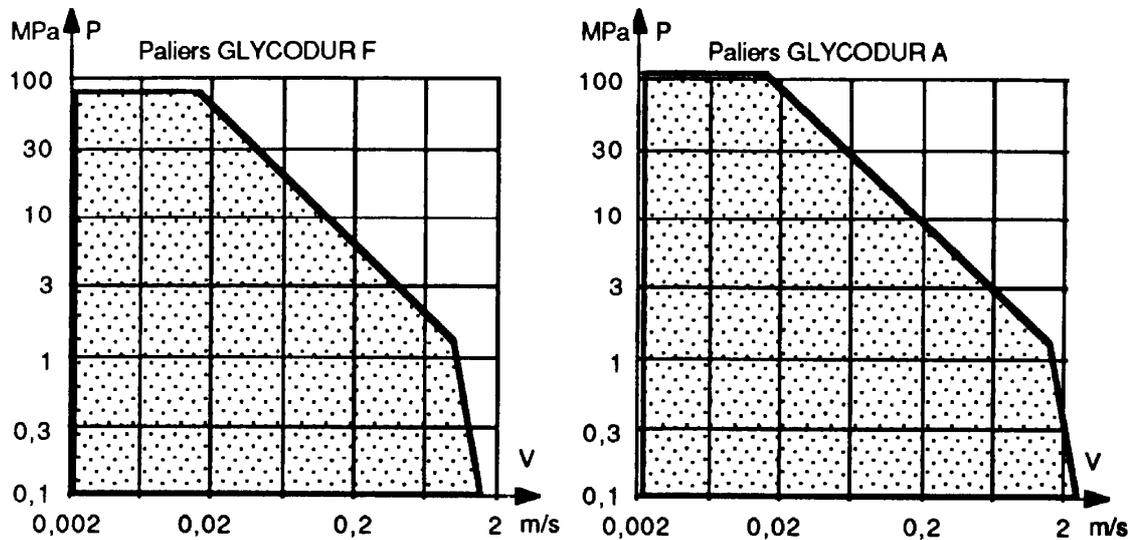
Le grippage est directement dépendant du niveau de la pression de contact et de l'élévation de température à l'interface de contact.

Les fabricants de composants mécaniques globalisent souvent ces critères par la donnée de courbes ou de valeurs numériques admissibles.

Description d'une courbe PV



Exemple de courbes et de valeurs admissibles

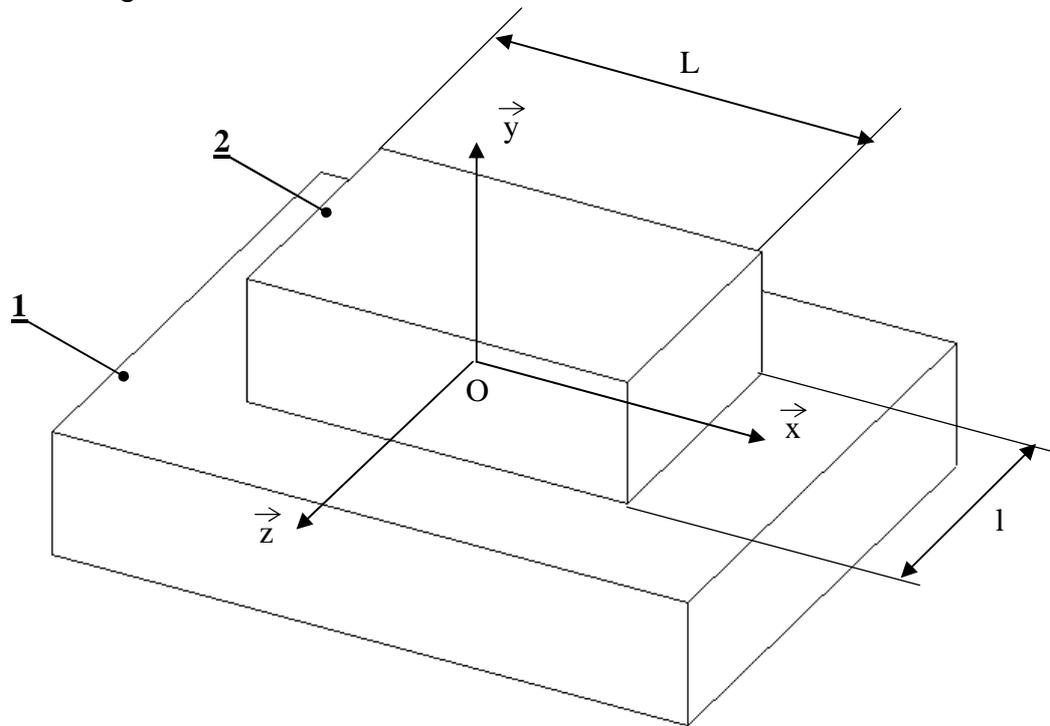


Zone d'utilisation des paliers GLYCODUR

| Matière unités | Dureté arbre | Pression MPa | pV Mpa m/s | Tempé- rature °C | Jeu mm | Dilata- tion $10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ | Epais- seur mm |
|-----------------------|-----------------|-----------------|---------------|------------------------|-----------------|---|----------------------|
| Antifriction | 120 | 8 | 40 | 100 | d/1000 | 23 | 6 |
| | 150 | 14 | 50 | 150 | d/2000 | 23 | 0,8 |
| Bronzes | 200 | 3 | 35 | 200 | 0,04+ | 18 | 2,5 |
| | 500 | 100 | 35 | 250 | d/1000 | 18 | 2,5 |
| Laiton | 600 | 10 | 40 | 250 | id | 17 | 1 |
| | 130 | 8 | 30 | 250 | id | 17 | 1 |
| Aluminium et étain | 280 | 40 | 65 | 120 | d/700 | 24 | 4 |
| | 450 | 70 | 65 | 160 | d/1000 | 24 | 0,8 |
| Fonte | 150 | 1 | 2 | | 0,02+ d/1000 | 10,3 | 3,5 |
| Acier | chromé 700 | 2 | 1,5 | | 0,02+ d/1000 | 11 | 2 |
| | | 8 | 15 | 11 | | 2 | |
| Caoutchouc | chromé | 0,3 | 3 | 60 | 0,4 | 78 | 6 |

3.3- Contact plan

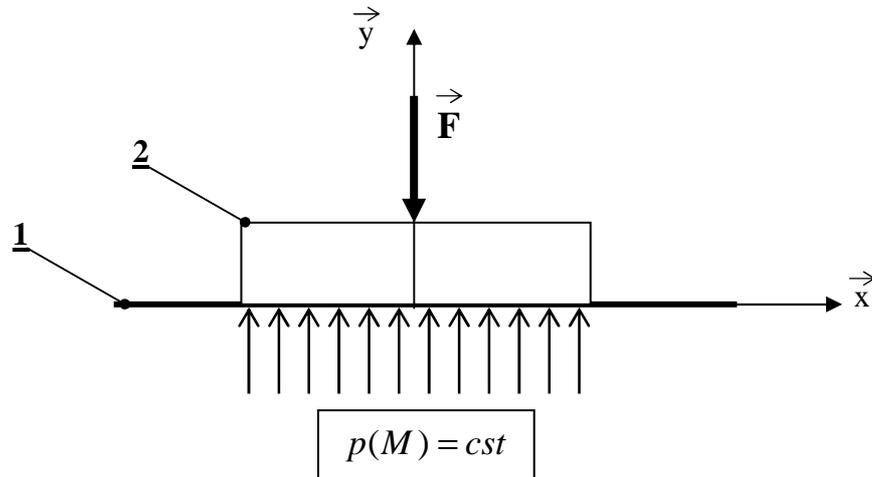
3.3.1- Paramétrage.



Deux solides sont en contact plan lorsque leur surface commune théorique de contact se réduit à une portion de plan, c'est le cas par exemple des disques d'embrayages, des assemblages par clavette ...

$$\text{Torseur transmissible : } \{T(2/1)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$$

Nous avons vu que pour appliquer les critères statiques et dynamiques, il nous faut connaître la répartition de pression de contact et en particulier la pression théorique maximale.

3.3.2- Premier modèle : *Pression uniforme*

L'action mécanique \vec{F} sur le solide 2 est un glisseur porté par (O, \vec{y}) .

Pour déterminer la pression de contact entre le solide 1 et le solide 2, on isole le solide 2 :

L'équilibre de 2 nous donne :

$$\vec{F} + \int_S p(M) \cdot \vec{y} \cdot ds = \vec{0}$$

Or la pression est constante sur la surface S, donc on peut écrire en projection sur l'axe (O, \vec{y}) :

$$-F + p(M) \cdot S = 0$$

DONC :

$$p(M) = \frac{F}{l \times L} ; \text{ unité : MPa}$$

3.3.3- Deuxième modèle : *Pression fonction de la déformation*

On suppose la répartition de la pression suivante :

$p(M) = a \cdot x + b \cdot z + c$; fonction de la position du point M $(x, 0, z)$ dans le plan (O, \vec{x}, \vec{z})

Hypothèses :

- Contrairement au premier modèle, la charge n'est plus centrée, elle est positionnée au point A de coordonnées $(x_A, 0, z_A)$ par rapport au point O centre de la surface.
- Les deux surfaces S en contact entre les solides 1 et 2 sont parfaites et restent planes pendant la déformation élastique due aux efforts de contact.

A partir de l'expression donnant $p(\mathbf{M})$, on peut déterminer la pression de contact en tout point de la surface, si l'on connaît la valeur et la position de l'effort presseur.

Dans le calcul du contact plan deux conditions restent à vérifier :

- *le non-décollement des surfaces de contact* : $p(\mathbf{M}) \geq 0$
- *la résistance de la surface à la pression de contact maximale* : $p_{\max} \leq p_{\text{admissible}}$
Cela revient à rechercher la pression de contact maximale et à la comparer à la pression admissible par les matériaux

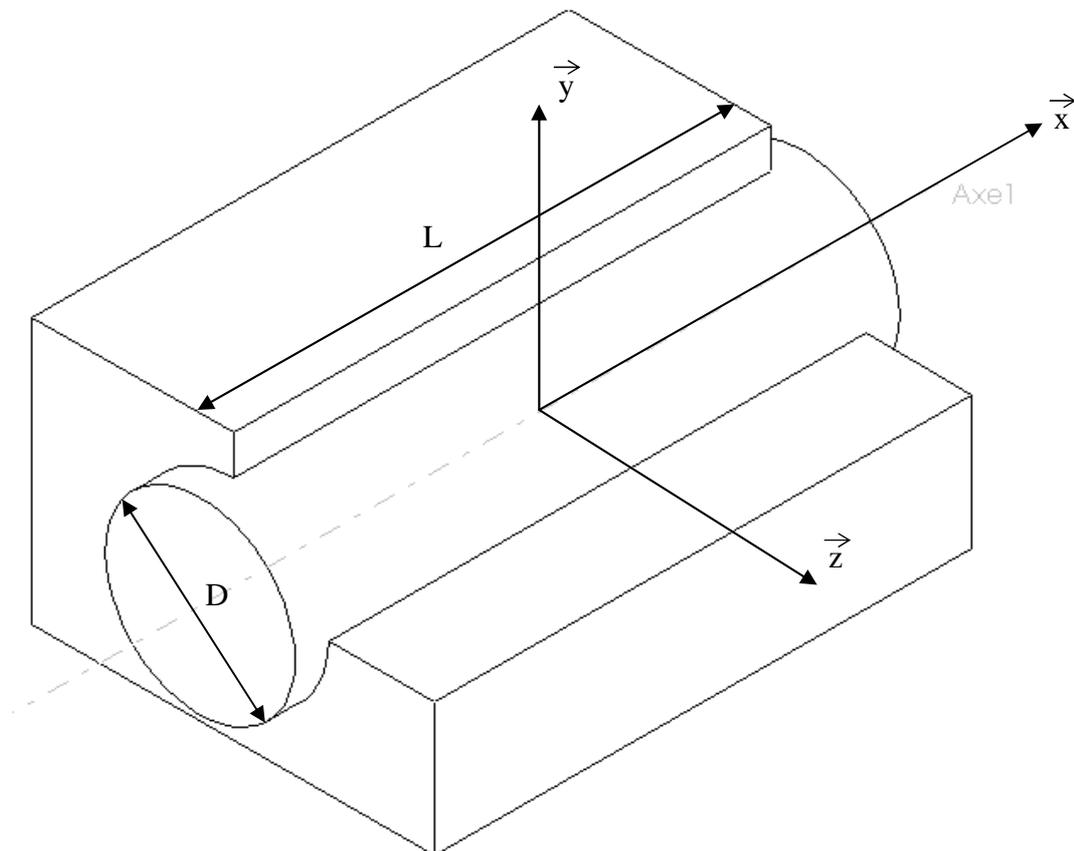
Exemple 1 : surface de contact plane rectangulaire.

Exemple 2 : surface de contact plane et circulaire.

Le concepteur devra chercher à obtenir dans la liaison une répartition de pression aussi uniforme que possible.

3.4- Contact cylindrique

3.4.1- Paramétrage.

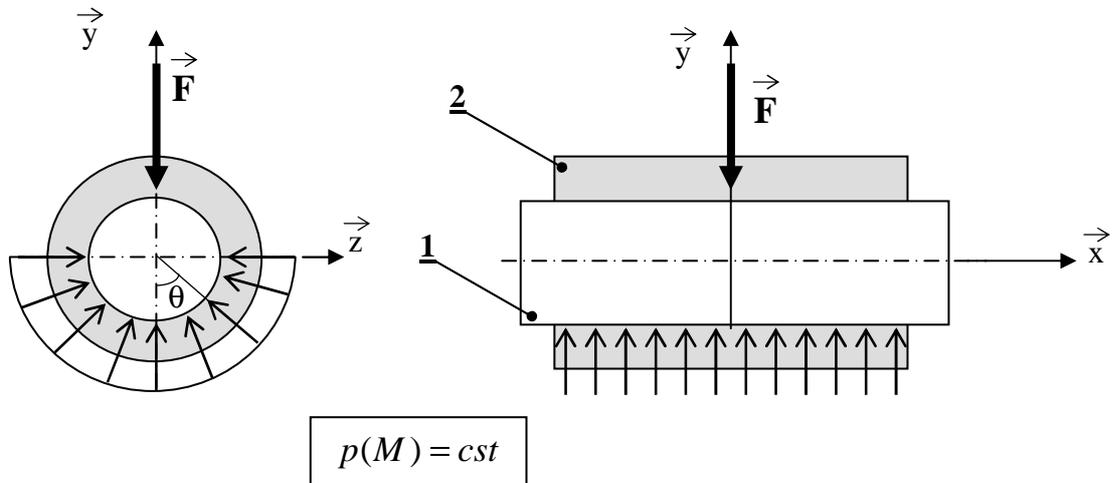


Deux solides sont en contact cylindrique lorsque leur surface commune théorique de contact se réduit à une portion de cylindre, c'est le cas par exemple des assemblages par goupilles, des paliers lisses ...

$$\text{Torseur transmissible : } \{T(2/1)\}_o = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

Nous avons vu que pour appliquer les critères statiques et dynamiques, il nous faut connaître la répartition de pression de contact et en particulier la pression théorique maximale.

3.4.2- Premier modèle : *Pression uniforme*



L'action mécanique \vec{F} sur le solide 2 est un glisseur porté par (O, \vec{y}) .

Pour déterminer la pression de contact entre le solide 1 et le solide 2, on isole le solide 2 :

L'équilibre de 2 en projection sur (O, \vec{y}) nous donne :

$$-F + \int_s p(M) \cdot \cos \theta \cdot ds = 0$$

avec ds élément de surface, $ds = \frac{D}{2} \cdot L \cdot d\theta$, pour θ compris entre $[-\pi/2 ; \pi/2]$, on obtient :

$$F = P \cdot D \cdot L$$

L'équilibre de 2 en projection sur (O, \vec{z}) nous donne :

$$\int_s p(M) \cdot \sin \theta \cdot ds = 0$$

DONC :

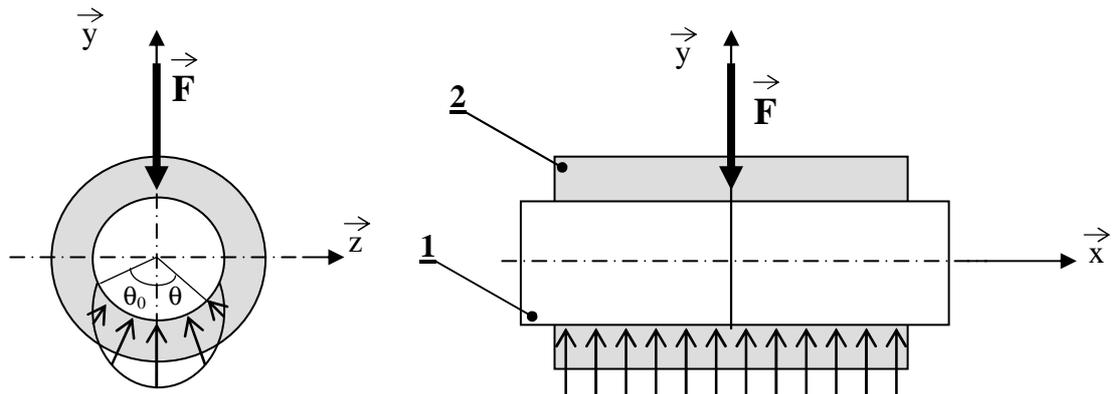
$$p(M) = \frac{F}{D \times L} ; \text{ unité : MPa}$$

3.4.3- Deuxième modèle : *Pression fonction de la déformation*

On suppose que la répartition de pression longitudinale est uniforme (l'axe de l'arbre et de l'alésage reste parallèle), on fait l'hypothèse que la répartition de pression est proportionnelle à la déformation.

Hypothèses :

- Le modèle de chargement est un glisseur centré sur la liaison.
- Contact sans frottement.



La déformation en un point s'écrit : $\delta(M) = j \cdot \left(\frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{\cos \theta_0} \right)$; avec j : jeu dans la liaison

La déformation maximale vaut : $\delta_{\max} = j \cdot \left(\frac{1 - \cos \theta_0}{\cos \theta_0} \right)$

Or $p(M) = K \cdot \delta(M)$ et $p_{\max} = K \cdot \delta_{\max}$ donc $p(M) = p_{\max} \cdot \frac{\delta(M)}{\delta_{\max}}$

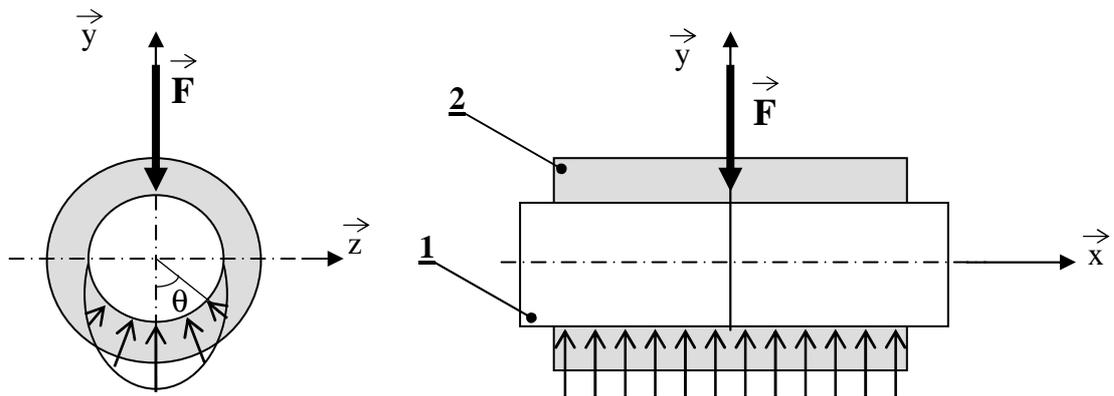
D'où la répartition de pression :

$$p(M) = p_{\max} \cdot \left(\frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{1 - \cos \theta_0} \right)$$

On peut alors obtenir par intégration la valeur de la charge en fonction de la pression maximale de contact :

$$p_{\max} = \frac{4.F}{L.D} \cdot \frac{(1 - \cos \theta_0)}{(2\theta_0 - \sin \theta_0)}$$

