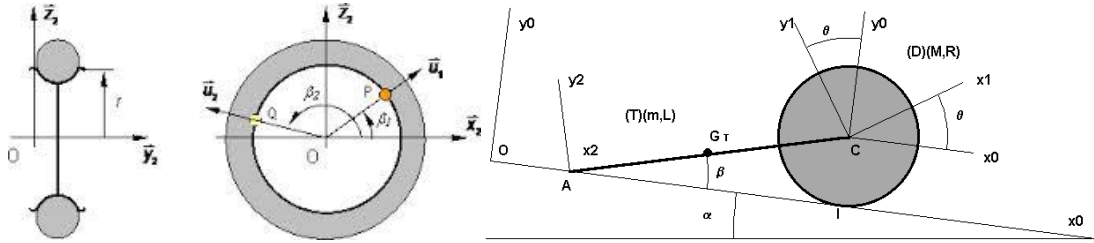


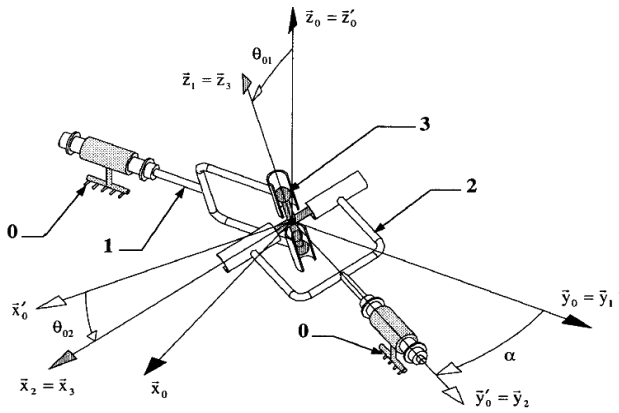
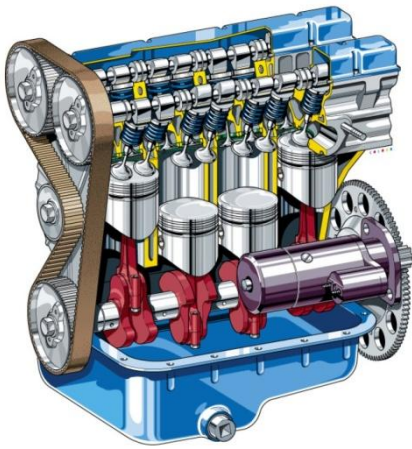
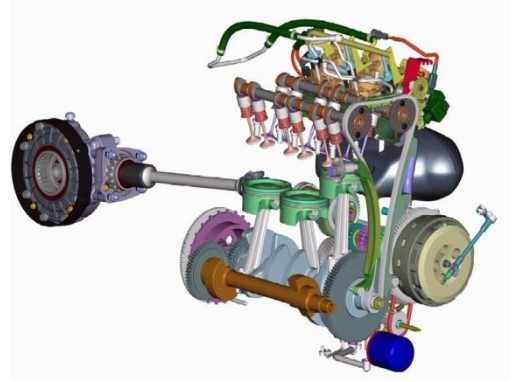
Mécanique du solide rigide

Dynamique du solide



$$J_2 \ddot{\theta} = \left( mgL - \frac{J_1^2 \Omega^2}{J_2} \right)$$

$$\bar{I}(G, S) = \begin{bmatrix} I_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Gy} & -I_{yz} \\ 0 & -I_{zy} & I_{Gz} \end{bmatrix} (\vec{\delta}, \vec{y}, \vec{z})$$



## Dynamique du solide

### Cinétique

1 – Solide.....	3
2 - Centre de gravité, référentiel barycentrique.....	3
3 - Eléments cinétiques d'un solide.....	5
4- Torseur cinétique, théorème de Koenig.....	5
5 - Torseur dynamique, théorème de Koenig.....	5
6 - Solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta$ .....	6
7 – Problème résolu .....	15
8 – Exemples d'application .....	17