Cas particulier où la liaison a un jeu négligeable



Dans ce cas particulier, on trouve une répartition de pression de la forme :

$$p(M) = p_{\max} \cdot \cos \theta$$

et une pression maximale de contact égale à :

$$p_{\max} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{F}{L \cdot D}$$

3.4.4- Comparaison des différents modèles

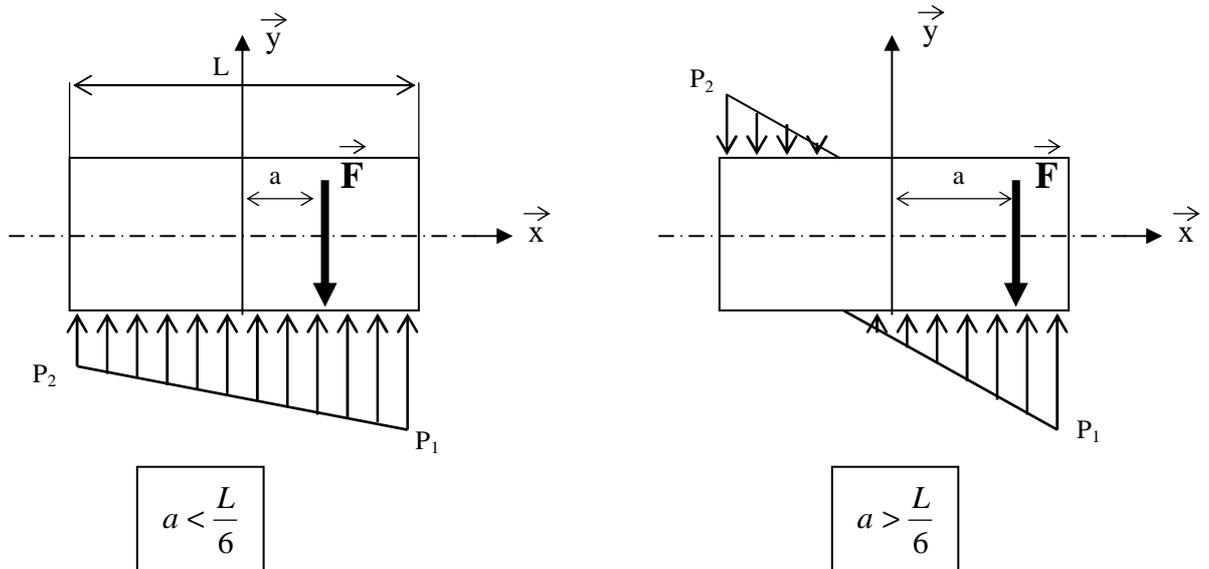
| Modèle | Répartition de pression |
|---|---|
| Pression constante | On suppose la liaison « sans jeu » avec une répartition radiale uniforme sur la surface latérale d'un demi-cylindre. |
| Pression fonction de la déformation – « sans jeu » | On suppose la liaison « sans jeu » avec une répartition radiale proportionnelle à la déformation sur la surface latérale d'un demi-cylindre. Dans le cas des paliers lisses, ce modèle est plus élaboré car il tient compte des déformations de la bague constituée d'un matériau tendre par rapport à celui de l'arbre |
| Pression fonction de la déformation | La liaison entre l'arbre et le palier se fait avec jeu avec une répartition radiale proportionnelle à la déformation. L'angle $2\theta_0$ défini, avec la longueur L la surface latérale de contact. Ce modèle est le plus proche de la réalité, mais il nécessite de connaître θ_0 en fonction des matériaux en présence, du jeu, de L et D (ce paramètre n'est pas encore maîtrisé aujourd'hui). Pour définir θ_0 on peut utiliser une courbe expérimentale donnant $\frac{F}{L} = f(\theta_0)$ |
| Jeu important | Dans la mesure où la largeur du contact calculée à partir des formules de Hertz est inférieure à la moitié du rayon, on peut admettre que les valeurs de pressions de contact calculées à partir de ces formules sont acceptables. Nous nous trouvons alors dans le cas des contacts étroits. |

3.4.5- Cas de charges excentrées

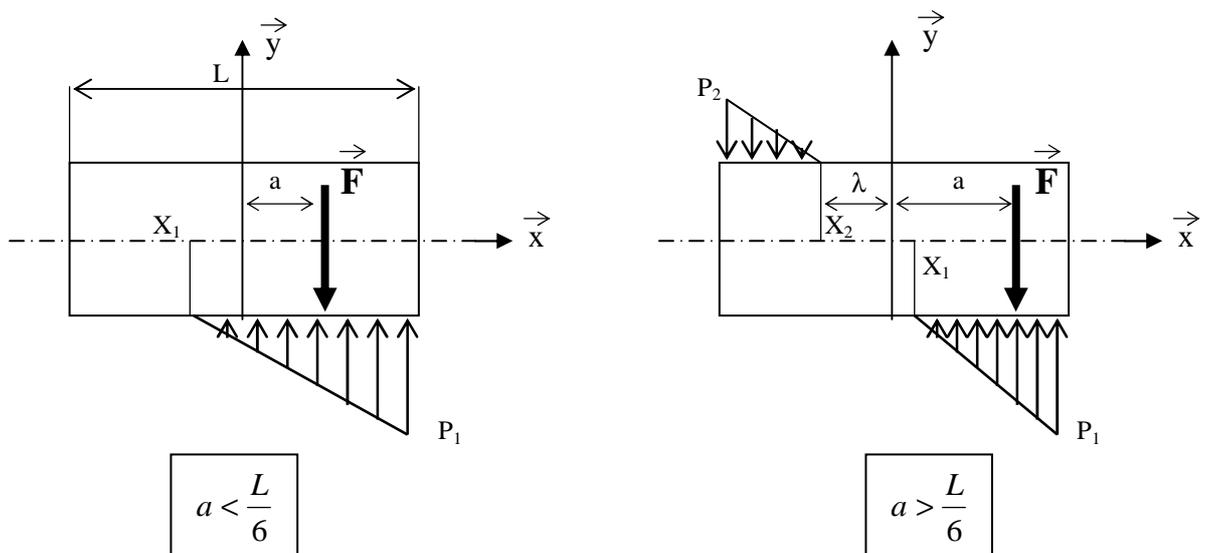
Dans le cas où la charge n'est pas centrée, les calculs conduisant à la détermination de la pression maximale de contact sont plus compliqués. Il faut faire intervenir un nouveau paramètre l'excentration a .

Pour résoudre ce type de problème, il nous faut exprimer l'équilibre de l'axe en explicitant les équations de la résultante et les équations du moment résultant au centre du contact.

- Pour un fonctionnement sans jeu, il suffit de déterminer les valeurs extrêmes des pressions P_1 et P_2 .



- Pour un fonctionnement avec jeu, les calculs sont les mêmes, mais ils s'avèrent beaucoup plus complexe car ils font intervenir les paramètres θ_0 et λ qui dépendent du jeu dans la liaison.

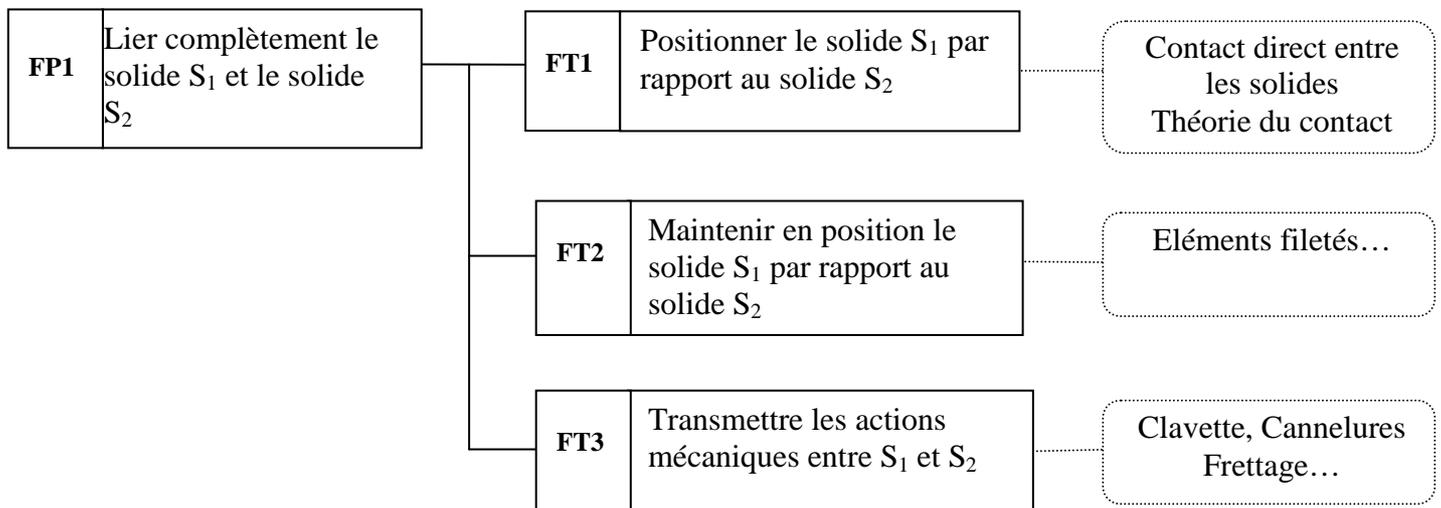


IV- Dimensionnement des éléments d'assemblage

1- Introduction

Le but de cette partie est de définir, dans le but d'un dimensionnement, tout ou partie des éléments constituant un assemblage c'est à dire une liaison complète.

La conception de cette liaison obéit à des règles élémentaires sans lesquelles le mécanisme n'assurerait pas sa fonction de manière idéale.

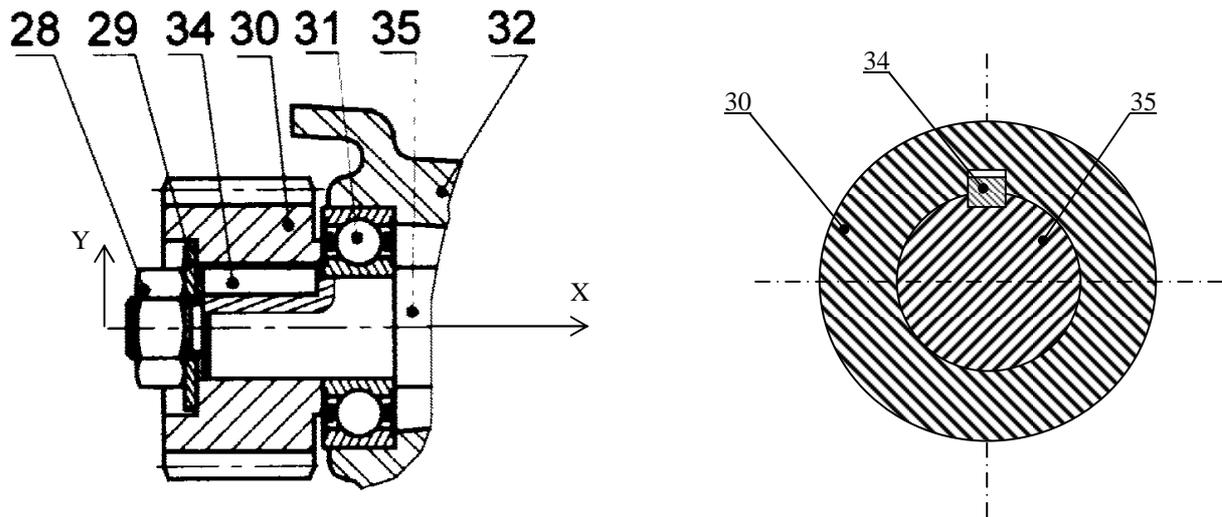


2- Transmission de puissance par obstacle : clavette

2.1- Principe

Une clavette est un parallélépipède rectangle implanté par moitié environ dans l'arbre et dans le moyeu.

Pour cela une rainure est nécessaire dans l'arbre et dans l'alésage. Cette dernière doit obligatoirement déboucher aux deux extrémités pour des impératifs de fabrication.



La liaison est réalisée par obstacle en rotation autour de l'axe (O, \vec{x}) , il subsiste un degré de liberté en translation de l'alésage 30 par rapport à l'arbre 35 le long de l'axe (O, \vec{x}) .

Le type d'effort transmissible par une telle liaison est le couple porté par l'axe (O, \vec{x}) .

2.2- Éléments de la détermination des clavettes

Les deux principaux problèmes liés à la définition d'un clavierage par clavette parallèle sont :

- la tenue de la clavette lors de la transmission du couple ;
- l'assemblage des éléments.

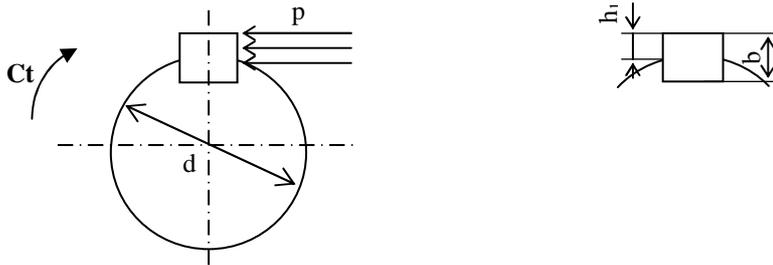
La tenue de la clavette est assurée par une condition de non matage qui détermine la longueur minimum de la partie rectiligne de la clavette. Les dimensions transversales, normalisées, sont associées à la valeur du diamètre de la portée.

L'assemblage des éléments est permis par les conditions de fabrication imposées par la cotation.

2.2.1- Longueur du contact clavette /moyeu :

La pression moyenne p sur la partie rectiligne de la clavette en contact avec le moyeu doit être inférieure à la pression de contact admissible, p_{adm} .

$$p \leq p_{adm}$$

Détermination de la longueur de la clavette

- 1- Détermination du couple Ct appliqué.
- 2- Détermination de la résultante des actions de contact clavette / moyeu.

$$F = \frac{2.Ct}{d}$$

- 3- Détermination de la pression sur le flanc de la clavette.
La surface de liaison clavette / moyeu étant plane, et la pression uniformément répartie, on peut écrire :

$$p = \frac{F}{S} = \frac{F}{(l.h_1)}$$

- 4- Choisir dans le tableau une pression admissible sur le flanc de la clavette.

| Pressions admissibles sur les flancs des clavettes et cannelures (en MPa) | | | |
|--|------------------------------|----------|-------------|
| Type de montage | Conditions de fonctionnement | | |
| | Mauvaises | Moyennes | Excellentes |
| Glissant sous charge | 3 à 10 | 5 à 15 | 10 à 20 |
| Glissant sans charge | 15 à 30 | 20 à 40 | 30 à 50 |
| Fixe | 40 à 70 | 60 à 100 | 80 à 150 |

5- Ecrire la condition de non-matage

$$p \leq p_{adm} \rightarrow \frac{2.Ct}{(d.l.h_1)} \leq p_{adm}$$

$$l \geq \frac{2.Ct}{(p_{adm} \cdot d \cdot h_1)}$$

2.2.2- Assemblage des éléments (arbre, clavette, moyeu).

Il faut procéder à une cotation des différents éléments afin de permettre l'assemblage le plus précis possible.

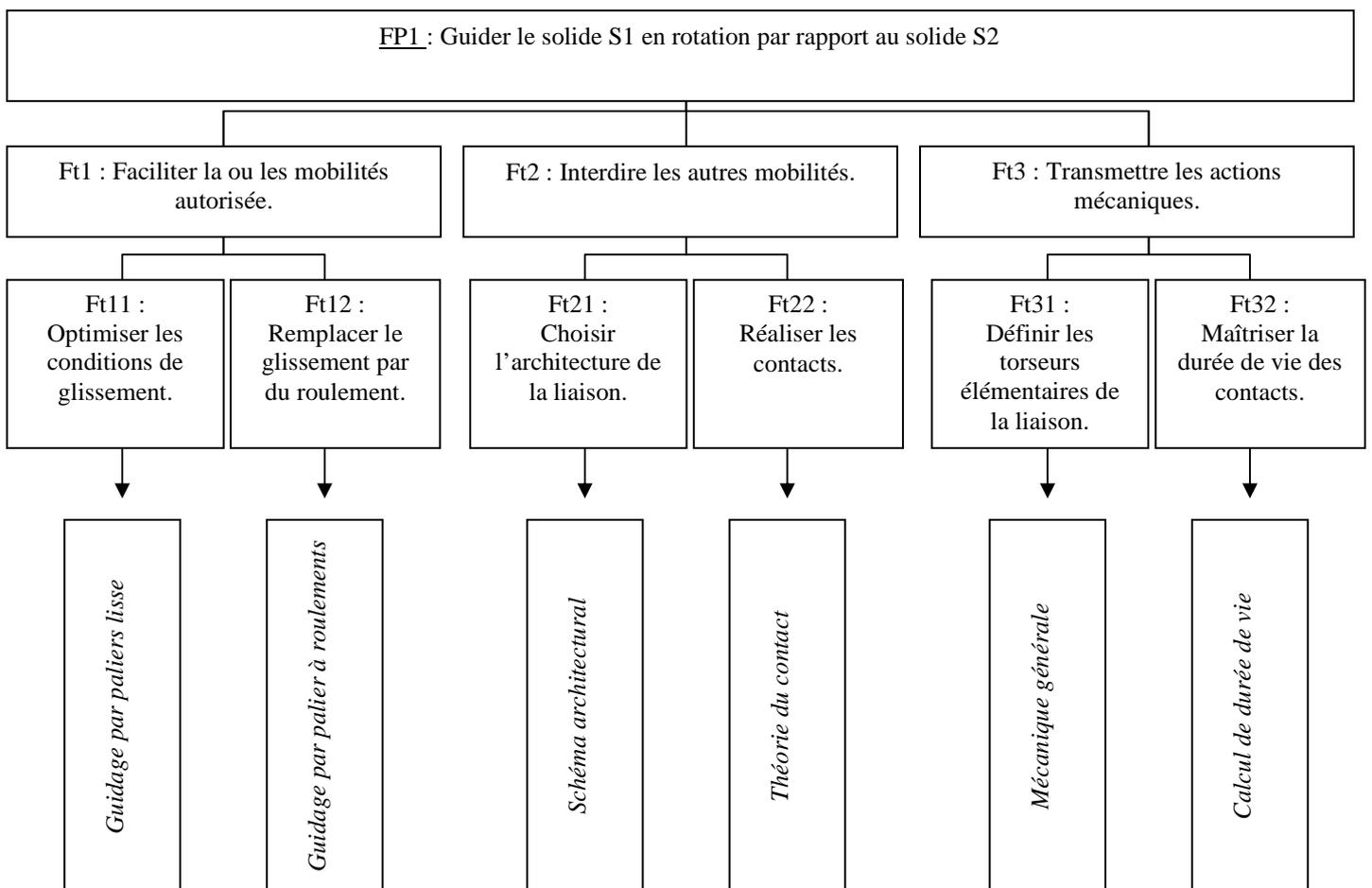
Il faut permettre l'assemblage des éléments en autorisant un contact surfacique entre le flanc de la clavette et la rainure du moyeu.

V- Dimensionnement des éléments de guidage

1- Introduction

Le but de cette partie est de définir, dans le but d'un dimensionnement, tout ou partie des éléments constituant un guidage.

La conception de cette liaison obéit à des règles élémentaires sans lesquelles le mécanisme n'assurerait pas sa fonction de manière idéale.



2- Guidage par paliers lisses

2.1- Introduction

Un palier lisse est un organe mécanique dont le rôle est double :

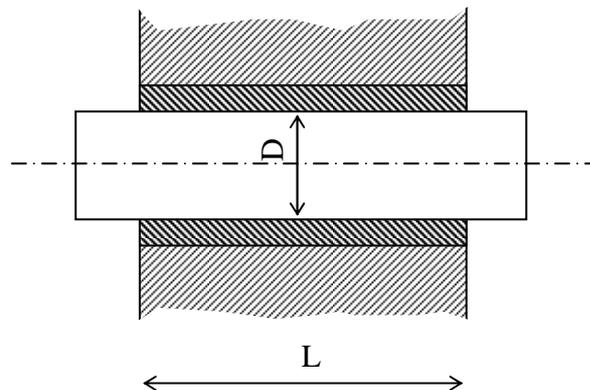
- supporter les charges appliquées à un arbre ;
- assure la rotation de l'arbre autour d'un axe fixe.

Lors du mouvement relatif, les surfaces de contact glissent l'une sur l'autre.

2.2- Architecture de la liaison

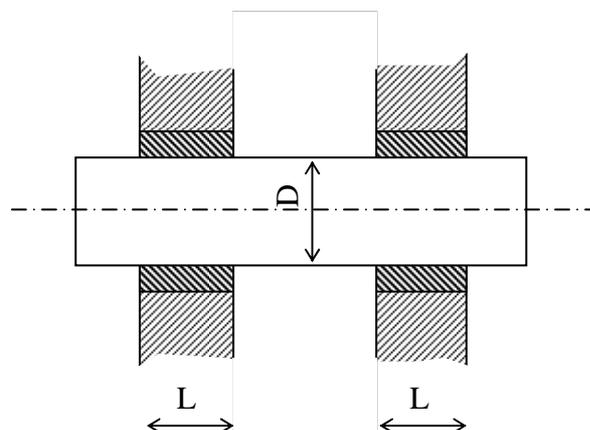
Les paliers lisses servent à réaliser une liaison pivot ou bien une liaison pivot glissant. Dans les deux cas, on rencontre deux types de conception :

Cas 1 : liaison réalisée par un seul palier long



La liaison est réalisée à partir d'un seul palier « long ». Pour les valeurs usuelles de jeu ($j \approx \frac{D}{2000}$) le rapport $\frac{L}{D}$ est pris supérieur à 1,5 pour conférer à l'ensemble le comportement d'une liaison pivot ou pivot glissant.

Cas 2 : liaison réalisée par deux paliers courts



La liaison est réalisée à partir de deux paliers « courts ». Pour la même valeur du jeu on prend pour chacun d'eux un rapport $\frac{L}{D}$ inférieur à 0,8 de manière à pouvoir leur associer un comportement de rotule ou de linéaire annulaire.

NOTA : En reprenant les modèles de répartition étudiés précédemment, on peut considérer que :

- les modèles correspondant à l'hypothèse de charge centrée conviennent pour des paliers courts ;
- les modèles correspondant à l'hypothèse de charge centrée conviennent pour des paliers longs si la charge appartient au plan de symétrie, sinon il faut revenir au cas général (charge excentrée).

2.3- Dimensionnement d'un palier

Le concepteur doit tout d'abord choisir parmi les différentes gammes de palier proposé par les constructeurs.

Ayant provisoirement décidé quel matériau de la gamme utiliser, le concepteur doit ensuite déterminer les dimensions nécessaires. C'est là un procédé itératif et lorsque le palier doit être de taille minimum, plusieurs tentatives de conception peuvent être nécessaires avant que le meilleur compromis entre les dimensions du palier et la durée de vie de fonctionnement puisse être trouvé. Cela peut même amener le concepteur à envisager l'emploi d'autres matériaux.

Le choix du palier approprié sera généralement basé sur les données suivantes :

- Pression spécifique maxi (critère statique) ;
- Vitesse relative (critère cinématique) ;
- Produit pV (critère thermique) ;
- Température de fonctionnement et environnement
- Usure acceptable.

Dans le cas de paliers fonctionnant avec de la graisse, la fréquence de lubrification est également incluse dans les calculs.

Pour les paliers radiaux et les rondelles de butée, la variable de dimensionnement principale sera la longueur de la bague ou la largeur radiale de la rondelle, le diamètre du palier ayant été déterminé sur la considération de contraintes, d'espace disponible, et de géométrie générale de l'ensemble.

2.3.1- Détermination de la pression spécifique maxi.

La pression spécifique maximale est déterminée en divisant la charge appliquée par la surface projetée du palier qui, pour une bague, est le produit $L \times D$. Cette pression maximale doit être inférieure à celle qui risque d'engendrer du fluage.

$$P_{\max} \leq P_{adm}$$

2.3.2- Vitesse admissible.

Pour un fonctionnement en régime sec ou onctueux, les vitesses élevées sont à proscrire. Les fabricants donnent donc des vitesses admissibles suivant les matériaux utilisés.

$$V_{\max} \leq V_{adm}$$

2.3.3- Détermination du critère pV.

Les performances des paliers à sec ou lubrifié dépendent du facteur pV qui est le produit pression spécifique par la vitesse relative de glissement.

En cas de rotation continue, la vitesse est calculée à partir de la vitesse de rotation et du diamètre du palier. Quand il y a mouvement oscillant ou alternatif, on doit utiliser la vitesse moyenne.

$$(p.V)_{\max} \leq (p.V)_{adm}$$

Le produit admissible est souvent une caractéristique intrinsèque au couple arbre-palier et doit être déterminée à partir d'abaques ou de tableaux propres à chaque fabricant.

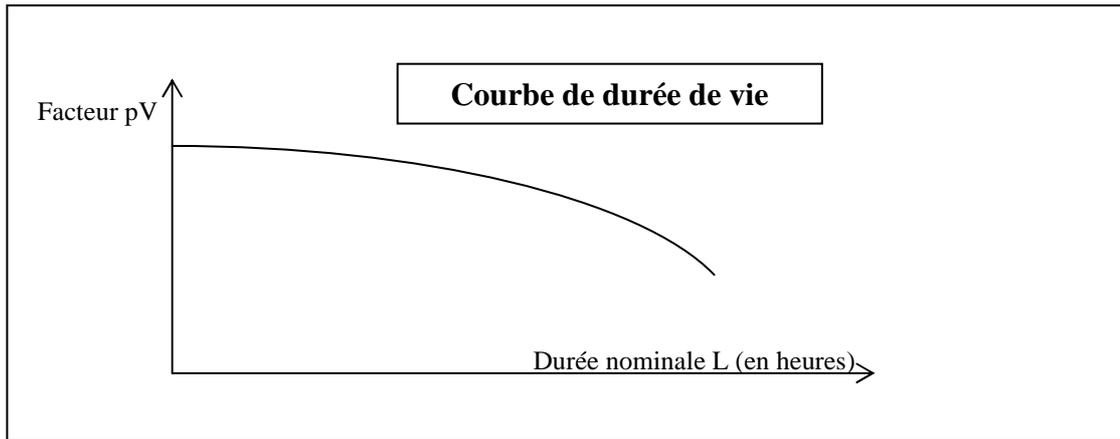
2.3.4- Calcul de la durée de vie.

La durée de vie du palier dépend du produit pV, mais les procédures donnent des corrections pour les conditions réelles de fonctionnement. Celles-ci incluent le niveau de la pression spécifique limite, et les coefficients d'application pour la vitesse, la température et la surface de l'arbre.

Les calculs de durée de vie supposent un bon alignement entre les paliers et la surface antagoniste.

Les fabricants de paliers donnent une durée de vie nominale en fonction de pV pour un fonctionnement dans des conditions de référence :

- soit sous forme de courbes ;



- soit sous forme de formules empiriques.

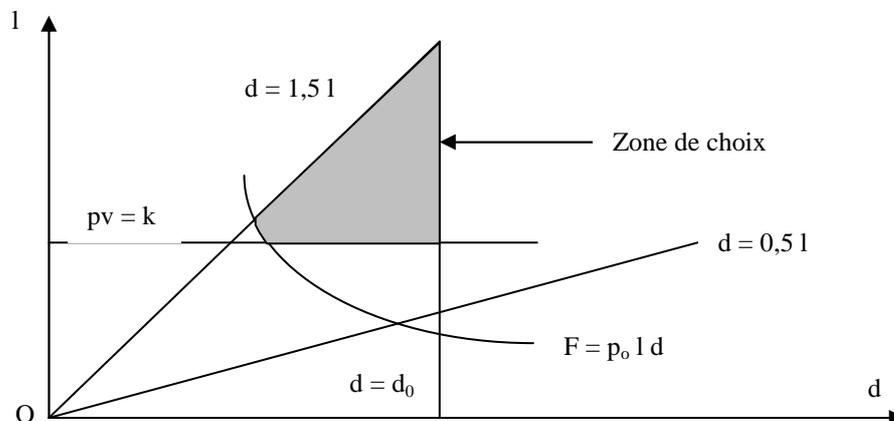
2.3.5- Autres critères technologiques

On peut, pour chacune des applications à étudier, trouver de nombreux critères applicables. Parmi ceux qui sont les plus courants, on peut citer :

- ❑ le rapport de la longueur du palier sur son diamètre qui est généralement compris entre les valeurs extrêmes 0,5 et 1,5 ;
- ❑ la vitesse circonférentielle dans l'interface, qui peut être limitée par la nature du matériau de coussinet. C'est le cas des antifrictions par exemple ;
- ❑ les caractéristiques inertielles de l'arbre ;
- ❑ l'encombrement géométrique longueur et diamètre ;
- ❑ les conditions de lubrification.

Pour déterminer un palier lors d'un avant projet, c'est à dire déterminer sa longueur, son diamètre et sa composition, une méthode possible consiste à sélectionner un type de coussinet et à tracer un graphique traduisant les relations déduites des conditions précédentes.

Voici un tel graphique :



2.3.6- Réalisations technologiques

Problèmes liés au choix de l'arbre

Les problèmes sont de trois ordres :

- la nature des matériaux ;
- la qualité dimensionnelle exigée ;
- la qualité surfacique minimale.

L'état de surface et la nature du matériau de l'arbre dépendent beaucoup du matériau antagoniste et de l'environnement du fonctionnement.

On peut dans une première approche du problème choisir un arbre en acier étiré puis poli. Si une résistance à la corrosion est nécessaire, on utilise de préférence des aciers inoxydables ou chromés durs. On peut utiliser également des aciers trempés pour les conditions de fonctionnement sévères.

Aciers habituellement utilisés : C22, 35CrMo4, X8Cr17

La rugosité maximale de la surface dépend beaucoup de la nature du coussinet antagoniste. Si l'on souhaite limiter l'usure, une rugosité voisine de $R_a = 0,4$ micromètres semble bien adaptée.

Le jeu de fonctionnement final dépend beaucoup des conditions de montage. Les déformations élastiques du coussinet et du carter lors du montage, modifient les valeurs initiales du jeu. On admet en général que la tolérance dimensionnelle de l'arbre doit être voisine de h7 ou h8, tandis que celle du logement du coussinet de l'ordre de grandeur de H7 ou H8.

Problèmes liés au choix du coussinet

La composition des coussinets est extrêmement variée. Ils peuvent être en alliage de cuivre ou d'antifriction, mais également dans des compositions très diverses alliant les matériaux de friction tel que le PTFE à des couches de cuivre ou d'acier. On trouve également des coussinets composites réalisés à partir d'une fine texture de matériaux synthétiques imprégnés de polyester avec éventuellement l'adjonction d'un matériau autolubrifiant.

En plus de leur composition, les coussinets respectent pour leur dimensionnement, des règles liées à l'expérience. On admet en général que plus les risques de désalignement des paliers sont grands, plus les coussinets seront ductiles et épais. La règle inverse existe également et dans ce cas les coussinets sont durs et minces.

3- Guidage en rotation par paliers à roulements

3.1- Considérations générales

Entre l'arbre et l'alésage, on dispose d'un ensemble préfabriqué par des constructeurs spécialisés. Grâce à la grande série, ils assurent une réalisation de très grande qualité restant toutefois économique.

Un roulement est généralement constitué de:

- ❶ - Une bague extérieure (solidaire du moyeu)
- ❷ - Une bague intérieure (solidaire de l'arbre)
- ❸ - Des éléments roulants :
 - Billes
 - Rouleaux cylindriques
 - Rouleaux coniques
 - Tonneaux
- ❹ - Une cage (destinée à maintenir les éléments roulants à écartement constant)



3.2- Choix des dimensions d'un roulement

Le choix d'un roulement repose sur l'étude des efforts qu'il devra supporter et des conditions de fonctionnement auxquelles il sera soumis.

Dans ce choix, interviennent :

- l'intensité de la charge ;
- la direction de la charge ;
- les chocs éventuels ;
- la vitesse de rotation ;
- la lubrification.

D'autres critères peuvent également intervenir comme :

- les conditions de montage, de réglage ;
- la précision recherchée pour le guidage ;
- la place disponible ;
- le prix.

3.3- Durée de vie et fiabilité des roulements

3.3.1- Définition.

On appelle durée d'un roulement le nombre de tours que celui-ci peut effectuer avant l'apparition des premiers signes de fatigue (écaillage) sur une bague ou un élément roulant. Mais, du fait du phénomène aléatoire de la fatigue, des roulements identiques chargés de la même façon, présentent des durées différentes.

3.3.2- Fiabilité de la durée.

Pour un groupe de roulements apparemment identiques et fonctionnant dans les mêmes conditions, c'est le pourcentage de ces roulements qu'on s'attend à voir atteindre ou dépasser une durée déterminée.

Pour un roulement isolé, c'est la probabilité de le voir atteindre ou dépasser une durée déterminée.

3.3.3- Durée nominale L_{10} .

La durée nominale d'un roulement est la durée atteinte ou dépassée par 90% des roulements (fiabilité de 90%). La charge dynamique de base et la charge appliquée (P) sont liées par la formule :

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P} \right)^p$$

L_{10} : durée nominale en millions de tours,
 C : charge dynamique de base,
 P : charge dynamique équivalente,
 p = 3 pour les roulements à billes,
 p = 10/3 pour les roulements à rouleaux.

Lorsque la vitesse de rotation est constante, la durée s'écrit alors :

$$L_{10h} = \frac{10^6}{60.n} \left(\frac{C}{P} \right)^p$$

L_{10h} : durée en heures
 n : vitesse en tr/min.

Durée de vie d'un ensemble ou d'une association de roulements :

Lorsqu'un ensemble de roulements (E) comprend plusieurs roulements fonctionnant en même temps (arbre avec plusieurs roulements), la durée de vie L_{E10} de l'ensemble est fonction de la durée de vie de chacun des n roulements L_{i10} , i variant de 1 à n.

$$L_{E10} = \left(\left(\frac{1}{L_{1.10}} \right)^{1,5} + \left(\frac{1}{L_{2.10}} \right)^{1,5} + \left(\frac{1}{L_{3.10}} \right)^{1,5} + \dots + \left(\frac{1}{L_{n.10}} \right)^{1,5} \right)^{-\frac{1}{1,5}}$$

Cette durée de vie est toujours inférieure à la plus petite des valeurs $L_{i,10}$

3.3.4- Durée nominale corrigée ISO.

Certaines applications peuvent requérir d'autres

$$L_n = a_1 \cdot L_{10}$$

a_1 se déduit de la loi de Weibull.

| Fiabilité % | L_n | a_1 |
|-------------|----------|-------|
| 90 | L_{10} | 1 |
| 95 | L_5 | 0.62 |
| 96 | L_4 | 0.53 |
| 97 | L_3 | 0.44 |
| 98 | L_2 | 0.33 |
| 99 | L_1 | 0.21 |

On peut aussi corriger la durée avec des facteurs de matière et de conditions particulières de fonctionnement, a_2 et a_3 .

$$L_{na} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot L_{10}$$

Voir catalogue constructeur pour les facteurs.

3.4- Capacité de charges des groupements de roulements

La charge dynamique de base C est utilisée pour le calcul de la durée des roulements en rotation. C'est la charge pour laquelle la durée nominale atteint 1 millions de tours sous certaines conditions d'application. C'est une charge constante en intensité et en direction, radiale pour un roulement radial, axiale et centrée dans le cas d'une butée.

La charge statique de base Co est utilisée pour le calcul, soit à l'arrêt, soit en rotation à basse vitesse ou en faible amplitude. Elle doit être prise en compte lorsque des chocs importants de courte durée s'exercent sur un roulement en rotation. La charge statique de base est définie comme la charge statique qui correspond à une contrainte calculée de :

- 4500 MPa pour les roulements à rotules sur billes ;
- 4200 MPa pour les autres roulements à billes ;
- 4000 MPa pour les roulements à rouleaux

au contact d'un des chemins de roulement et de l'élément le plus chargé. cette contrainte produit une déformation totale d'environ 0.0001 du diamètre de l'élément roulant.

3.5- Charges équivalentes

3.5.1- Charge statique équivalente.

Lorsque la charge statique ne correspond pas aux conditions définies pour la charge statique de base, il est nécessaire de calculer une *charge statique équivalente* P_o .

$$P_o = X_o F_r + Y_o F_a \quad (\text{valeurs des coefficient } X_o \text{ et } Y_o \text{ sont données page 68})$$

La charge statique de base nécessaire est donnée par la formule :

$$C_o = s_o.P_o \quad \text{où } s_o \text{ est le coefficient de sécurité statique.}$$

3.5.2- Charge dynamique équivalente.

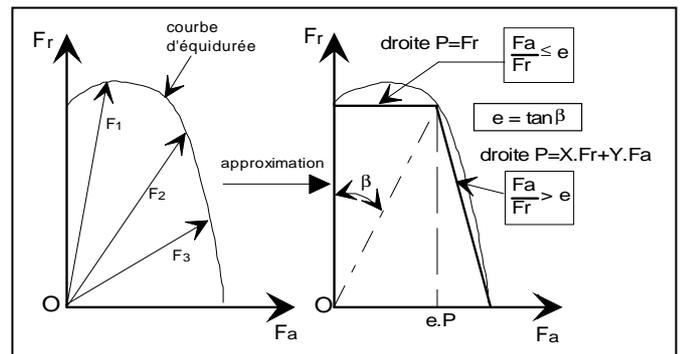
Lorsque la charge F agissant sur un roulement correspond aux conditions définies pour une charge dynamique de base, elle peut être directement comparée à celle-ci dans la formule de durée.

Dans le cas contraire, il est nécessaire de ramener cette charge F aux conditions de définition de la charge dynamique de base, en calculant une charge dynamique équivalente P .

Sur le graphique ci-contre, on peut représenter l'ensemble des charges quelconques conférant aux roulements identiques, une même durée. L'extrémité des pointeurs (O, F) associés à chacune de ces charges décrit la **courbe d'équidurée**.

Pratiquement, on remplace la courbe d'équidurée par 2 segments limités par l'angle β .

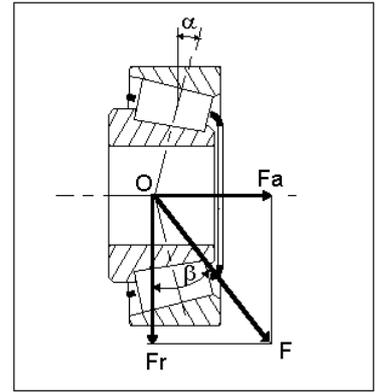
Et on pose $\tan \beta = e$.



On obtient la charge dynamique équivalente à l'aide de la formule généralisé :

$$\begin{aligned} \text{Pour } F_a / F_r \leq e &\rightarrow P = F_r \\ \text{Pour } F_a / F_r > e &\rightarrow P = X.F_r + Y.F_a \end{aligned}$$

P : Charge dynamique équivalente, (N)
 Fr : composante radiale de la charge, (N)
 Fa : composante axiale de la charge, (N)
 X : coefficient radial du roulement
 Y : coefficient axial du roulement.



Le calcul de P et les valeurs des coefficients X et Y sont données pages 69.

3.6- Charges minimales

3.6.1- Pour les roulements :

Pour fonctionner de façon satisfaisante, un roulement doit toujours être soumis à une charge minimale donnée.

Une règle générale pratique indique que des charges correspondant à 0,02C doivent s'exercer sur les roulements à rouleaux, et de 0,01C pour les roulements à billes.

3.6.2- Pour les butées :

Lorsqu'une butée tourne à grande vitesse, les forces centrifuges agissant sur les éléments roulants peuvent avoir une influence défavorable.

Afin d'éviter toute avarie, les butées doivent toujours être soumises à des charges axiales calculées :

- pour les butées à billes ou à rouleaux : $\mathbf{Fa\ mini} = A \left(\frac{n}{1000} \right)^2$

- pour les butées à rotule sur rouleaux : $\frac{C_0}{1000} \leq \mathbf{Fa\ mini} = 1,8F_r + A \left(\frac{n}{1000} \right)^2$

| FACTEURS X_o ET Y_o POUR ROULEMENTS A BILLES (radiaux) | | | | |
|---|-----------------------------|--------------------|---------------------------------|--------------------|
| Type de roulement | Roulement à 1 rangée | | Roulement à deux rangées | |
| | X_o | Y_o | X_o | Y_o |
| A contact droit (1) | 0,6 | 0,5 | 0,6 | 0,5 |
| A contact oblique 15° | 0,5 | 0,46 | 1 | 0,92 |
| A contact oblique 20° | | 0,42 | | 0,84 |
| A contact oblique 25° | | 0,38 | | 0,76 |
| A contact oblique 30° | | 0,33 | | 0,66 |
| A contact oblique 35° | | 0,29 | | 0,58 |
| A contact oblique 40° | | 0,26 | | 0,52 |
| A contact oblique 45° | | 0,22 | | 0,44 |
| A rotuli $\neq \alpha$ 0° | 0,5 | $0,22 \cot \alpha$ | 1 | $0,44 \cot \alpha$ |

(1) La valeur maximale admise pour F_a/C_{or} dépend de la construction interne du roulement (jeu et profondeur des gorges).

| FACTEURS X_o ET Y_o POUR ROULEMENTS A ROULEAUX (Radiaux) | | |
|---|-------|--------------------------|
| Type de roulement | X_o | Y_o |
| A une rangée $\neq \alpha$ 0° | 0,5 | $0,22 \cdot \cot \alpha$ |
| A deux rangées $\neq \alpha$ 0° | 1 | $0,44 \cdot \cot \alpha$ |

Coefficients X et Y

ROULEMENTS A BILLES

| Type de roulement | $\frac{F_a}{F_r} \leq e$ | | $\frac{F_a}{F_r} > e$ | | e |
|--|--------------------------|-----|-----------------------|------|------|
| | X | Y | X | Y | |
| Roulements rigides à billes Séries 160, 60, 62, 63, 64 $\frac{F_a}{C_0} = 0,025$ $= 0,04$ $= 0,07$ $= 0,13$ $= 0,25$ $= 0,5$ | 1 | 0 | 0,56 | 2 | 0,22 |
| Roulements à rotule sur billes 135, 126, 127, 108, 129 1200—1203 04— 05 06— 07 08— 09 10— 12 13— 22 24— 30 2200—2204 05— 07 08— 09 10— 13 14— 20 21— 22 1300—1303 04— 05 06— 09 10— 17 2301 2302—2304 05— 10 11— 18 | 1 | 1,8 | 0,65 | 2,8 | 0,34 |
| Roulements à billes à contact oblique Séries 72 B, 73 B Séries 72 BG, 73 BG Disposition en T Disposition en O et en X Séries 32, 33 | 1 | 0 | 0,35 | 0,57 | 1,14 |

ROULEMENTS A ROULEAUX

| Type de roulement | $\frac{F_a}{F_r} \leq e$ | | $\frac{F_a}{F_r} > e$ | | e |
|--|--------------------------|----------|-----------------------|---|--|
| | X | Y | X | Y | |
| Roulements à rotule sur rouleaux 23944—239/670 239/710—239/950 23022 C—23068 CA 23072 CA—230/500 CA 24024 C—24080 CA 24084 CA—240/500 CA 23120 C—23128 C 23130 C—231/500 CA 24122 C—24128 C 24130 C—24172 CA 24176 CA—241/500 CA 22205 C—22207 C 08 C— 09 C 10 C— 20 C 22 C— 44 C 48 C 52 — 64 23218 C—23220 C 22 C— 64 CA 22308 C—22310 C 11 C— 15 C 16 C— 40 C 44 — 56 | 1 | 3,7 4 | 0,67 | 5,5 6 | 0,18 0,17 |
| Roulements à rouleaux coniques 32004 X—320/22 X 05 X— 06 X /32 X— 07 X 08 X— 09 X 10 X— 11 X 12 X— 30 X 30203 — 30204 05 — 08 09 — 22 24 — 30 32206 — 32208 09 — 22 24 — 30 32205 B /28 B— 06 B /32 B— 07 B 08 B 09 B 30302 — 30303 04 — 07 08 — 24 31305 — 31318 32303 32304 — 32307 08 — 24 32307 B— 32318 B | 1 | 0 | 0,4 | 1,55 1,4 1,3 1,55 1,45 1,35 1,75 1,6 1,45 1,35 1,03 1,07 1,03 1,1 1,01 2,1 1,95 1,75 0,73 2,1 1,95 1,75 1,1 | 0,39 0,43 0,46 0,39 0,41 0,44 0,34 0,37 0,41 0,44 0,37 0,41 0,44 0,58 0,56 0,58 0,55 0,59 0,28 0,31 0,34 0,82 0,28 0,31 0,34 0,55 |

| Butées à rotule sur rouleaux | Seulement pour $\frac{F_r}{F_a} \leq 0,55$ | |
|-------------------------------------|--|---|
| | X | Y |
| Série 292 Série 293 Série 294 | 1,2 | 1 |

D'après document SKF

3.7- La précontrainte radiale des roulements

Lorsque **la charge radiale est tournante par rapport à une bague**, elle l'applique sur sa portée successivement en tous ses points. Si le montage a lieu avec du jeu, il s'en suit un roulage avec formation d'oxyde au contact (phénomène de laminage).