### Principe fondamental de la dynamique

1 - Masse et quantité de mouvement .....	20
2 - Référentiels galiléens - Lois de Newton.....	20
3 - Principe fondamental de la dynamique.- Théorèmes généraux de la dynamique.....	21
4 - Principe des actions réciproques.....	22
5 – Applications.....	23
6 - Expression du principe fondamental de la statique dans un repère non galiléen.....	29
7 - Equilibrage dynamique.....	31
8 – Problème résolu .....	34

### Puissance, énergie cinétique, travail des actions mécaniques

1 - Puissance.....	37
2 - Travail.....	40
3 - Energie cinétique.....	41
4 - Forces dérivant d'un énergie potentielle.....	43
5 - Théorème de l'énergie cinétique.....	44
6 – Exemple d'application .....	49
Résumé de cours .....	51
Exemples d'application .....	55

## Cinétique

### 1 - Solide

Un solide est un ensemble indéformable, c'est à dire dont la distance entre deux points quelconques est constante, quelque soit le mouvement des points la constituant.

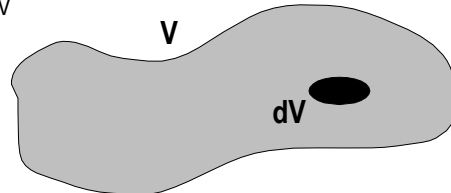
Le solide peut être constitué d'un ensemble (discret) de  $N$  points  $A_i$  reliés rigidement, chacun ayant une masse  $m_i$ . La masse totale de cet ensemble solide est :  $M = \sum_{i=1}^N m_i$

Lorsque  $N$  devient infini, le solide est un ensemble continu. Autour de chaque point  $M$

constituant le solide, on définit un élément de volume  $dV$ . Cet élément de volume possède une masse  $dm = \rho(M)dV$  en supposant que la masse volumique  $\rho(M)$  est constante dans cet élément de volume  $dV$

La masse totale du solide est :  $M = \iiint_V \rho(M) \cdot dV = \iiint_V dm$

Le solide est dit homogène si la masse volumique est constante en tout point du solide. On considérera dans la suite que la masse volumique du solide est indépendant du temps.



### 2 - Centre de gravité

Dans le cas d'un ensemble discret de masses :  $(m_i, A_i)$ , le centre de gravité est défini au moyen de la formule

$$\vec{OG} = \frac{\sum_i m_i \vec{OA}_i}{\sum_i m_i},$$

où  $O$  est un point arbitraire. Cette définition se généralise à une distribution continue de masse

$$\vec{OG} = \frac{\int_{M \in S} \vec{OM} dm}{\int_S dm}.$$

Pour une distribution volumique, l'élément de masse contenu dans un élément de volume  $d\tau$  autour d'un point  $M$  de  $S$  est  $dm = \rho(M)d\tau$ , où  $\rho$  est la masse volumique du solide.

#### Exemple

On cherche à calculer la position du centre de gravité d'un disque homogène (de centre  $O$ , de rayon  $R$  et de masse surfacique  $\sigma$ ), percé d'un trou circulaire de rayon  $R/2$  dont le centre  $O'$  est à la distance  $R/2$  de  $O$ . Le calcul direct est fastidieux, alors que la propriété d'associativité du barycentre donne le résultat plus simplement. Le système est identique à la somme de deux sous systèmes : un disque plein de rayon  $R$  et de masse  $m_1 = \pi\sigma R^2$  et un disque de rayon  $R/2$  et de masse  $m_2 = -\pi\sigma R^2/4$  (l'équivalence est bien entendu mathématique, une masse ne pouvant être négative). Le centre de gravité de l'ensemble est le centre de gravité des barycentres partiels affectés de la masse totale de leurs sous-ensembles, à savoir  $(O, m_1)$  et  $(O', m_2)$ . Ainsi, pour tout point  $A$ ,

$$m_1 A\vec{O} + m_2 A\vec{O}' = (m_1 + m_2) A\vec{G}.$$

On peut choisir  $A = O$ , d'où  $\vec{OG} = -\vec{OO}'/3$ .