Il faut donc choisir **un ajustement avec serrage**.

Lorsque la charge radiale est fixe par rapport à une bague, elle l'applique toujours sur la même zone de contact ; on peut alors choisir un ajustement sans serrage.

3.8- La précontrainte axiale des roulements

On installe généralement une précharge dans les guidages par roulements pour :

- augmenter la rigidité du montage ;
- guider l'arbre de façon plus précise ;
- compenser l'usure et les processus de tassements en fonctionnement

3.8.1- Efforts et déformations d'un roulement :

Considérons un roulement susceptible de transmettre simultanément des efforts axiaux et radiaux ; sans charge, ni jeu, il a une longueur l_0 .

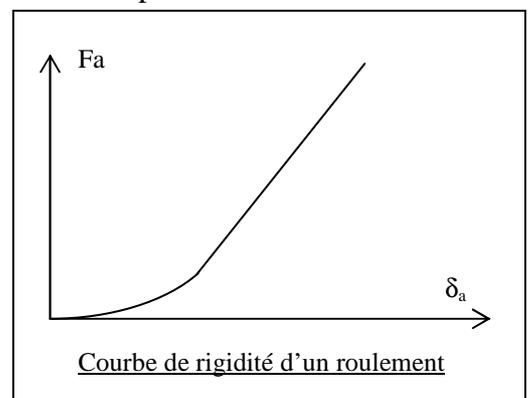
Lors du chargement, il y a une déformation au contact de l'élément roulant et de la bague.

D'après la théorie des contacts étroits, la relation entre la déformation et l'effort exercé s'écrit :

$$\delta = K \cdot F^n \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n = \frac{2}{3} & \text{pour les contacts ponctuels : billes} \\ n = 0.9 & \text{pour les contacts linéiques : rouleaux} \end{cases}$$

La théorie de Hertz permet de relier globalement le déplacement relatif entre les deux bagues (déplacement axial δ_a et déplacement radial δ_r) avec les composantes F_a et F_r de l'effort appliqué sur le roulement.

Si l'on trace les courbes caractéristiques d'un roulement $\delta_a = f(F_a)$, on remarque un déplacement relativement important sous faibles charges puis un comportement quasi linéaire.



3.8.2- Charges axiales induites et durée de vie des roulements à contacts obliques (à billes et à rouleaux coniques) :

Toute charge radiale produit dans un roulement à contact oblique ou à rouleaux coniques, une charge axiale induite dont il faut tenir compte pour le calcul de la charge dynamique équivalente.

Pour un jeu positif ou nul, la zone de chargement s'étend normalement au voisinage de 180°. Dans ce cas :

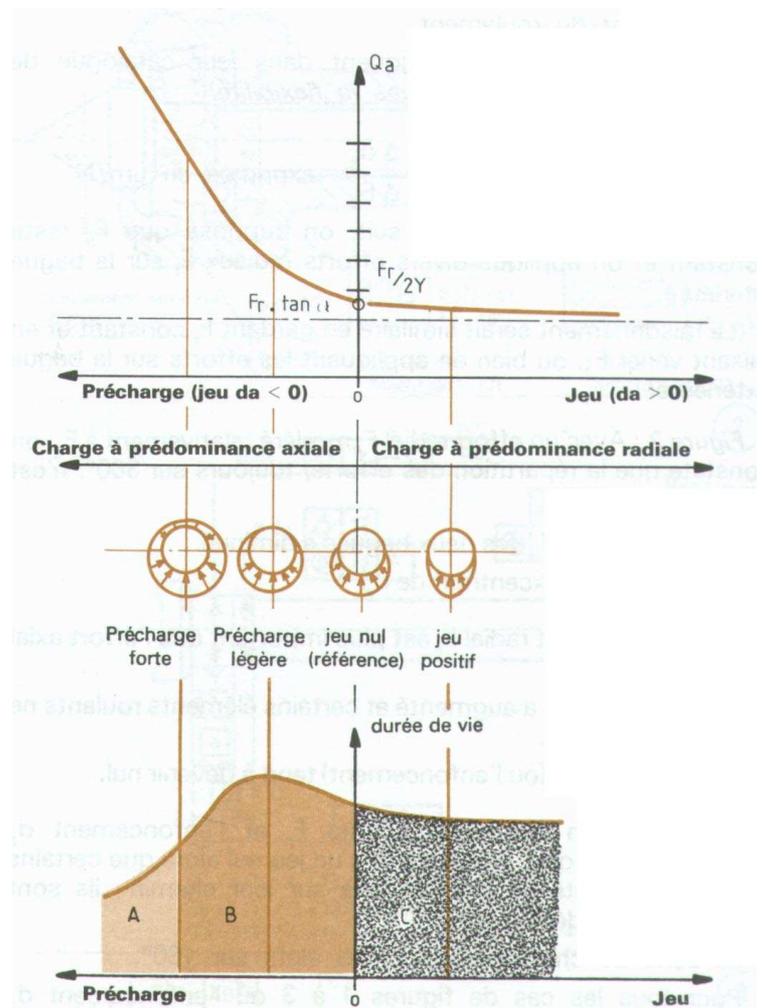
$$F_a = \frac{F_r}{2Y}$$

On diminuera le jeu de fonctionnement du roulement supportant F_r en le **préchargeant** au montage par un effort axial F_a .

La figure ci-contre montre l'influence de la précharge et du jeu de fonctionnement sur :

- la charge induite ;
- la durée de vie.

On constate une durée de vie plus courte pour un montage avec jeu, comparée au fonctionnement sans jeu. En effet, les efforts ne sont pas transmis par tous les éléments roulants. Mais une précharge trop forte réduit rapidement la durée de vie. Une précharge légère (zone B) conduit à la durée maximale.



3.8.3- Comportement d'un montage avec 2 roulements à contacts obliques (à billes ou à rouleaux coniques) :

A- Montage avec jeu initial positif ou nul

Les formules nécessaires sont données pour les différentes dispositions et conditions de charge.

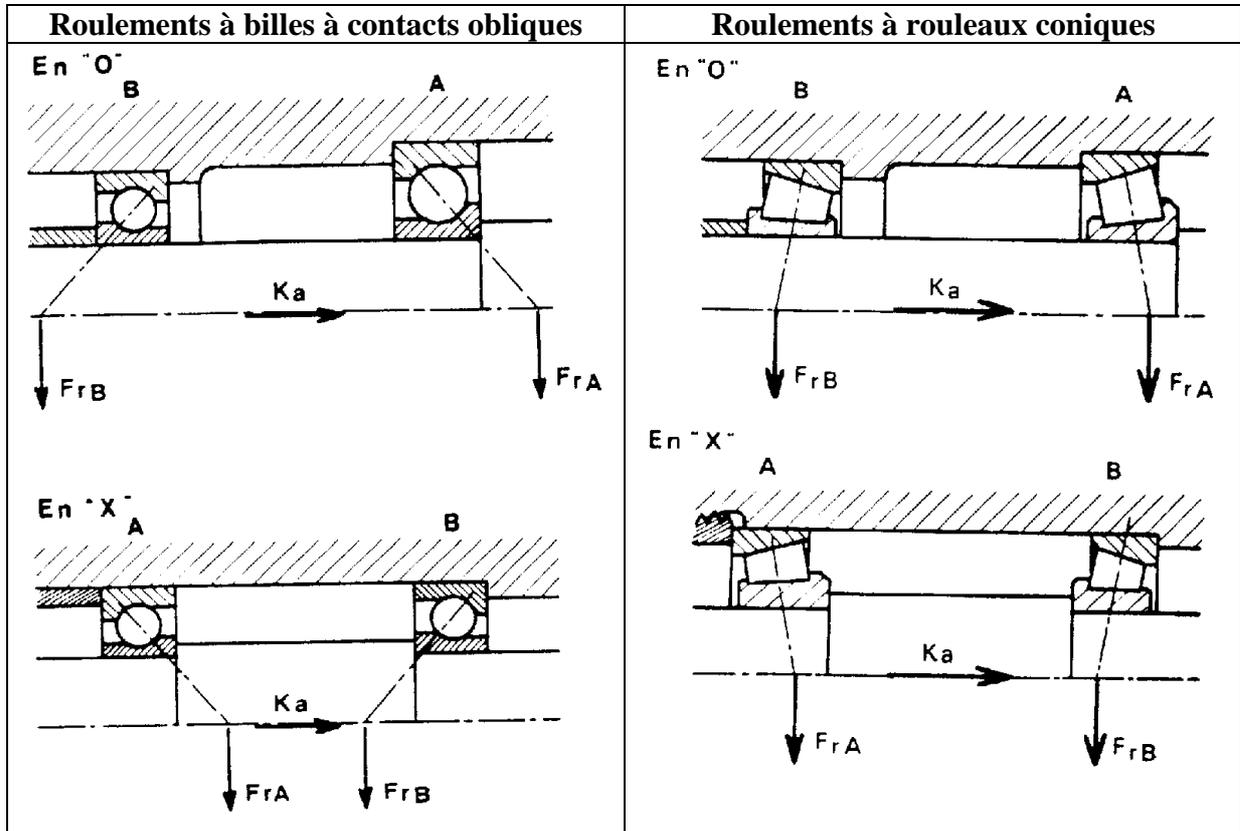
Ces formules ne sont valables que si les roulements sont montés en opposition avec un jeu pratiquement nul en fonctionnement, mais sans précharge.

| | |
|--|---|
| Convention : on repère (1) le roulement qui supporterait, par sa bague intérieure, l'effort axial extérieur Ka en l'absence des charges radiales Fr . | |
| On affecte alors l'autre roulement de l'indice (2). | |
| $\frac{Fr_{(1)}}{Y_{(1)}} \leq \frac{Fr_{(2)}}{Y_{(2)}}$ | $\frac{Fr_{(1)}}{Y_{(1)}} > \frac{Fr_{(2)}}{Y_{(2)}}$ |
| | $Ka \geq \frac{Fr_{(1)}}{2Y_{(1)}} - \frac{Fr_{(2)}}{2Y_{(2)}}$ |
| | $Ka < \frac{Fr_{(1)}}{2Y_{(1)}} - \frac{Fr_{(2)}}{2Y_{(2)}}$ |
| $Fa_{(2)} = \frac{Fr_{(2)}}{2Y_{(2)}}$ | $Fa_{(1)} = \frac{Fr_{(1)}}{2Y_{(1)}}$ |
| $Fa_{(1)} = Fa_{(2)} + Ka$ | $Fa_{(2)} = Fa_{(1)} - Ka$ |

On considère ensuite la valeur de e pour calculer la charge dynamique radiale équivalente :

| | |
|-------------------|---------------------|
| $P = Fr$ | si $Fa / Fr \leq e$ |
| $P = X.Fr + Y.Fa$ | si $Fa / Fr > e$ |

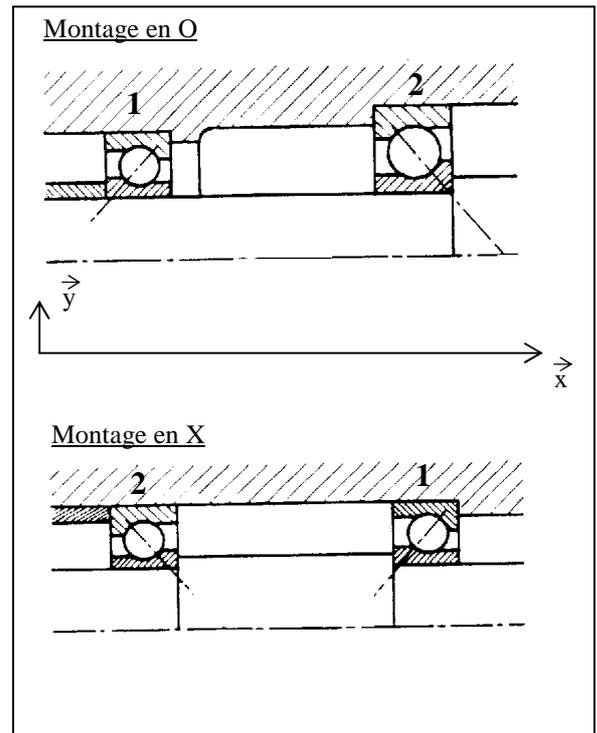
Type de montage des roulements à contacts obliques



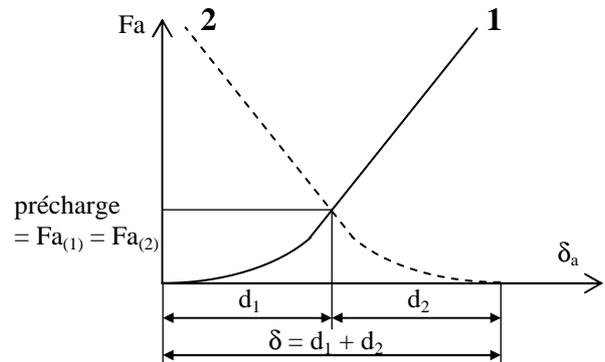
B- Montage préchargé (jeu <0)

On réalise une précharge au montage de valeur δ en resserrant axialement de δ mm à partir du jeu nul :

- Les bagues intérieures pour un montage en O ;
- Les bagues extérieures pour un montage en X.



Suivant l'axe x de la figure, la bague intérieure de **1** s'est donc enfoncée dans la bague extérieure de $+d_1$ mm et celle de **2** de $-d_2$ mm, tels que $\delta = d_1 + d_2$.



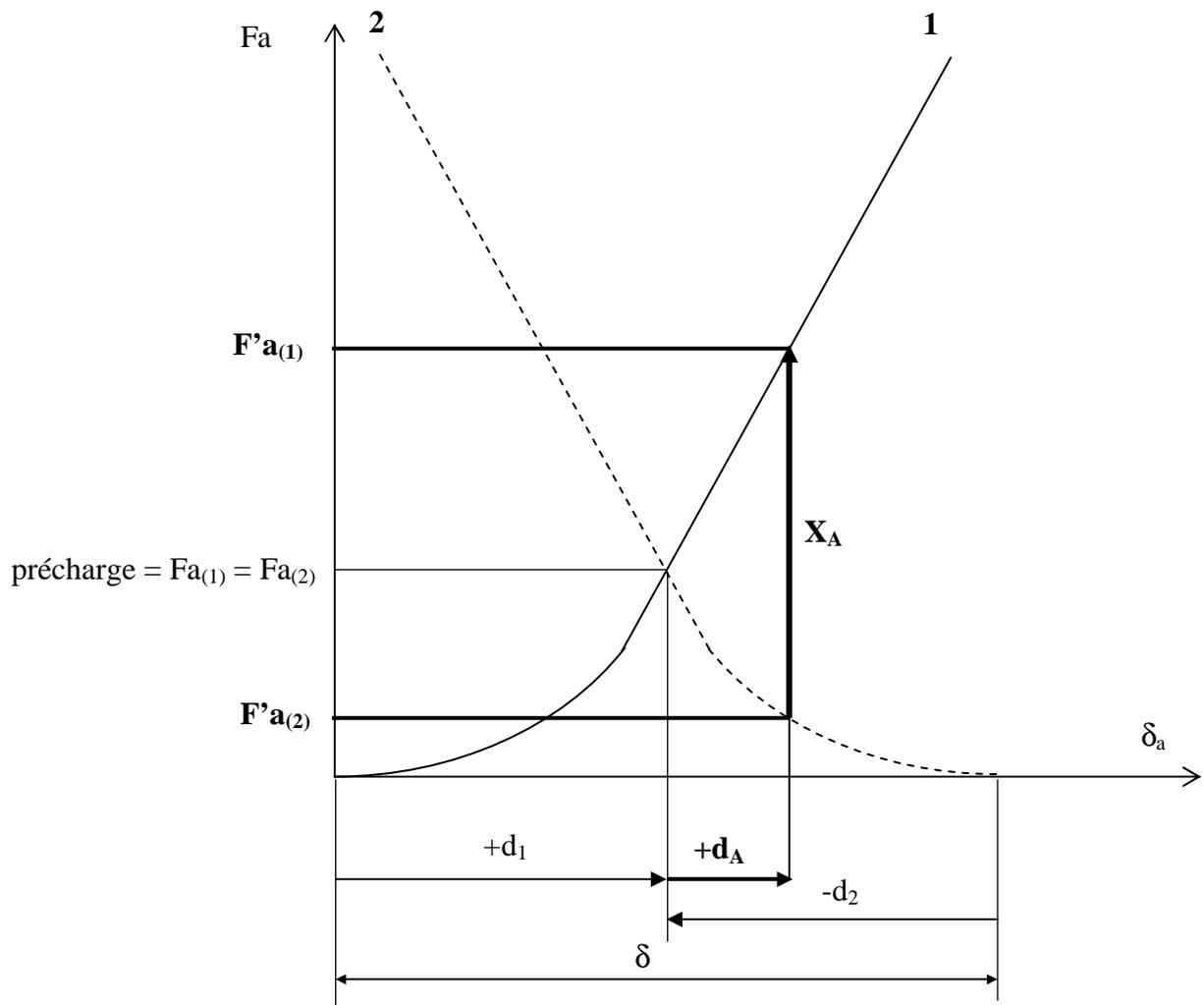
On applique une charge axiale X_A :

Le roulement **1** se charge d'avantage :
 nouvel enfoncement : $d_1 + d_A$
 nouvelle charge axiale : $F'a_{(1)}$

Le roulement **2** se décharge :
 nouvel enfoncement : $-[d_1 - d_A]$
 nouvelle charge axiale : $F'a_{(2)}$

L'équilibre axial de l'arbre se traduit par :
 $-F'a_{(1)} + F'a_{(2)} + X_A = 0$ soit $F'a_{(1)} = F'a_{(2)} + X_A$

Connaissant les courbes de rigidité de chaque roulement, on peut donc tracer un graphique correspondant à la figure précédente pour une précharge donnée. En y faisant ensuite intervenir la charge axiale appliquée X_A , on détermine graphiquement les charges axiales $F'a_{(1)}$ et $F'a_{(2)}$ sur chaque roulement.



Utilisation des montages préchargés

Pour des guidages précis : broche de machine outil, couples de pignons coniques, roues de véhicules automobiles (tenue de route)...

Pour compenser certaines dilatations.

Pour augmenter la rigidité : certains réducteurs à roue et vis sans fin...

Pour réduire ou supprimer les vibrations.

Inconvénient

La précharge augmente le frottement

VI- Dimensionnement des éléments de transmission de puissance

1- Transmission de puissance par engrenage

1.1- Fonction

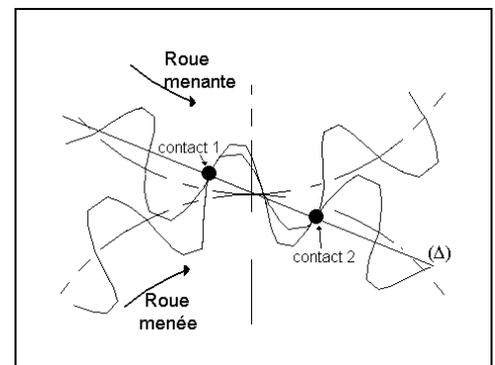
Transmettre un mouvement de rotation sans glissement entre deux arbres quelconques.

C'est une transmission de la puissance par obstacle.

1.2- Continuité de conduite dans les engrenages à denture droite.

1.2.1- Condition de conduite continue :

Pour que la conduite soit continue entre deux roues, l'une menante et l'autre menée, il faut qu'il y ait toujours au moins une dent de la roue menante en contact avec une dent de la roue menée.



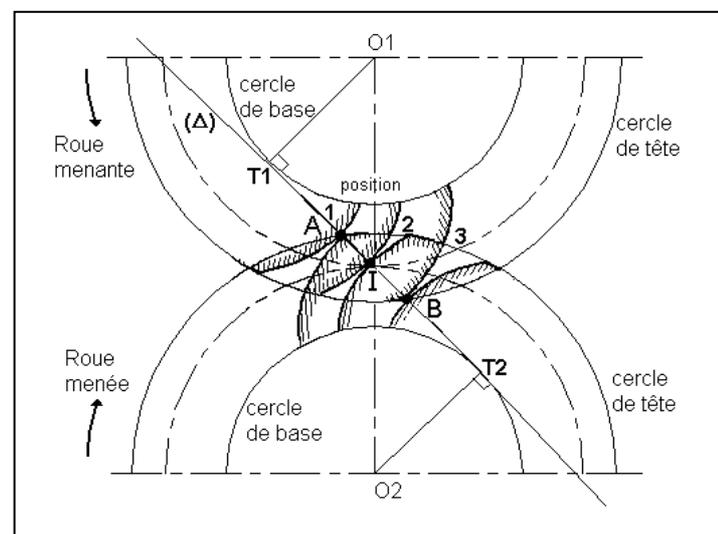
1.2.2- Définition de la longueur de conduite :

Examinons successivement 3 positions différentes de contact entre une dent de la roue menante et son homologue de la roue menée.

Position 1 : La dent de la roue menante vient en contact avec son homologue de la roue menée. Cette position coïncide avec le point d'intersection du cercle de tête de la roue menée et de la droite d'action (Δ). Soit **A** ce point.

Position 2 : Cas particulier. Le point **M** de contact entre les 2 dents est superposé avec le point de tangence **I** des 2 cercles primitifs.

Position 3 : La dent de la roue menante quitte le contact avec la dent de la roue menée. Cette position coïncide avec le point d'intersection du cercle de tête de la roue menante et de la droite d'action (Δ). Soit **B** ce point.



Par définition, on appelle longueur de conduite g_α , la longueur du segment [AB].