#### Définition

On définit le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}_G$  comme le référentiel d'origine  $G$  dont les axes sont parallèles à ceux de  $\mathcal{R}_O$  (référentiel de l'observateur ou du laboratoire).

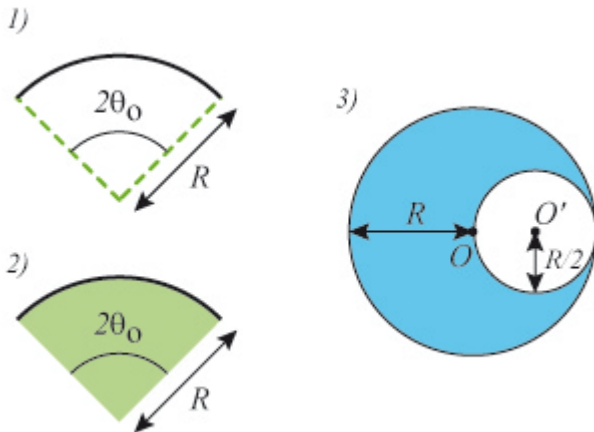
**Exemples d'application**

**Détermination de centres d'inertie**

Déterminer la position du centre d'inertie des solides suivants :

1. un arc de cercle de masse  $M$  et d'angle d'ouverture  $2\theta_0$
2. un secteur circulaire plein homogène de masse  $M$  et d'angle d'ouverture  $2\theta_0$
3. un disque de rayon  $R$  dans lequel on a découpé un disque de rayon  $R/2$  dont le centre est la distance  $R/2$  de celui du disque initial.

Solution détaillée



1. L'axe de symétrie  $Oz$  de l'arc  $AB$  supposé homogène contient le centre d'inertie  $G$ .  
 $M = \lambda R 2\theta_0$  La position du centre d'inertie  $G$  est telle que :  $M\vec{OG} = \int \vec{OM} dm$  avec  $dm = \lambda dl$  Projétons sur l'axe  $Oz$ :  $Mz_G = \int z dm = \int z \lambda dl$   
avec  $z = R \cos \theta$  et  $dl = R d\theta$   

$$z_G = \frac{1}{2\theta_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos \theta R d\theta = \frac{R \sin \theta_0}{\theta_0}$$
Pour un cercle entier ( $\theta_0 = \pi$ ), on vérifie que  $G$  est en  $O$ .
2. De même que précédemment, l'axe de symétrie  $Oz$  de l'arc  $AB$  supposé homogène contient le centre d'inertie  $G$ .  
Soit un arc d'épaisseur  $dr$  et de masse  $dm = \sigma dS = \sigma r 2\theta_0 dr$  Le centre d'inertie d'un tel arc est d'après la question précédente en  $z = \frac{r \sin \theta_0}{\theta_0}$ . Le centre d'inertie de l'ensemble est tel que :  
avec  $dm = \sigma 2\theta_0 r dr$   

$$z_G = \frac{2R \sin \theta_0}{3 \theta_0}$$
3. Soient  $O$  et  $O'$  les centres d'inertie du disque complet et du disque enlevé et  $G$  celui du disque perforé. Le disque perforé a une masse  $m' = M - m = \pi \sigma (R^2 - (\frac{R}{2})^2) = 3 \frac{\pi \sigma R^2}{4}$ . Le disque entier peut être vu comme l'association du disque perforé et du disque de rayon  $R/2$ .  $M\vec{OO} = m'\vec{OG} + m\vec{OO}' = \vec{0}$  donc  $\vec{OG} = -\frac{m}{m'}\vec{OO}'$   

$$\vec{OG} = -\frac{m}{m'} \frac{R}{2} = -\frac{R}{6}$$
6. Comme on pouvait s'y attendre, le centre d'inertie  $G$  se trouve à gauche de  $O$ .