On appelle longueur d'approche g_f , la longueur du segment [AI]

On appelle longueur de retraite g_a , la longueur du segment [IB].

$$g_\alpha = g_f + g_a$$

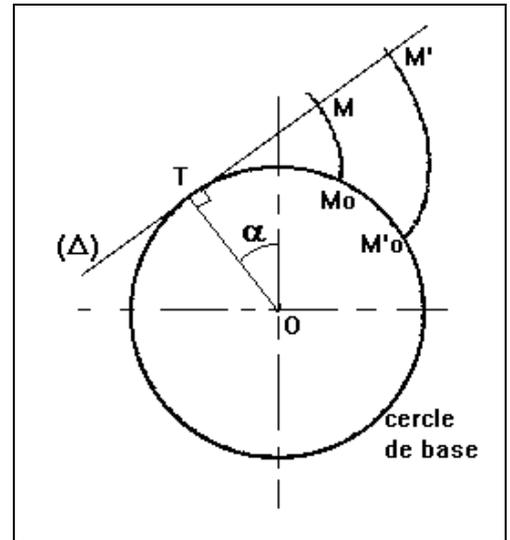
1.2.3- Définition du pas de base d'un engrenage :

Considérons 2 dents consécutives d'une même roue dentée. Par définition de la développante de cercle,

on a $MM' = \widehat{MoM'o} = \text{pas de base}$.

Le pas de base est la longueur de la circonférence du cercle de base divisée par le nombre de dent.

$$p_b = \frac{\pi.d}{Z} \cdot \cos \alpha = \pi.m \cdot \cos \alpha$$



1.2.4- Condition de conduite continue :

Pour que la conduite entre 2 roues soit continue, il faut que le pas de base p_b soit inférieur à la longueur de conduite g_α .

Par définition, posons $\mathcal{E}_\alpha = \frac{g_\alpha}{p_b}$; \mathcal{E}_α : rapport de conduite

Ce rapport de conduite doit toujours être supérieur à 1. Pratiquement, il est même souhaitable d'avoir une valeur de $\mathcal{E}_\alpha > 1,3$.

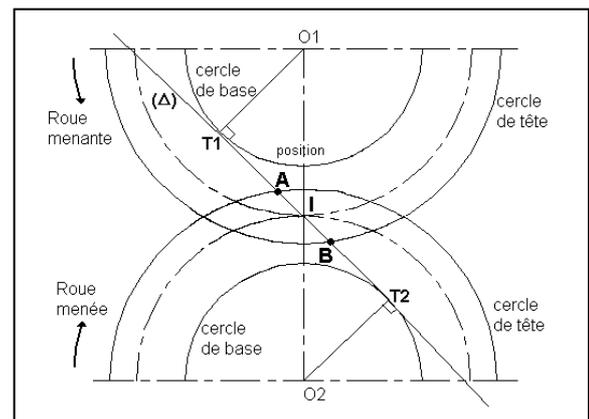
1.2.5- Calcul de la longueur de conduite :

$$g_\alpha = [AB]$$

$$g_\alpha = [AI] + [IB]$$

$$g_\alpha = [AT_2] - [T_2I] + [T_1I] - [T_1B]$$

$$g_\alpha = \sqrt{Ra_1^2 - Rb_1^2} - Rb_1 \cdot \tan \alpha + \sqrt{Ra_2^2 - Rb_2^2} - Rb_2 \cdot \tan \alpha$$



1.3- Dimensionnement des engrenages à denture droite

1.3.1- Principaux défauts observés :

a- L'usure répartie sur toutes les dents.

Elle est occasionnée par :

- le glissement relatif des profils ;
- une pression de contact élevée due à des défauts d'alignement ou des déformations des dents. Elle se traduit par des piqûres (pitting).
- Des éléments abrasifs véhiculés par le lubrifiant.

b- Les défauts localisés sur certaines dents.

Ils sont occasionnés :

- par une pression élevée sur la couche superficielle durcie (cémentation) qui provoque un écaillage ;
- par une contrainte normale au pied de la dent supérieure à la limite de fatigue du matériau qui provoque une fissuration ;
- par une rupture du film de lubrifiant sous une température élevée qui provoque un grippage.

c- Conclusion.

Les défauts observés sur les dentures nous conduisent à utiliser un critère de fatigue associé à la contrainte au pied de la dent (calcul à la rupture) et à la pression de contact entre les dents (calcul à la pression superficielle).

Le calcul à la pression permet de déterminer les dimensions générales.

Le calcul à la rupture permet de déterminer un module nominal compatible avec la résistance à la rupture.

1.3.2- Vérification du dimensionnement à la pression superficielle :

a- Théorie de Hertz.

Les formules de Hertz présentées précédemment permettent de déterminer la contrainte normale maximum (pression maximale). Pour les aciers et les matériaux ayant un coefficient de Poisson $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

$$\sigma_H = 0,59 \cdot \sqrt{\frac{q \cdot E}{\rho}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2}$$

Pour le cas de deux engrenages parallèles à denture droite, on pose :

$L = b$ largeur de la dent (ou largeur du contact) ;

F effort normal au contact de la dent ;

$\rho_1 = T1M$ et $\rho_2 = T2M$

b- Expression de la pression de contact maximale de référence

La pression de référence est la pression de Hertz maximum associée au primitif de fonctionnement.

En rappelant que : $\rho_1 = \frac{d_1}{2} \cdot \sin \alpha$; $\rho_2 = \frac{d_2}{2} \cdot \sin \alpha$ et F_t : effort tangentiel.

Et en posant :

$$u = \frac{Z_2}{Z_1} \rightarrow \text{rapport de réduction}$$

$$Z_E = 0,59 \cdot \sqrt{E} \rightarrow \text{facteur d'élasticité} (\nu = 0,3)$$

$$Z_H = \sqrt{\frac{2}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} \rightarrow \text{facteur géométrique}$$

On obtient :

$$\sigma_{HI} = Z_H \cdot Z_E \cdot \sqrt{\frac{F_t}{b \cdot d_1} \cdot \frac{u \pm 1}{u}}$$

Nota : Pour le cas des engrenages hélicoïdaux, il faut tenir compte de l'angle d'hélice β

On prend : $Z_H = \sqrt{\frac{2 \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}$ et on introduit un autre facteur :

$$Z_\beta = \sqrt{\cos \beta}$$

$$\sigma_{HI} = Z_\beta \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot \sqrt{\frac{F_t}{b \cdot d_1} \cdot \frac{u \pm 1}{u}}$$

c- Expression de la pression selon la méthode AFNOR : σ_{HO}

La pression de référence est la pression de Hertz maximum au primitif de fonctionnement. Les formules sont extrapolées à partir de données expérimentales issues d'essais. Le calcul s'applique à des engrenages cylindriques extérieurs à denture droite, hélicoïdale ou à chevrons.

$$\sigma_{HO} = Z_{\varepsilon} \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot \sqrt{\frac{Ft}{b \cdot d_1} \cdot \frac{u \pm 1}{u}}$$

$Z_{\varepsilon} \rightarrow$ facteur de conduite, il tient compte du rapport de conduite et de la possibilité de transmettre l'action tangentielle par plusieurs dents

Tableau des valeurs courantes du facteur d'élasticité Z_{ε}

| Pignon | | Roue | | Z_{ε} ($\sqrt{N/mm^2}$) |
|-----------------------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|--|
| Matériaux | E_1 (N/mm ²) | Matériaux | E_2 (N/mm ²) | |
| Acier forgé | 206 000 | Acier forgé | 206 000 | 190 |
| | | Acier moulé | 202 000 | 189 |
| | | Fonte sphéroïdale | 173 000 | 181 |
| | | Bronze à l'étain moulé | 103 000 | 155 |
| | | Bronze à l'étain centrifugé | 113 000 | 159 |
| | | Fonte grise | 125 000 | 165 |
| Acier moulé | 202 000 | Acier moulé | 202 000 | 188 |
| | | Fonte sphéroïdale | 173 000 | 180 |
| | | Fonte grise | 113 000 | 159 |
| Fonte sphéroïdale | 173 000 | Fonte sphéroïdale | 173 000 | 174 |
| | | Fonte grise | 113 000 | 155 |
| Fonte grise à graphite lamellaire | 113 000 | Fonte grise | 113 000 | 140 |

d- Pression dynamique de contact

Il est nécessaire de corriger σ_{HO} , pour tenir compte des surcharges dynamiques au niveau du contact, avec des facteurs de pondération déterminés expérimentalement.

Facteur de correction :

$K_A \rightarrow$ *facteur d'application*, il tient compte des surcharges extérieures à l'engrenage dues aux moteur et récepteur.

$K_V \rightarrow$ *facteur dynamique*, il tient compte des surcharges dynamiques dues aux vibrations relatives du pignon et de la roue. L'abaque suivant permet de le déterminer à partir de la classe de précision de l'engrenage et de la vitesse tangentielle.

$K_{H\beta} \rightarrow$ *facteur de distribution de la charge longitudinale*, il tient compte des effets dus à une mauvaise distribution de la charge le long de la denture.

$K_{H\alpha} \rightarrow$ *facteur de distribution de la charge transversale*, il tient compte de la charge sur plusieurs dents et de l'erreur sur le pas.

Facteur de correction :

$$\sigma_H = \sigma_{HO} \sqrt{K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}}$$

Condition de résistance à la pression superficielle :

La pression dynamique de contact σ_H devra être inférieure à la limite d'endurance à la pression superficielle du matériau σ_{Hlim} pondérée par des facteurs prenant en compte les conditions d'utilisation et de fabrication des engrenages :

$$\sigma_H \leq \frac{\sigma_{Hlim}}{\sqrt{K_R}} \cdot Z_N \cdot Z_L \cdot Z_R \cdot Z_V \cdot Z_W$$

$K_R \rightarrow$ *facteur de fiabilité*.

$Z_N \rightarrow$ *facteur de durée*, il tient compte du nombre de cycles de mise en charge.

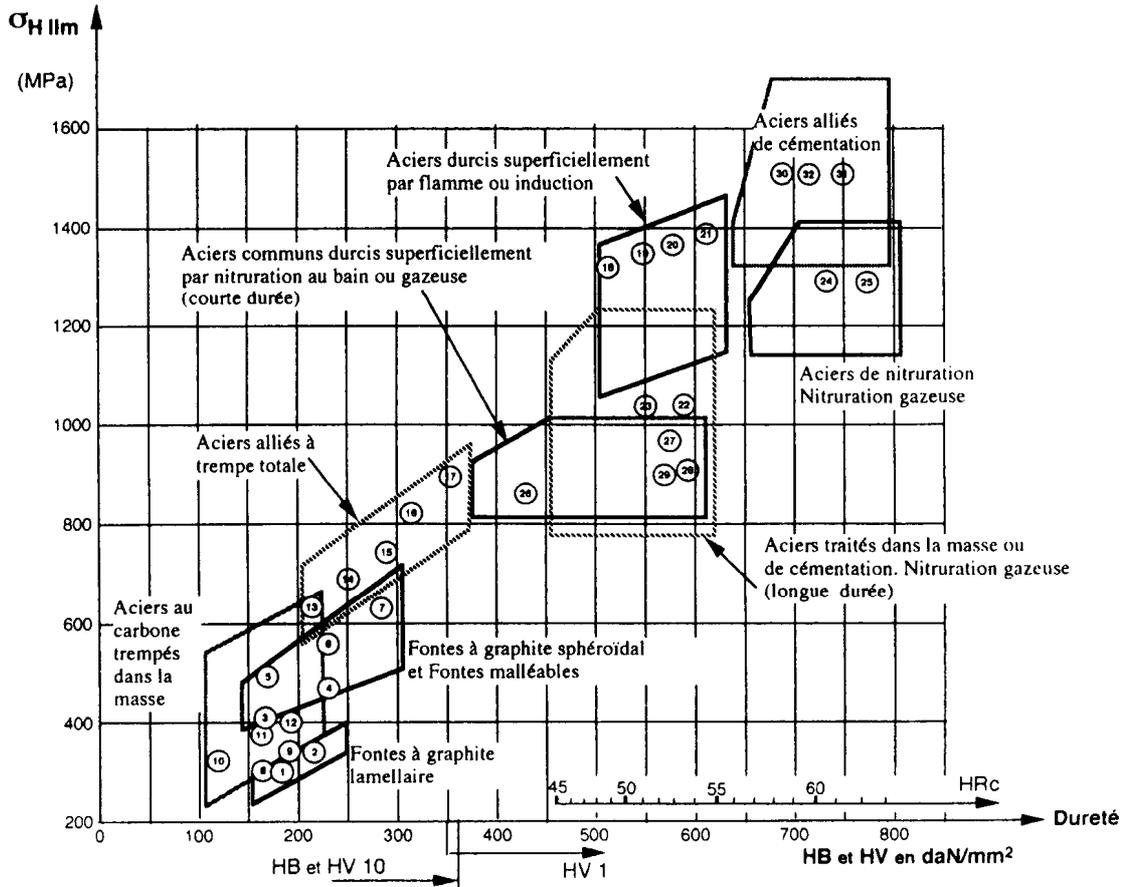
$Z_L \rightarrow$ *facteur de lubrifiant*, il tient de l'influence de la viscosité de l'huile employée.

$Z_R \rightarrow$ *facteur de rugosité*, il tient compte de l'influence de la rugosité des flancs de dents sur la capacité de charge.

$Z_V \rightarrow$ *facteur de vitesse*, il tient compte de l'effet de la vitesse sur la formation du film d'huile.

$Z_W \rightarrow$ *facteur de rapport de dureté entre le pignon et la roue*, il tient compte de l'écaillage superficiel de la roue lorsqu'elle engrène avec un pignon durci superficiellement.

La valeur limite est donnée en fonction de la nature du matériau et de sa dureté Brinell superficielle.



e- Effort tangentiel admissible Ft_{lim} .

L'effort tangentiel admissible au primitif de référence par le pignon ($i = 1$) et la roue ($i = 2$) est donné par :

$$Ft_{adm(i)} = \sigma_{H\lim(i)}^2 \cdot b \cdot d_1 \cdot \left(\frac{u}{u \pm 1} \right) \cdot \left(\frac{1}{K_A \cdot K_R \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}} \right) \cdot \left(\frac{Z_{N(i)} \cdot Z_L \cdot Z_R \cdot Z_V \cdot Z_W}{Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta} \right)^2$$

| N° | Matériau | Composition Désignation | Dureté à cœur | Dureté en surface |
|-----|--|-------------------------|---------------|-------------------|
| 1 | Fontes grises | Ft 20 | HB 170 | HB 170 |
| 2 | | Ft 25 | HB 210 | HB 210 |
| 3 | Fontes malléables | MB 35 | HB 140 | HB 140 |
| 4 | | MB 65 | HB 235 | HB 235 |
| 5 | Fontes à graphite sphéroïdal | FGS 42 | HB 170 | HB 170 |
| 6 | | FGS 60 | HB 250 | HB 250 |
| 7 | | FGS 100 | HB 300 | HB 300 |
| 8 | Aciers moulés non alliés | A-48 M | HB 150 | HB 150 |
| 9 | | A-56 M | HB 175 | HB 175 |
| 10 | Aciers de construction forgés non alliés | C.40 | HB 120 | HB 120 |
| 11 | | C.50 | HB 150 | HB 150 |
| 12 | | C.60 | HB 180 | HB 180 |
| 13 | Aciers alliés traités dans la masse (trempe et revenu) | XC.48–XC.55 | HV 10 : 185 | HV 10 : 185 |
| 14 | | 35 CD 4 | HV 10 : 250 | HV 10 : 250 |
| 15 | | 42 CD 4 | HV 10 : 280 | HV 10 : 280 |
| 16 | | 35 NCD 6 | HV 10 : 310 | HV 10 : 310 |
| 17a | | 30 CDN 8 | HV 10 : 350 | HV 10 : 350 |
| 17b | | 35 NCD 12 | HV 10 : 360 | HV 10 : 350 |
| 18 | Aciers traités dans la masse. Durcis superficiellement à la flamme ou par induction | XC.45–XC.55 | HV 10 : 220 | HV 10 : 530 |
| 19 | | 35 CD 4 | HV 10 : 250 | HV 10 : 560 |
| 20 | | 42 CD 4 | HV 10 : 280 | HV 10 : 620 |
| 21 | | 35 NCD 6 | HV 10 : 310 | HV 10 : 610 |
| 22 | Aciers traités dans la masse Cémentation et Nitruration gazeuse de longue durée | 42 CD 4 | HV 10 : 280 | HV 10 : 580 |
| 23 | | 16 MC 5 | HV 10 : 270 | HV 10 : 530 |
| 24 | Aciers de nitruration Nitruration gazeuse de longue durée | 31 CDV 9 | HV 10 : 320 | HV 10 : 700 |
| 25 | | 14 CDV 6, 9 | | |
| 26 | Aciers traités dans la masse ou aciers de cémentation Nitruration au bain ou gazeuse de courte durée | XC 45 nitruré | HV 10 : 200 | HV 1 : 400 |
| 27 | | 16 MC 5 nitruré | | |
| 28 | | 42 CD 4 trt d m | | HV 1 : 550 |
| 29 | | 16 MC 5 trt d m | | à 600 |
| 30 | Aciers alliés de cémentation Cémentés et trempés de Mécanique Générale | 16 MC 5 . 20 MC 5 | | HRC : 58 |
| 31 | | 16 NC 6 | | à 62 |
| 32 | | 18 NCD 6 | | |

HB = Dureté Brinell

trt d m = traité dans la masse

HRC = Dureté Rockwell cône

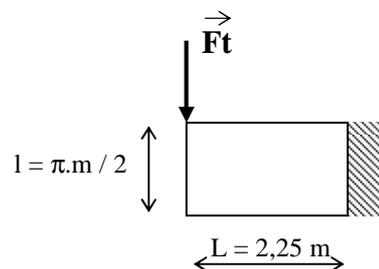
HV 1 = Dureté Vickers avec charge de 1daN

HV 10 = Dureté Vickers avec charge de 10daN

1.3.3- Dimensionnement de la denture à la rupture :

a- Hypothèses

- On suppose que l'effort $F_{1/2}$ est supporté par une seule dent (cas le plus défavorable qui ne tient pas compte du rapport de conduite \mathcal{E}_α).
- On suppose que la dent est encastrée dans la roue et qu'elle supporte un effort égal à l'effort tangentiel F_t appliquée au sommet de la dent. La dent est donc supposée soumise à une sollicitation de flexion simple.
- On assimile la dent à une poutre droite ayant pour hauteur la valeur de l'épaisseur de la dent au primitif.



b- Expression de la contrainte de base

La valeur de la contrainte au pied de la dent : $\sigma = \frac{Mf}{I/v}$

On obtient :
$$\sigma = 5,5 \cdot \frac{F_t}{b \cdot m}$$

Le modèle précédent a été mis en place avec des hypothèses très restrictives aussi bien concernant l'application de la charge que de la géométrie de la dent.

L'expression modifiée donne :

$$\sigma_F = Y_{Fa} \cdot Y_{sa} \cdot Y_\varepsilon \cdot \frac{F_t}{b \cdot m}$$

Y_{Fa} → *facteur de forme*, il tient compte de la géométrie de la denture et peut être déterminé par abaque.

Y_{sa} → *facteur de concentration de contrainte*, il tient compte de la concentration de contrainte due au congé de raccordement au pied de la dent.