### 3 - Eléments cinétiques d'un solide

De la même manière, on peut définir les éléments cinétiques du solide, dans le référentiel galiléen ( $\mathcal{R}$ ), dans le tableau suivant :

Quantité	Solide rigide constitué de $N$ masses	Solide continu
Quantité de mouvement	$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{v}_G = M \vec{v}_G$	$\vec{P} = \iiint_V \vec{v} \, dm = M \vec{v}_G$
Moment cinétique	$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^N m_i \vec{OA}_i \wedge \vec{v}_i$	$\vec{L}_O = \iiint_V \vec{OM} \wedge \vec{v} \, dm$
Energie cinétique	$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$	$E_c = \frac{1}{2} \iiint_V v^2 \, dm$

### 4 - Torseur cinétique, théorème de Koenig

Soit un solide  $S$  de masse volumique  $\rho$  et un référentiel  $\mathcal{R}$ . On définit le torseur cinétique de  $S$  dans  $\mathcal{R}$  par

$$(C) = \begin{cases} \vec{P}(S/\mathcal{R}) = \int_{M \in S} \vec{v}(M/\mathcal{R}) \rho \, d\tau \\ \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \int_{M \in S} \vec{AM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}) \rho \, d\tau, \end{cases}$$

$\{C_{(S/\mathcal{R})}\} = \begin{cases} \int_{P \in S} \vec{V}_{P/R} \, dm = m \vec{V}_{G/R} & \text{Quantité de mouvement} \\ \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{V}_{P/R} \, dm = \vec{\sigma}_{A(S/R)} & \text{Moment cinétique} \end{cases}$
---

où la résultante  $\vec{P}$  est la quantité de mouvement de  $S$  dans  $\mathcal{R}$  et  $\vec{\sigma}_A$  le moment cinétique en  $A$  de  $S$  dans  $\mathcal{R}$ .

En utilisant la définition du centre de gravité  $G$ , on montre que

$$\vec{P}(S/\mathcal{R}) = m \vec{v}(G/\mathcal{R}).$$

Il s'ensuit que la quantité de mouvement du solide  $S$  dans son référentiel barycentrique est nulle.

De la relation de définition des torseurs, on déduit que

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}) + \vec{AG} \wedge \vec{P}(S/\mathcal{R}).$$

La relation de composition des vitesses entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}_G$  qui est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  nous donne

$$\begin{aligned} \vec{v}(M/\mathcal{R}) &= \vec{v}(M/\mathcal{R}_G) + \vec{v}(M \text{ lié à } \mathcal{R}_G/\mathcal{R}) \\ &= \vec{v}(M/\mathcal{R}_G) + \vec{v}(G/\mathcal{R}). \end{aligned}$$

finalement on trouve ainsi que

$$\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_G),$$

qui lorsqu'on utilise la relation des torseurs donne le **théorème de Koenig** du moment cinétique

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_G) + \vec{AG} \wedge \vec{P}(S/\mathcal{R}).$$

### 5 - Torseur dynamique

Pour un solide ( $S$ ) en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ , en un point  $A$  quelconque :

$\{D_{(S/\mathcal{R})}\} = \begin{cases} \int_{P \in S} \vec{\Gamma}_{P/R} \, dm & \text{Résultante dynamique} \\ \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}_{P/R} \, dm & \text{Moment dynamique noté } \vec{\delta}_{A(S/R)} \end{cases}$
--

Autre expression de la résultante dynamique:

$$\int_{P \in S} \vec{\Gamma}_{P/R} \, dm = m \cdot \vec{\Gamma}_{G/R} \quad \text{donc}$$

$$\{D_{(S/\mathcal{R})}\} = \begin{cases} m \vec{\Gamma}_{G/R} \\ \vec{\delta}_{A(S/R)} \end{cases}$$