Y_ε → *facteur de conduite*, il tient compte du fait que pendant l'engrènement deux couples de dents peuvent être en contact.

c- Contrainte autorisée en service

Comme pour la détermination de la pression de contact admissible par le matériau il est nécessaire de pondérer σ_F à l'aide de facteurs prenant en compte les conditions de service :

$$\sigma_a = \sigma_F \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta}$$

$K_A \rightarrow$ *facteur d'application.*

$K_V \rightarrow$ *facteur dynamique.*

$K_{F\beta} \rightarrow$ *facteur de distribution de la charge longitudinale, $K_{F\beta} = K_{H\beta}$.*

$K_{F\alpha} \rightarrow$ *facteur de distribution de la charge transversale, $K_{F\alpha} = K_{H\alpha}$.*

d- Contrainte admissible par le matériau de la dent et condition de résistance

Il s'agit de corriger $\sigma_{F\text{lim}}$ du matériau avec des facteurs associés aux conditions de service.

$$\sigma_a \leq \frac{\sigma_{F\text{lim}}}{K_R} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT} \cdot Y_{\delta\text{rel.T}} \cdot Y_{R\text{rel.T}} \cdot Y_X$$

$K_R \rightarrow$ *facteur de fiabilité.*

$Y_{ST} \rightarrow$ *facteur de concentration de contrainte.*

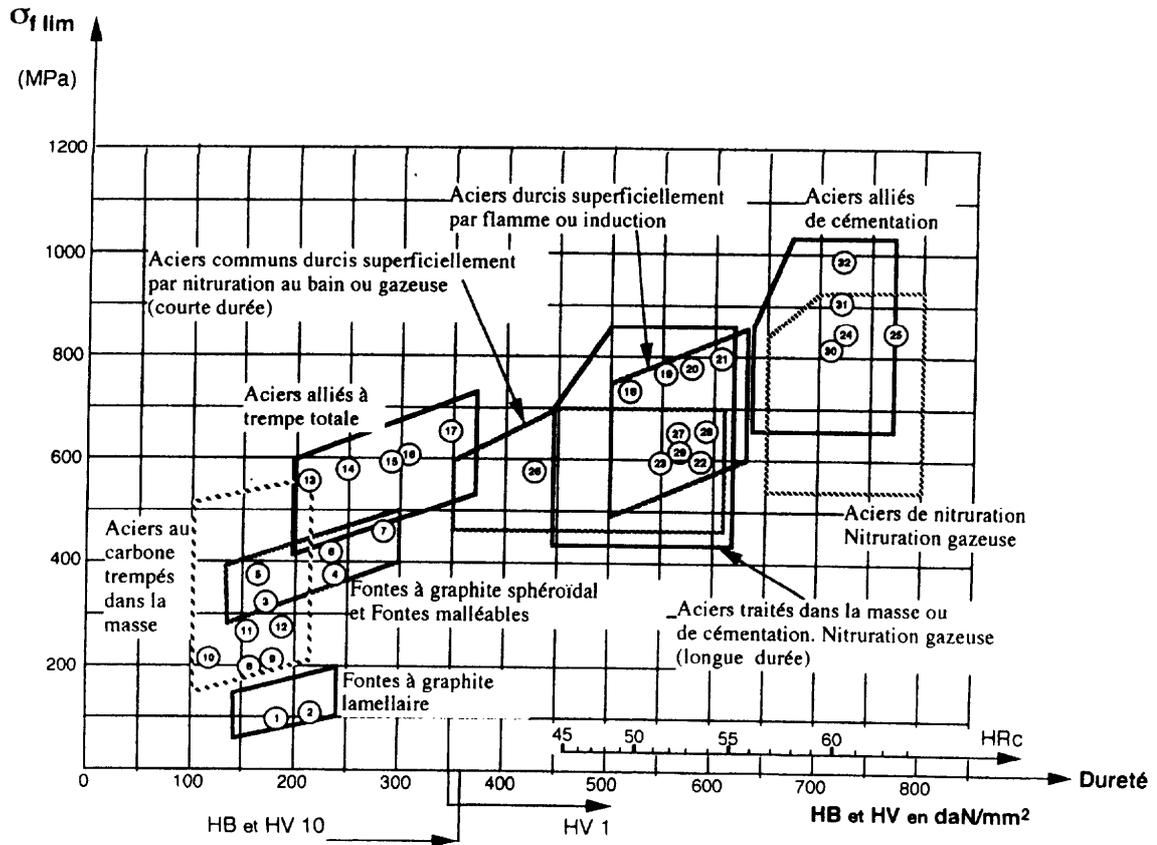
$Y_{NT} \rightarrow$ *facteur de durée, il permet d'augmenter la contrainte si on réduit la durée de vie.*

$Y_{\delta\text{rel.T}} \rightarrow$ *facteur relatif d'entaille, des essais ont montré qu'en présence d'une entaille le matériau s'adaptait : la réduction de la résistance à la fatigue donnée par le coefficient de contrainte est trop importante, on la corrige avec ce facteur.*

$Y_{R\text{rel.T}} \rightarrow$ *facteur de rugosité relatif, il permet de prendre en compte l'influence de la rugosité de raccordement sur sa tenue en fatigue.*

$Y_X \rightarrow$ *facteur de dimension, il tient compte de la diminution de la limite d'endurance due aux difficultés liées à l'élaboration et au traitement de pièces de grandes dimensions.*

$\sigma_{Flim} \rightarrow$ limite d'endurance nominale à la flexion.



e- Effort transmissible à la rupture

$$F_t \leq F_{t\text{ admissible}} = \frac{\sigma_{Flim} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT} \cdot Y_{\delta rel.T} \cdot Y_{Rrel.T} \cdot Y_X \cdot b \cdot m}{K_R \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta} \cdot Y_{Fa} \cdot Y_{sa} \cdot Y_{\epsilon}}$$

f- Contrôle simplifié de la dent à la rupture

En utilisant les hypothèses formulées au paragraphe a et en négligeant les facteurs de correction, on aboutit à une relation très simple. Elle peut être utilisée en avant projet pour dimensionner ou pour vérifier des engrenages peu chargés.

$$m \geq 2,34 \cdot \sqrt{\frac{F_t}{k \cdot Rpe}}$$

F_t en N
 m en mm
 Rpe en MPa

Le coefficient $k=b/m$ dépend de la précision de la denture et de la position de la roue sur l'arbre (précision, flexion).

Valeurs moyennes admises :

$4 \leq k \leq 6$ pour des dentures brutes de coulée ou découpées

$8 \leq k \leq 12$ pour des dentures taillées.

Méthode de vérification ISO simplifiée :

$$R_{pe} \geq \frac{F_t \cdot Y_F}{k \cdot m^2 \cdot \epsilon_\alpha \cdot K_v \cdot K_{bL}}$$

- avec :
- R_{pe} : résistance pratique du matériau constituant la denture en MPa.
 - F_t : effort tangentiel en N.
 - m : module en mm.
 - k : coef de largeur de denture
 - ϵ_α : rapport de conduite (voir abaque).
 - Y_F : facteur de forme de la denture (voir abaque).
 - K_v : facteur de vitesse (voir tableau).
 - K_{bL} : facteur de durée (voir abaque).

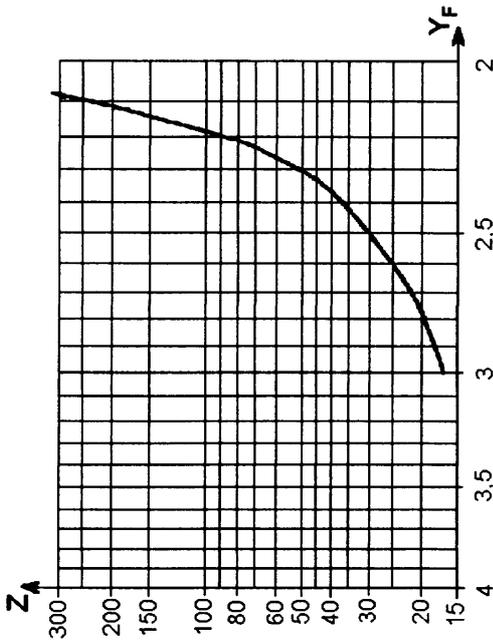
- Facteur de vitesse :

Celui-ci dépend pour beaucoup de la précision de taillage des dentures :

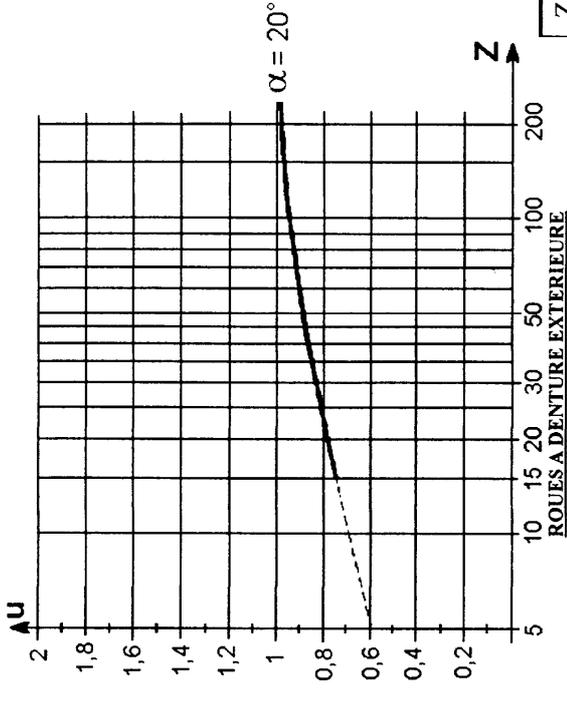
- **Classe I** : $K_v = 1$ Dentures de très grande précision, pour engrenages à grandes vitesses de rotation ($v < 100$ m/s)
- **Classe II** : $K_v = \frac{12}{12 + \sqrt{v}}$ Dentures de précision ($v < 50$ m/s)
- **Classe III** : $K_v = \frac{6}{6 + \sqrt{v}}$ Dentures de bonne qualité ($v < 20$ m/s)
- **Classe IV** : $K_v = \frac{3}{3 + \sqrt{v}}$ Dentures de qualité médiocre ($v < 10$ m/s)

- Facteur de forme :

Ce coefficient dépend du nombre de dents Z donc de l'épaisseur de la dent à l'encastrement, ainsi que de la hauteur (h) de la dent.

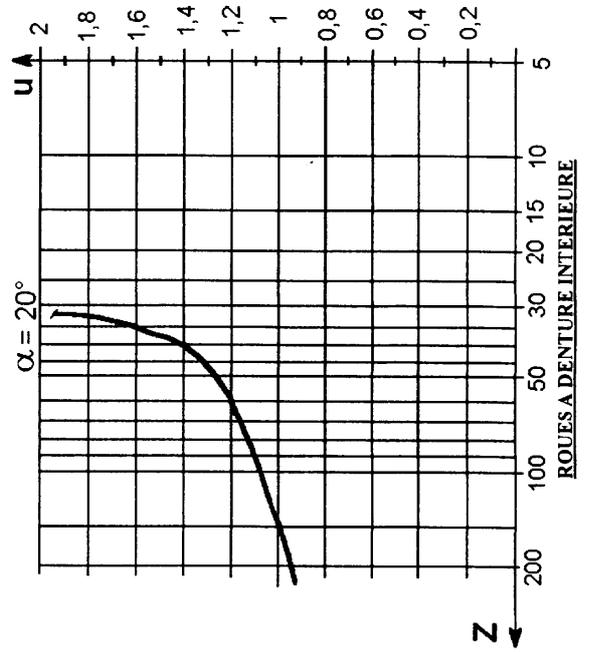
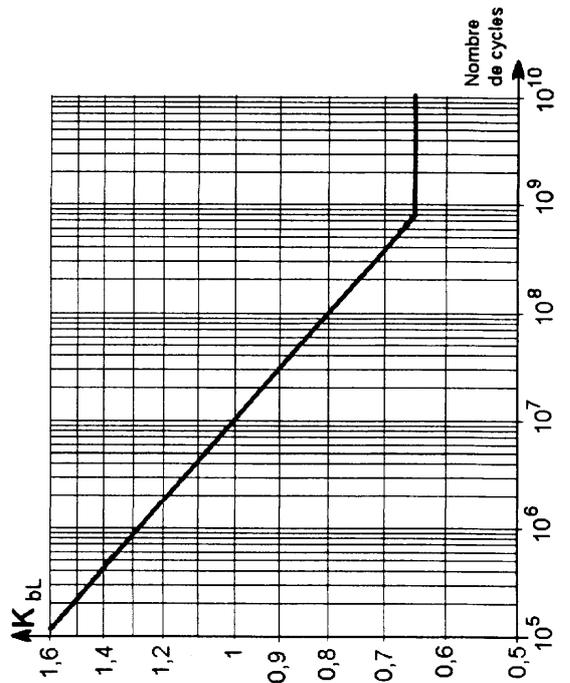


- Abaque de détermination du rapport de conduite :



$Z_1 \rightarrow u_1$
 $Z_2 \rightarrow u_2$
 donc :
 $\epsilon \alpha = u_1 + u_2$

- Facteur de durée :



2- Les arbres

2.1- Définition

Les arbres sont des pièces mécaniques de section généralement circulaire. On trouve deux familles principales d'arbres :

- ceux qui transmettent un couple entre les éléments de transmission qu'ils supportent : poulies ; engrenages ...
- ceux qui ne transmettent pas de couple et qui sont désignés sous le nom d'axes, ils servent principalement de support d'organes mécaniques ou bien d'axes d'articulation.

2.2- Calcul de prédétermination d'un arbre

Les charges appliquées aux arbres, leur fréquence de rotation ; entraînent des contraintes, des déformations et des vibrations qu'il faut limiter pour avoir un fonctionnement satisfaisant et durable des mécanismes dans lesquels ils s'insèrent.

Le calcul de prédétermination d'un arbre se fait :

- à partir d'un calcul classique de R.D.M : à la résistance, à la déformation ;
- à partir de la théorie de la fatigue ;
- à partir d'un calcul aux vibrations (non traité dans ce cours).

Ces calculs faits, on dispose d'un diamètre minimal pour l'arbre, ce n'est pas forcément le diamètre réellement choisi, car l'environnement technologique peut imposer de plus grandes dimensions et des formes spécifiques.

Suivant la destination de l'arbre, tous les critères de calcul ne seront pas nécessairement utilisés. Un arbre de forte capacité sera en premier lieu calculé à la résistance. Par contre, on commencera par faire un calcul à la vitesse critique pour un arbre de turbine de turbo-compresseur qui tourne à des vitesses très élevées.

2.3- Éléments nécessaires au calcul statique des arbres

2.3.1- Efforts extérieurs appliqués à un arbre

En générale, on connaît la nature des éléments réalisant la liaison pivot ainsi que la nature des efforts appliqués aux différents organes liés à l'arbre.

Il faut donc :

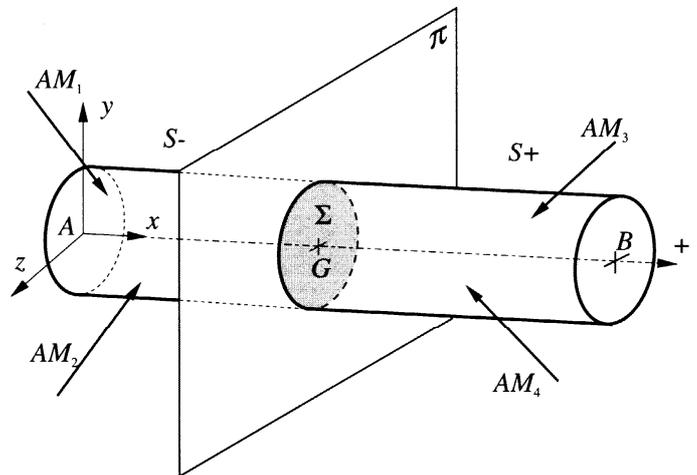
- Modéliser la liaison pivot entre l'arbre et le bâti par un schéma architectural ;
- Déterminer les efforts extérieurs appliqués à l'arbre par l'application du principe fondamental de la statique ou de la dynamique selon l'importance des effets d'inertie.

2.3.2- Recherche des sollicitations appliquées à l'arbre : Torseur des efforts intérieurs

a- Principe de mise en évidence d'une action mécanique interne.

Soit une poutre S , en équilibre sous l'effet d'actions mécaniques extérieures modélisées par le torseur $\{\tau_{AM_{ext.}}\}$.

Pour mettre en évidence les efforts transmis par la matière au niveau de la section droite Σ , nous effectuons une coupure imaginaire par le plan P de la poutre S . Il la sépare en deux tronçons T_1 (à gauche) et T_2 (à droite) qui sont tous deux en équilibre.



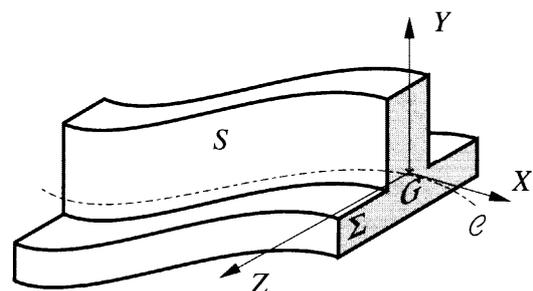
CONVENTION :

Les actions mécaniques de cohésions au niveau de la surface Σ sont celles exercées par le tronçon T_2 (à droite) sur le tronçon T_1 (à gauche).

b- Repère local au niveau de la coupure.

Le repère local au niveau de la coupure, (G, X, Y, Z) , est défini de la manière suivante:

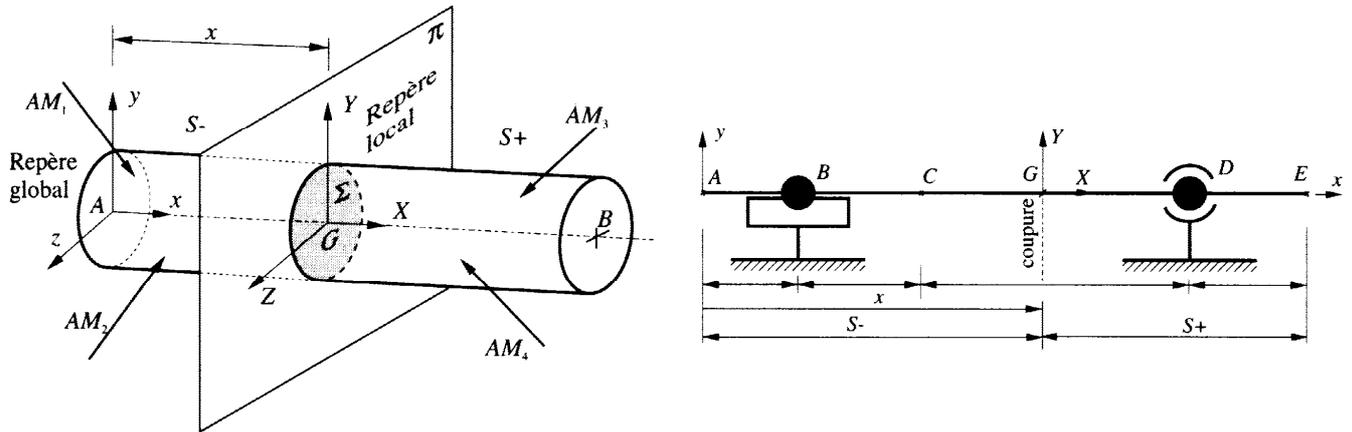
- G: barycentre de Σ ,
- X: vecteur unitaire tangent à la ligne moyenne (C),
- Y et Z: axes principaux de la surface Σ (axes de symétrie s'ils existent),
- (G, X, Y, Z) est un repère orthonormé direct.



c - Détermination du torseur des actions mécaniques de cohésion.

Le torseur des actions mécaniques de cohésion, $\{\tau_{coh.}\}$, au niveau de la section droite Σ représente *globalement* les actions mécaniques exercées par le tronçon T_2 (à droite) sur le tronçon T_1 (à gauche).

Pour déterminer ce torseur, deux possibilités nous sont offertes.
Prenons l'exemple suivant :



1^{ère} possibilité Etudions l'équilibre de la partie gauche.

$$\{T(\bar{S} - / S -)\} = \{T(AM_1 / S -)\} + \{T(AM_2 / S -)\} + \{T(S + / S -)\}$$

$$\text{donc on peut écrire } \{T(\bar{S} - / S -)\} = \{T(AM_{ext} / S -)\} + \{T(S + / S -)\}$$

$$\text{Le principe fondamental de la statique donne } \{T(\bar{S} - / S -)\} = \{0\}$$

$$\text{On en déduit : } \{T(S + / S -)\} = -\{T(AM_{ext} / S -)\}$$

2^{ème} possibilité Etudions l'équilibre de la partie droite.

D'une manière analogue, étudions l'équilibre de la partie droite $S+$.

$$\{T(\bar{S} + / S +)\} = \{T(AM_{ext} / S +)\} + \{T(S - / S +)\} = \{0\}$$

$$\text{d'où } \{T(S - / S +)\} = -\{T(AM_{ext} / S +)\}$$

$$\text{On en déduit : } \{T(S + / S -)\} = \{T(AM_{ext} / S +)\}$$

d- Torseur des actions mécaniques de cohésion.

On l'exprime impérativement au point \mathbf{G} , barycentre de Σ , et on le projette sur la base locale $(\mathbf{G}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$.

Ces composantes se notent conventionnellement comme suit :

$$\{\tau_{\text{coh.}}\}_G = \begin{Bmatrix} N & Mt \\ Ty & Mfy \\ Tz & Mfz \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

N : effort normal.

T_y : effort tranchant suivant Y

T_z : effort tranchant suivant Z

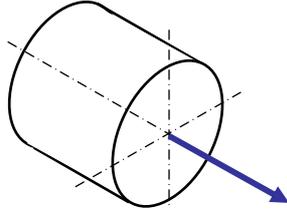
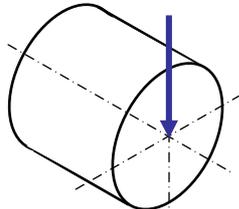
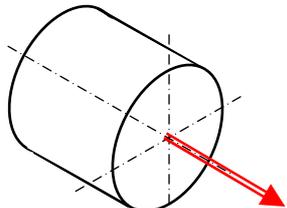
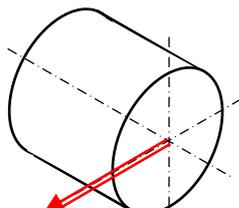
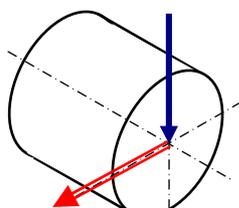
M_t : moment de torsion.

M_{fy} : moment fléchissant suivant Y .

M_{fz} : moment fléchissant suivant Z .

2.3.3- Relation entre les composantes du torseur des efforts intérieurs et les contraintes

Classification des états de sollicitations simples

| $\{\tau_{coh.}\}$ | Désignation | Représentation de $\{\tau_{coh.}\}$ |
|--|----------------------|--|
| $G \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$ | Traction compression |  |
| $G \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$ | Cisaillement pur |  |
| $G \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$ | Torsion simple |  |
| $G \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$ | Flexion pure |  |
| $G \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_Y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$ | Flexion simple |  |

Répartition des contraintes dans S

| Sollicitation | Répartition des contraintes | Contraintes (en MPa) |
|---------------------|-----------------------------|---|
| Traction | | $\sigma_M = \frac{N}{S}$ $\sigma_M = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$ |
| Cisaillement simple | | $\tau_M = \frac{T}{S}$ |
| Torsion simple | | $\tau_M = \frac{Mt}{I_0} \cdot \rho$ <p style="text-align: center;">ρ : distance du point M à la fibre neutre</p> $\theta = \frac{Mt}{G \cdot I_0}$ |
| Flexion simple | | $\sigma_M = \frac{-M f_{Gz}}{I_{Gz}} \cdot y$ |

Valeur de moments quadratiques particuliers

| Sections (S) Caractéristiques | | | | | | |
|-----------------------------------|----------------------------|------------------|----------------------------|----------------------|------------------------------|-------------------------------|
| I_{Gy} | $\frac{hb^3}{12}$ | $\frac{a^4}{12}$ | $\frac{hb^3 - h'b'^3}{12}$ | $\frac{\pi d^4}{64}$ | $\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$ | $0,784 ab^3$ |
| I_{Gz} | $\frac{bh^3}{12}$ | $\frac{a^4}{12}$ | $\frac{bh^3 - b'h'^3}{12}$ | $\frac{\pi d^4}{64}$ | $\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$ | $0,784 a^3 b$ |
| $I_0 = I_G$ | $\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$ | $\frac{a^4}{6}$ | $I_{Gy} + I_{Gz}$ | $\frac{\pi d^4}{32}$ | $\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$ | $\frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2)$ |
| Module de flexion * μ_{Gy} | $\frac{hb^2}{6}$ | $\frac{a^3}{3}$ | $\frac{bh^3 - b'h'^3}{6b}$ | $\frac{\pi d^3}{16}$ | $\frac{\pi}{16D}(D^4 - d^4)$ | $0,784 ab^2$ |
| Module de flexion * μ_{Gz} | $\frac{bh^2}{6}$ | $\frac{a^3}{3}$ | $\frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$ | $\frac{\pi d^3}{16}$ | $\frac{\pi}{16D}(D^4 - d^4)$ | $0,784 ba^2$ |

2.3.4- Contrainte équivalente dans un arbre

La majorité des arbres est soumise à des sollicitations composées. L'état réel des contraintes ne peut être directement comparé aux caractéristiques mécaniques des matériaux, connues partir d'essais de résistance en traction.