Remarque

Si la masse du solide (S) est concentrée en G ( centre d'inertie ), au point G on écrit le torseur dynamique :

$$\{ \mathcal{D}_{(S/R)} \}_G = \begin{cases} m\vec{\Gamma}_{G/R} \\ \vec{0} \end{cases}$$

Changement de point

$$\vec{\delta}_{B(S/R)} = \vec{\delta}_{A(S/R)} + m\vec{\Gamma}_{G/R} \wedge \overline{AB}$$

Relation entre le moment cinétique et le moment dynamique

$$\vec{\delta}_{A(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A(S/R)} \right]_R + m \cdot \vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{G/R}$$

Valable pour un point A et un ensemble matériel (S) quelconques

Par conséquent  $\vec{V}_{A/R} = \left[ \frac{d}{dt} \overline{OA} \right]_R$

Cas particuliers

1 - A est fixe dans R alors  $\vec{\delta}_{A(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A(S/R)} \right]_R$

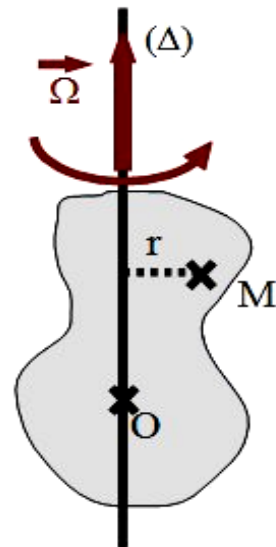
2 - A est confondu avec G alors  $\vec{\delta}_{G(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G(S/R)} \right]_R$

**6 - Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ**

On dit qu'un solide est animé d'un mouvement de translation si à chaque instant tous les points du solide ont la même vitesse. La translation est rectiligne si le vecteur vitesse garde toujours la même direction. Cette translation est uniforme si le vecteur vitesse garde la même norme.

Dans la suite de ce chapitre, on considère un axe (Δ) fixe par rapport à un référentiel (R) et un solide (S) animé d'un mouvement de rotation autour de cet axe (Δ). On notera ω, la vitesse angulaire de rotation du solide autour de (Δ). On notera  $\vec{u}$ , un vecteur unitaire porté par l'axe (Δ). Dans ce cas, on peut définir le vecteur rotation  $\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{u}$

.On notera O un point fixe de l'axe (Δ)



**6 - 1 Moment d'inertie**

On cherche à calculer ici le moment cinétique du solide par rapport à l'axe (Δ) défini par :

$$J_{\Delta} = \vec{u} \cdot \vec{J}_O \quad \text{avec} \quad \vec{J}_O = \iiint_V \rho \cdot \overline{OM} \wedge \vec{V} \, dm \quad \text{Donc} \quad J_{\Delta} = \iiint_V \rho \cdot \vec{u} \cdot (\overline{OM} \wedge \vec{V}) \, dm$$

Pour un point M quelconque du solide, le vecteur  $\overline{OM}$  étant constant, on sait que la vitesse du point M est alors donnée par :

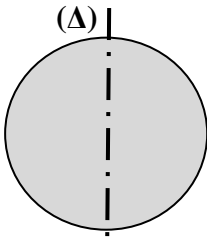
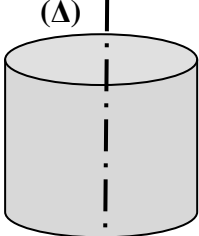
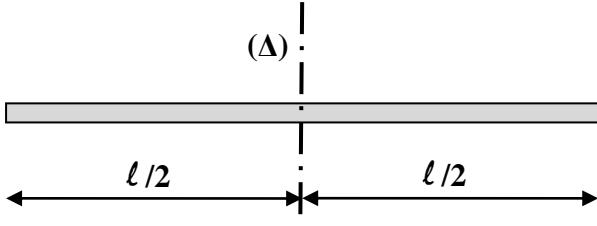
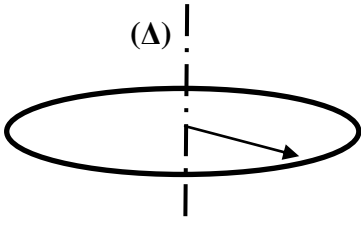
$$\vec{V} = \vec{\Omega} \wedge \overline{OM} = \omega \cdot (\vec{u} \wedge \overline{OM})$$