Pour pouvoir calculer un arbre, la méthode consiste à utiliser une contrainte équivalente notée σ_{eq} .

a- Matériaux fragiles

Le critère est celui de la plus grande contrainte principale : **Critère de Rankine**.
Ce critère spécifie qu'il se produit une défaillance du matériau lorsque la plus grande des contraintes principales atteint une valeur limite fixée.

En un point de la section droite d'un arbre la contrainte équivalente est égale à :

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{tx} + \sigma_{fx}) + \sqrt{(\sigma_{tx} + \sigma_{fx})^2 + 4(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)} \right]$$

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{2} \left[\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \right]$$

b- Matériaux ductiles

Dans ce cas on utilise soit le **Critère de Treska**, soit le **Critère de Von Mises**.
Pour ces deux critères, on suppose que les matériaux ont la même résistance élastique en traction et en compression.

Critère de Treska

Il est utilisé pour les aciers doux et les alliages légers.

Ce critère stipule que la défaillance du matériau se produit lorsque le cisaillement maximal atteint une valeur limite fixée.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{(\sigma_{tx} + \sigma_{fx})^2 + 4(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}$$

Critère de Von Mises

Ce critère est très utilisé pour l'ensemble des matériaux métalliques.

Il est basé sur l'hypothèse que la défaillance du matériau se produit lorsque l'énergie de variation de forme atteint une valeur limite fixée.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{(\sigma_{tx} + \sigma_{fx})^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2}$$

avec :

- σ_{tx} → Contrainte normale due à l'effort normal ;
- σ_{fx} → Contrainte normale due au moment de flexion ;
- τ_{xy} → Contrainte tangentielle due au moment de torsion ;
- τ_{xz} → Contrainte tangentielle due à l'effort tranchant.

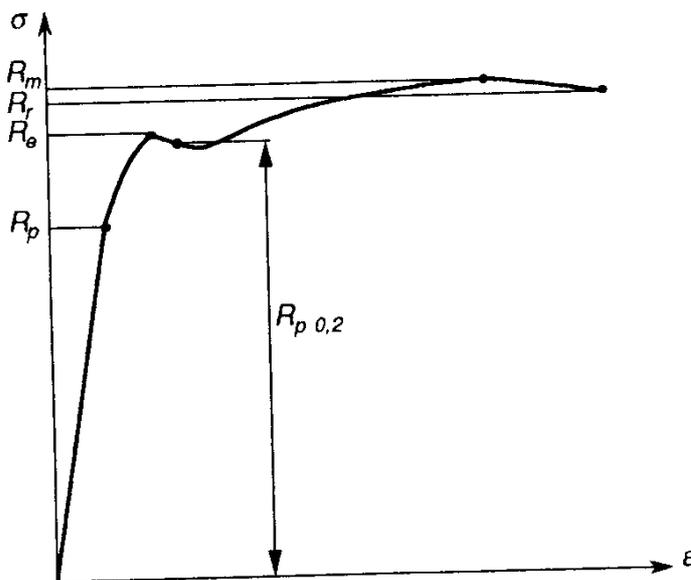
Remarque : La valeur de τ_{xz} est donnée à partir d'un modèle de répartition uniforme des contraintes sur une corde parallèle au plan neutre de flexion. Cette hypothèse, simple, n'est pas très réaliste dans le cas des sections circulaires.

D'autre part, l'expérience montre que sa contribution réelle est faible, ce qui conduit souvent, à la négliger.

2.3.5- Coefficient de sécurité

a- limite de tenue

Pour conclure quant à la tenue d'une pièce il faut se fixer une limite, c'est à dire un état où le comportement du matériau change. Pour le calcul des pièces, on fait référence aux états limites habituels de la traction.



Limites conventionnelles de la traction

R_p → limite de proportionnalité, limite du comportement linéaire du matériau (pour certains matériaux cette limite est marquée).

R_e → limite apparente d'élasticité, seuil d'écoulement plastique (bien marqué sur les diagrammes dans le cas des matériaux ductiles).

$R_{p0,2}$ → limite conventionnelle d'élasticité, en principe cette valeur est utilisée pour les arbres de transmission.

R_m → résistance à la traction, correspond à la contrainte nominale la plus élevée supportée par l'éprouvette. Cette valeur sera utilisée pour estimer la limite d'endurance à la fatigue.

R_r → limite à la rupture, correspond à la contrainte de rupture de l'éprouvette.

b- Concentrations de contraintes

Si la pièce présente des discontinuités de formes (entailles, épaulements, rainure, trous ...), les contraintes réelles présentes en ces zones sont beaucoup plus importantes que les contraintes obtenues à partir des calculs précédemment cités.

Ce phénomène local est appelé : **phénomène de concentration de contraintes**.

Le coefficient de concentration de contraintes K_t est défini comme étant le rapport :

$$K_t = \frac{\sigma_r}{\sigma} = \frac{\text{Contrainte réelle dans la section considérée}}{\text{Contrainte nominale dans la section considérée}}$$

Le coefficient K_t ne dépend que du mode de sollicitations et de la géométrie de la discontinuité.

On notera K_{tt} , K_{tf} , K_{to} les coefficients d'entailles relatifs aux sollicitations de traction, flexion et torsion.

K_t est toujours supérieur à 1. Il est déterminé à partir de la théorie de l'élasticité. Lorsque la géométrie des discontinuités est complexe on utilise la photoélasticité ou des logiciels de calcul du type éléments finis.

c- Condition de résistance

$$\sigma_{eq} \leq \frac{R_e}{S_e} ; \sigma_{eq} \leq \frac{Rp_{0,2}}{S_{p0,2}} ; \sigma_{eq} \leq \frac{R_r}{S_r} ; \sigma_{eq} \leq \frac{R_m}{S_m}$$

S_i : coefficient de sécurité

2.4- Éléments nécessaires au calcul à la fatigue des arbres

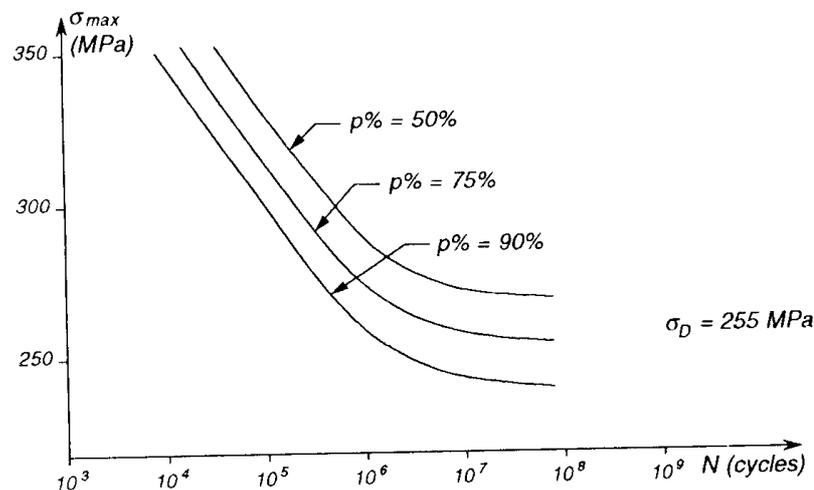
2.4.1- La fatigue des pièces mécaniques

La plupart des pièces mécaniques au cours de leur fonctionnement sont soumises à des sollicitations variables dans le temps. Ce type de sollicitations entraîne des variations cycliques des contraintes.

Pour ces pièces, on constate que la rupture se produit au bout d'un nombre de cycles N , pour une amplitude de contrainte inférieure à la contrainte de rupture statique m du matériau utilisé, c'est le phénomène de fatigue.

La fatigue est un phénomène aléatoire, les valeurs données sont des valeurs moyennes de probabilité de survie $p\%$.

Etude du CETIM : Essai de fatigue à différents niveaux de contraintes



Acier XC 10

Austénitisation 900°C 30 min
 Revenu 500°C 2 h
 $R_e = 305$ N/mm²
 $R_m = 400$ N/mm²

Flexion rotative ($R_\sigma = -1$)
 100 Hz, essai à l'air
 Éprouvette FR9 $S = 45,6$ mm²
 $K_t = 1,03$

On peut envisager l'objectif de l'étude de la fatigue d'une pièce de deux manières différentes :

- a- **Soit pour un calcul de vérification** : A partir de caractéristiques géométriques, mécaniques et des conditions d'emploi connues, on vérifie que la durée de vie réelle est supérieure à la durée de vie souhaitée. On définit ainsi un coefficient de sécurité.
- b- **Soit pour un calcul de création** : Les conditions d'emploi (contraintes maximales et nombres de cycles d'utilisation) étant connues, on recherche les dimensions minimales à donner à la pièce, pour un coefficient de sécurité fixé au préalable.

2.4.2- Paramètres et Hypothèses.

Paramètres essentiels intervenant dans le calcul d'une pièce mécanique à la fatigue :

- Les matériaux utilisés ;
- Les fluctuations des contraintes
- Le nombre c cycles et le pourcentage de survie $p\%$;
- Le type de sollicitations appliquées ;
- La géométrie de la pièce.

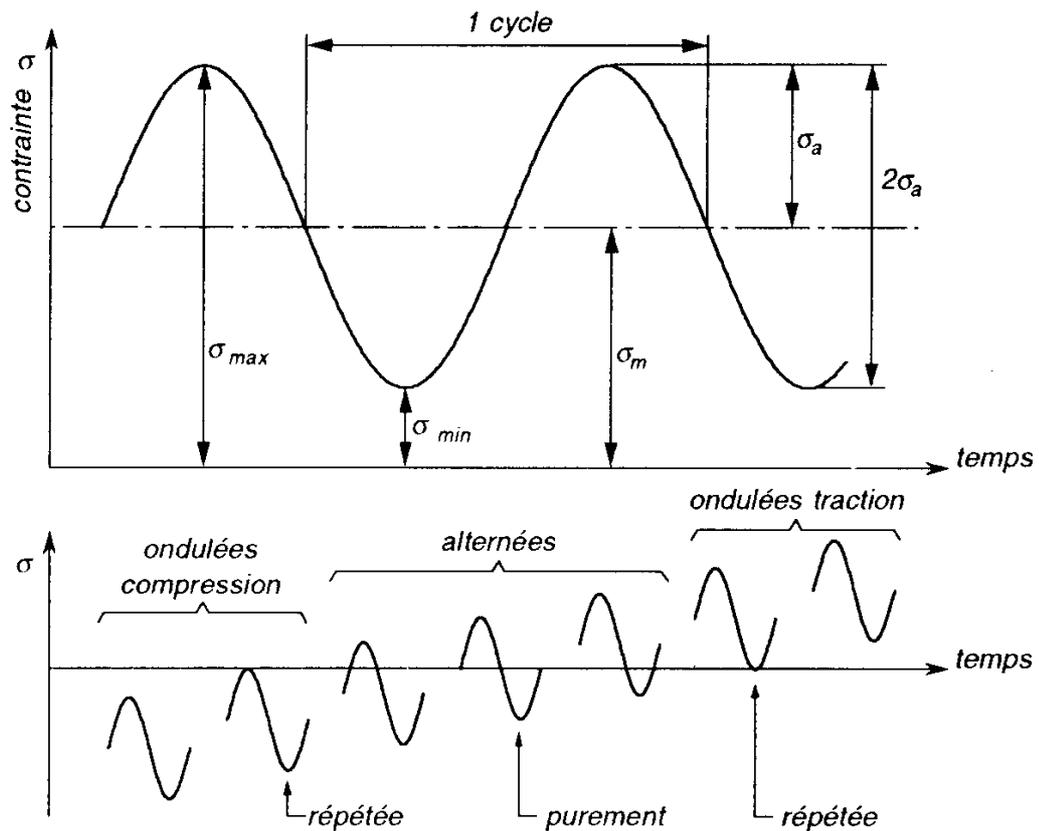
Hypothèses : les résultats présentés dans cette étude sont adaptés aux aciers, mais avec quelques restrictions, ils peuvent être généralisés à l'ensemble des matériaux métalliques et aux alliages légers.

2.4.3- Modélisation de la contrainte..

Lorsqu'une pièce est soumise à des sollicitations variables au cours du temps, il en résulte des contraintes qui fluctuent. Ans la pratique, pour le calcul, on modélise ces fluctuations de manière sinusoïdale :

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t$$

- σ : contrainte nominale à un instant t , calculé à partir de la théorie de la RDM sans prendre en compte les concentrations de contraintes ;
- σ_m : contrainte moyenne $\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$;
- σ_a : amplitude de la contrainte $\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$;
- ω : période de $\sigma(t)$.



Suivant la valeur de la contrainte moyenne, on a un :

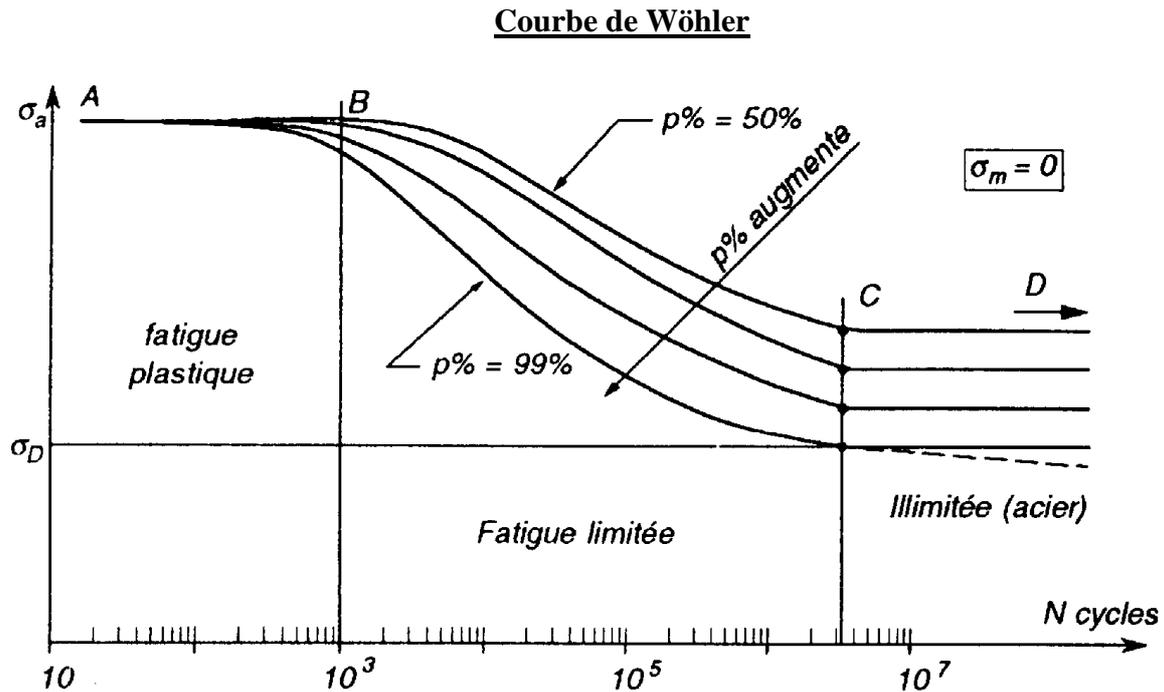
- ❑ contrainte purement alternée : $\sigma_m = 0, \sigma_a \neq 0$;
- ❑ contrainte alternée : $\sigma_{max} > 0, \sigma_{min} < 0$;
- ❑ contrainte répétée en traction ou en compression : $\sigma_{max} = 0$ ou $\sigma_{min} = 0$;
- ❑ contrainte ondulée : en compression $\sigma_{max} > 0$ / en traction $\sigma_{min} > 0$.

2.4.3- Endurance d'une pièce.

a- Courbe de Wöhler

La contrainte admissible en fatigue peut être caractérisée par les courbes de Wöhler, elles sont issues de très nombreux résultats expérimentaux, en flexion rotative, appliquée à une éprouvette en acier.

Ces courbes représentent, pour $\sigma_m = 0$, l'évolution de la contrainte alternée σ_a en fonction du nombre de cycles et de p% de survie



Courbes de Wöhler pour différents $p\%$ de survie

On observe trois zones :

- **la zone de fatigue plastique** : elle est comprise entre les points A et B, pour un nombre de cycles inférieur à 10^3 . La rupture de la pièce survient après un petit nombre de cycles, avec une déformation plastique importante pour une amplitude de contrainte voisine de la limite de rupture statique du matériau testé ;
- **la zone de fatigue limitée** : elle est comprise entre les points B et C. La rupture se produit pour un nombre de cycles d'autant plus élevé que l'amplitude de la contrainte est faible ;
- **le domaine d'endurance illimité** : cette partie comprise entre les points C et D ne s'applique qu'aux matériaux ferreux. Quand l'amplitude de la contrainte est en dessous d'un certain seuil, la rupture ne se produit plus par fatigue quel que soit le nombre de cycles.

Limite de fatigue : σ_D

C'est l'amplitude la plus grande de la contrainte σ_D pour laquelle il ne se produit pas de rupture quel que soit le nombre de cycles de sollicitation effectués sur la pièce. Cette limite n'existe que pour les métaux ferreux.

Lorsque la durée de vie souhaitée pour une pièce mécanique reste inférieure à la limite de fatigue, on utilise la limite d'endurance.

Limite de d'endurance : $\sigma_{D(N)}$, $\sigma_{D(N_i)}$

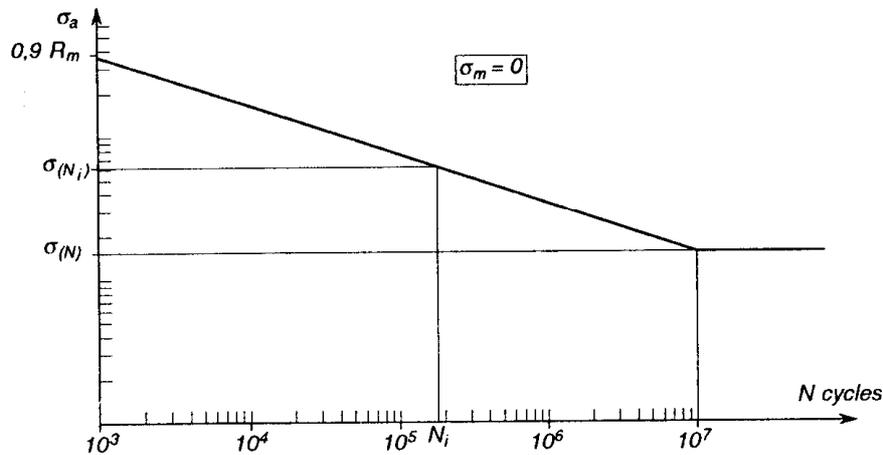
C'est l'amplitude pour laquelle il est constaté $p\%$ de survie pour une contrainte moyenne $\sigma_m = 0$, après un nombre de cycles N_i fixé.

Dans le cas des aciers, on utilise $N_i = 10^7$ cycles et on note la limite d'endurance $\sigma_{D(N)}$.

Représentation simplifiée des courbes de Wöhler

Cette représentation permet de déterminer :

- une limite d'endurance $\sigma_{D(N_i)}$ pour nombre de cycles N_i déterminé ;
- un nombre de cycles d'endurance N_i pour une limite d'endurance choisie.



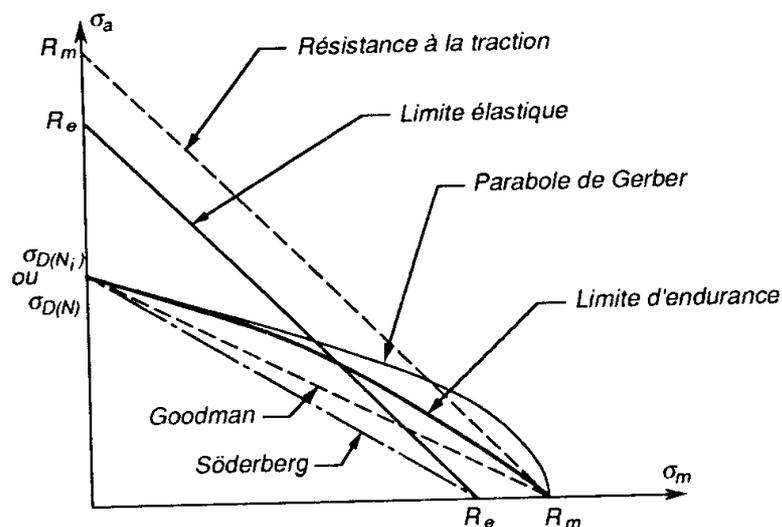
Conclusion

Dans les calculs d'arbre l'intérêt des courbes de Wöhler simplifiées est assez limité car la durée souhaitée est dans la plupart des cas largement supérieurs à 10^7 cycles.

De plus très peu de pièces d'un mécanisme sont soumises à des contraintes purement alternées ($\sigma_m = 0$). On doit alors utiliser les diagrammes d'endurance qui permettent alors de prendre en compte les contraintes pour lesquelles σ_m est différentes de zéro.

b- Diagrammes d'endurance

Les diagrammes d'endurance (d'abscisse σ_m et d'ordonnée σ_a) sont issus des courbes de Wöhler. Ils définissent l'ensemble de limites d'endurance $\sigma_{D(N)}$ en fonction de la valeur de la contrainte moyenne, pour un nombre de cycles déterminé



Une bonne approximation de tous les points expérimentaux est donnée par une parabole, appelée parabole de Gerber. On peut encore simplifier l'approximation en prenant soit la droite de Goodman, soit la droite de Söderberg. Cette dernière est utilisée lorsqu'on est amené à négliger certaines contraintes.

Pour l'étude en fatigue et pour définir un coefficient de sécurité des pièces mécaniques, on utilise deux types de diagrammes appelés diagrammes de Haigh.

Diagramme de Haigh, construction à partir de la droite de Goodman

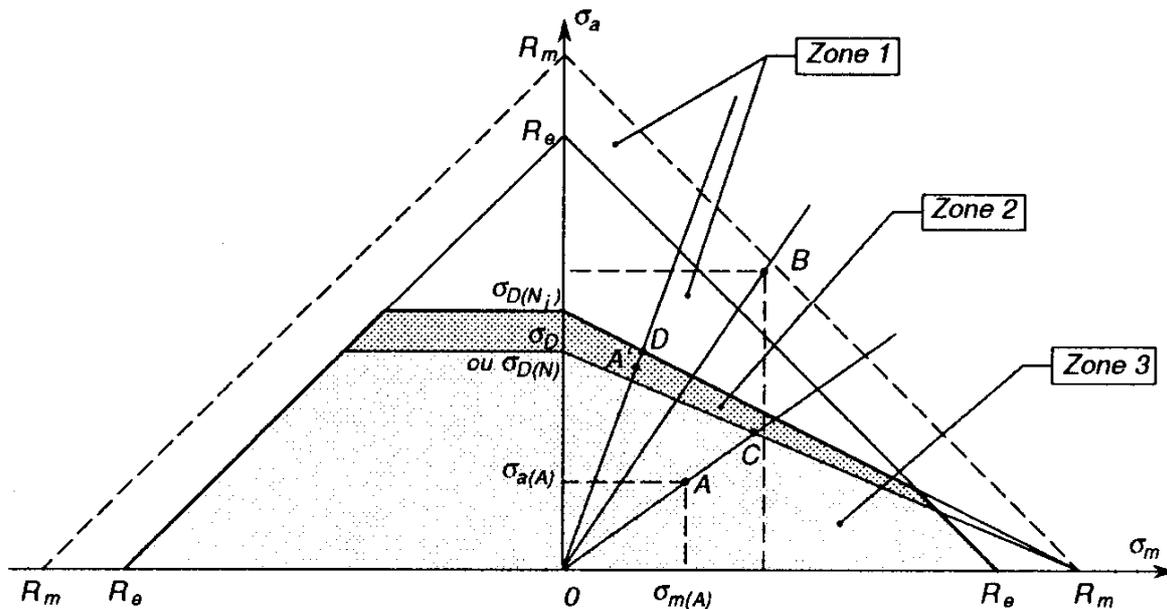
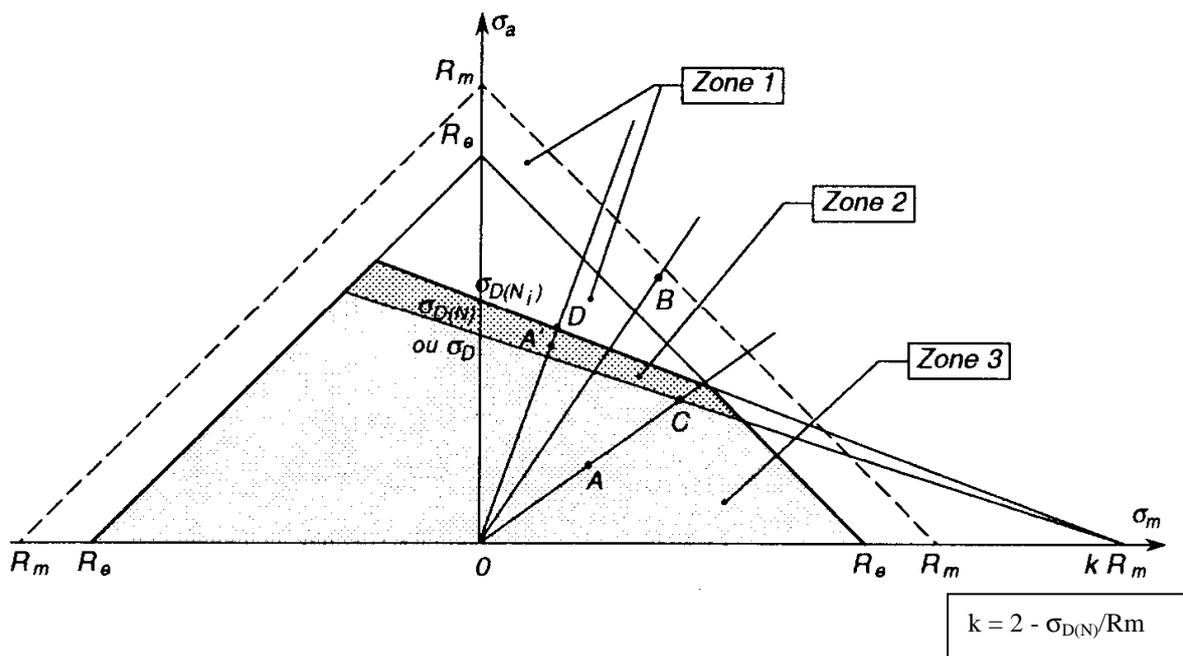


Diagramme de Haigh, construction à partir d'une ligne « approchant » la parabole de Gerber



Une contrainte définie par ses valeurs σ_a , σ_m est représenté dans chacun de ces diagrammes par un point qui peut occuper différentes positions. S'il est situé :

- Dans la zone 1 (blanche) : la pièce se rompra par fatigue, au bout d'un nombre de cycles inférieur à celui souhaité. C'est le cas pour une pièce dont la contrainte est définie par le point B ;
- Dans la zone 2 (gris foncé) : la pièce aura une durée de vie infinie si elle est en acier, et une durée de vie supérieure à la limite de fatigue, pour les autres matériaux. C'est le cas pour une pièce dont la contrainte est définie par le point A' ;
- Dans la zone 3 (gris clair) : la pièce aura une durée de vie comprise entre la limite de fatigue et la limite d'endurance choisie. C'est le cas pour une pièce dont la contrainte est définie par le point A ;

Conclusion

Pour établir ce type de diagramme, il faut connaître R_m , $\sigma_{D(N)}$ et éventuellement $\sigma_{D(N_i)}$. R_m est une caractéristique connue pour l'ensemble des matériaux, le problème réside dans la détermination de $\sigma_{D(N)}$ dans les conditions réelles d'utilisation.

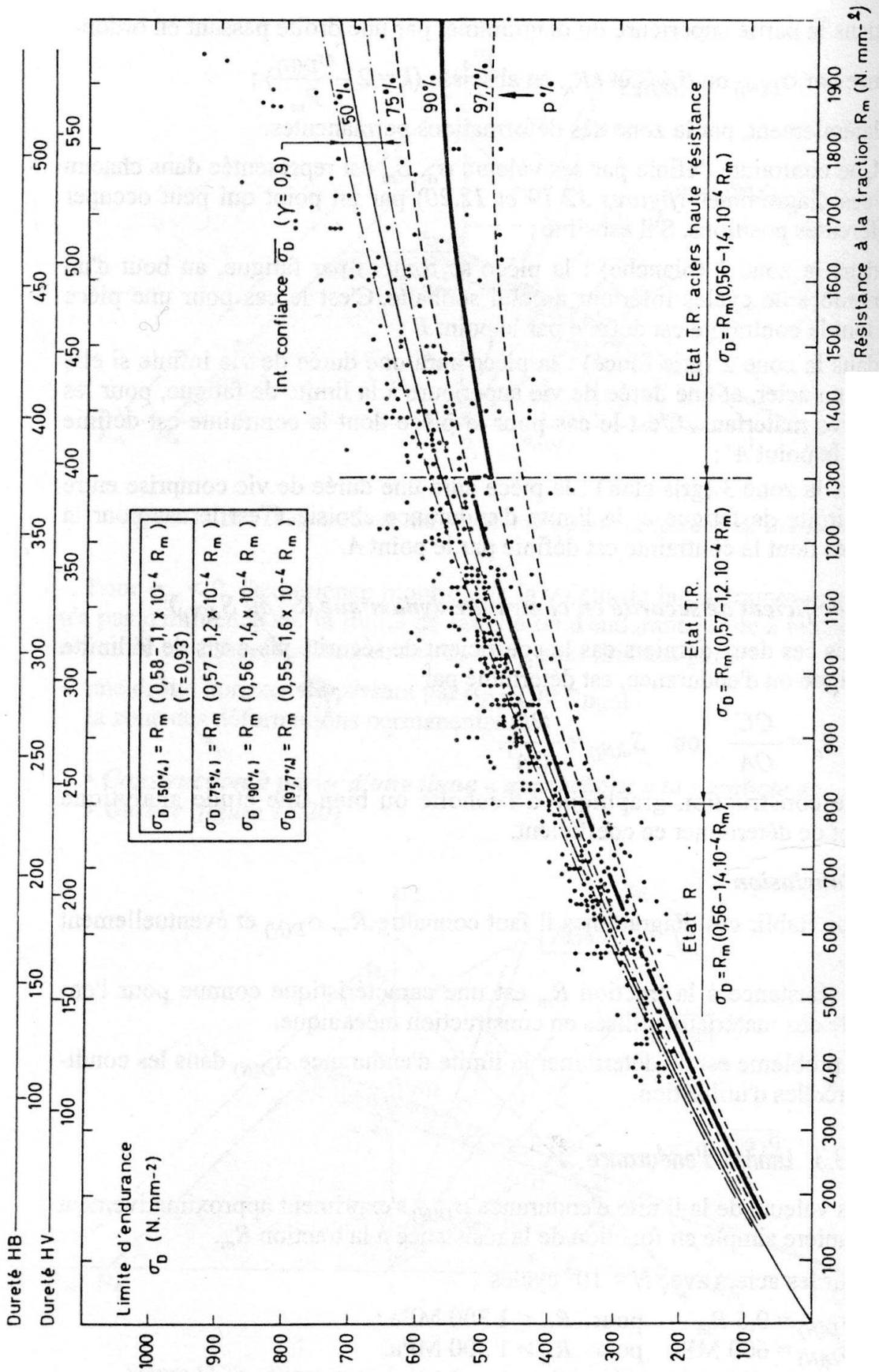
Les valeurs de la limite d'endurance $\sigma_{D(N)}$ s'expriment en fonction de la résistance à la traction R_m .

La figure ci-après établie par le CETIM à partir d'une compilation de nombreux résultats d'essais en flexion rotative donne pour les aciers des valeurs de $\sigma_{D(N)}$ en fonction de R_m ou de la dureté et du p% de survie.

Cependant, l'expérience montre que ces résultats ne sont valables que pour une sollicitation de flexion rotative, pour les autres types de sollicitations on est obligé d'utiliser un coefficient correcteur.

Valeurs de $\sigma_{D(N)}$ en fonction de R_m

| | |
|--|--|
| Aciers avec $N=10^7$ cycles | $\sigma_{D(N)} = 0,5 R_m$ pour $R_m < 1300$ MPa $\sigma_{D(N)} = 600$ MPa pour $R_m > 1300$ MPa |
| Fontes avec $N=10^7$ cycles | $\sigma_{D(N)} = 0,4 R_m$ |
| Alliages d'aluminium et de magnésium avec $N= 5 \times 10^6$ cycles | $\sigma_{D(N)} = 0,4 R_m$ |



SOURCE : DOCUMENT DU CETIM

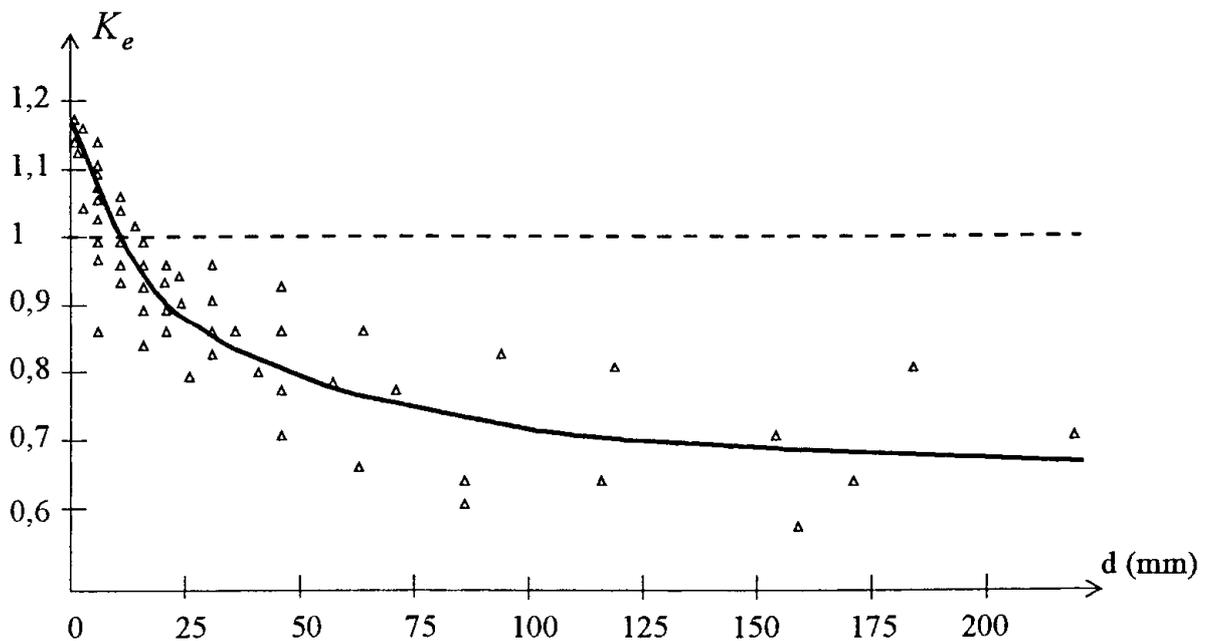
2.4.4- Influence du type de sollicitations.

Dans le cas d'autres types de sollicitations, on se ramène aux résultats expérimentaux de la flexion rotative par l'intermédiaire d'un coefficient K_p :

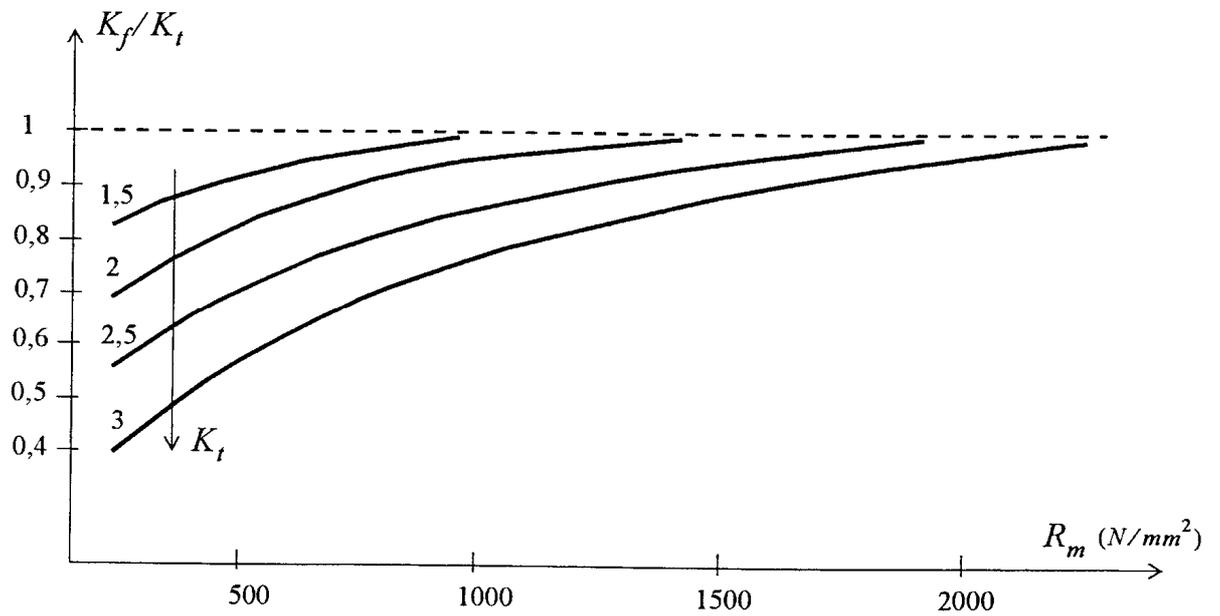
- *Sollicitation de flexion plane* : $K_p = \frac{\sigma_{D(\text{flexion.plane})}}{\sigma_{D(\text{flexion.rotative})}} = 1,05$;
- *Sollicitation de traction* : $K_p = \frac{\sigma_{D(\text{traction})}}{\sigma_{D(\text{flexion.rotative})}} = 0,9$;
- *Sollicitation de torsion* : $K_p = \frac{\sigma_{D(\text{torsion})}}{\sigma_{D(\text{flexion.rotative})}} = 0,577$. ;

2.4.5- Influence de la géométrie des pièces.

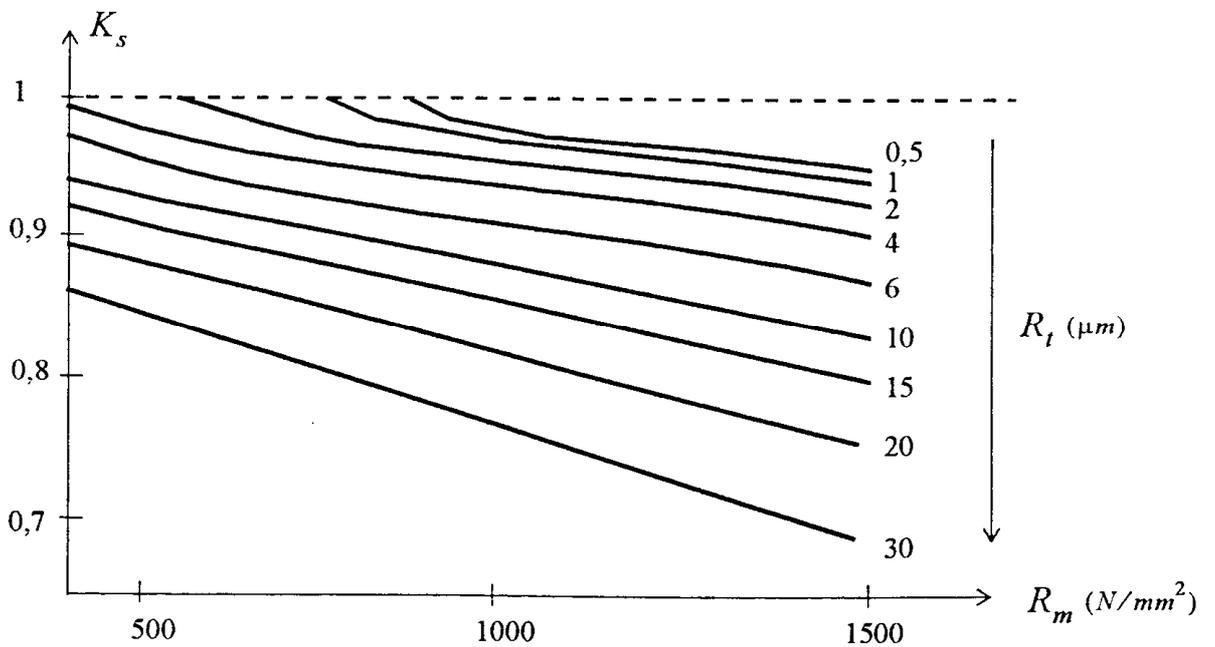
- a- Volume de la pièce \rightarrow facteur d'échelle $K_e = \frac{\sigma_{D(\text{pièce})}}{\sigma_{D(\text{épreuve})}}$



b- Forme de la pièce → facteur d'entaille $K_f = \frac{\sigma_D(\text{épreuve})}{\sigma_D(\text{pièce})}$



c- Etat de surface de la pièce → facteur de surface $K_s = \frac{\sigma_D(\text{pièce})}{\sigma_D(\text{épreuve})}$



2.4.6- Contraintes de calcul.

a- Contraintes uniaxiales

$$\sigma_{mc} = K_t \cdot \sigma_m$$

$$\sigma_{ac} = \frac{K_f}{K_e \cdot K_s \cdot K_p} \cdot \sigma_a$$

b- Etat de contrainte complexe

Une sollicitation de traction entraîne :

- Une contrainte normale moyenne σ_{mt}
- Une contrainte normale alternée σ_{at}

Une sollicitation de flexion entraîne :

- Une contrainte normale moyenne σ_{mf}
- Une contrainte normale alternée σ_{af}

Une sollicitation de torsion entraîne :

- Une contrainte tangentielle moyenne τ_m
- Une contrainte tangentielle alternée τ_a

Les effets de l'effort tranchant sont négligés.

Contrainte équivalente moyenne, σ_{em}

$$\sigma_{em} = \sqrt{(K_{tt} \cdot \sigma_{mt} + K_{tf} \cdot \sigma_{mf})^2 + 3(K_{to} \cdot \tau_m)^2}$$

Contrainte équivalente alternée, σ_{ea}

$$\sigma_{ea} = \sqrt{(K_{ft} \cdot \sigma_{at} + K_{ff} \cdot \sigma_{af})^2 + 3(K_{fo} \cdot \tau_a)^2}$$

Contrainte équivalente de calcul, (σ_{mc} , σ_{ac})

$$\sigma_{mc} = \sigma_{em}$$

$$\sigma_{ac} = \frac{\sigma_{ea}}{K_e \cdot K_s}$$