D'autre part on peut montrer que  $\vec{u} \cdot (\overline{OM} \wedge \vec{V}) = (\vec{u} \wedge \overline{OM}) \cdot \vec{V}$ . On en déduit que :  $J_{\Delta} = \iiint_V \rho \cdot \omega \cdot (\vec{u} \wedge \overline{OM})^2 \cdot dm = \omega \cdot I_{\Delta}$  avec :

$$I_{\Delta} = \iiint_V \rho \cdot (\vec{u} \wedge \overline{OM})^2 \cdot dm = \iiint_V \rho \cdot r^2 \cdot dm$$

qui est le moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ) . En effet  $\vec{u} \wedge \overline{OM} = r \cdot \vec{w}$  où  $\vec{w}$  est un vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{u}$  et  $\overline{OM}$ , r est tout simplement la distance entre M et sa projection sur l'axe (Δ)

Pour des géométries simples, on peut en déduire le moment d'inertie. Le tableau ci-dessous donne quelques exemples :

Système	Moment d'inertie
 <p>Sphère pleine homogène de rayon R</p>	$I_{\Delta} = \frac{2}{5} MR^2$
 <p>Cylindre plein homogène de rayon R ( ou disque homogène de rayon R)</p>	$I_{\Delta} = \frac{1}{2} MR^2$
 <p>Tige mince homogène de longueur <math>l</math></p>	$I_{\Delta} = \frac{1}{12} M l^2$
 <p>Anneau filiforme de rayon R</p>	$I_{\Delta} = MR^2$

On appelle **rayon de giration**,  $k$ , du solide par rapport à l'axe  $(\Delta)$  la quantité telle que :  $I_{\Delta} = Mk^2$   
 Calcul de  $I_{\Delta}$  pour le solide (S)

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{P \in S} (y^2 + z^2) \, dm & B &= \int_{P \in S} (x^2 + z^2) \, dm & C &= \int_{P \in S} (x^2 + y^2) \, dm \\
 D &= \int_{P \in S} (y \cdot z) \, dm & E &= \int_{P \in S} (z \cdot x) \, dm & F &= \int_{P \in S} (x \cdot y) \, dm
 \end{aligned}$$

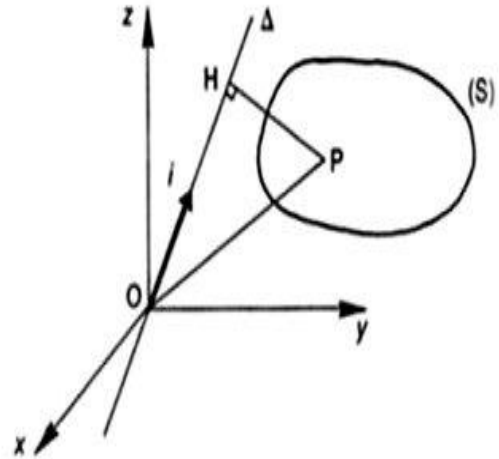
Définitions

- A : Moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe  $(O, \vec{x})$
- B : Moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe  $(O, \vec{y})$
- C : Moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe  $(O, \vec{z})$
- D : Produit d'inertie de (S) par rapport aux axes  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$
- E : Produit d'inertie de (S) par rapport aux axes  $(O, \vec{x})$  et  $(O, \vec{z})$
- F : Produit d'inertie de (S) par rapport aux axes  $(O, \vec{x})$  et  $(O, \vec{y})$

Matrice d'inertie d'un solide (S)

$$I_0(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$\vec{J}_0(S, x)$      $\vec{J}_0(S, y)$      $\vec{J}_0(S, z)$



Expression du moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

Solide (S); Axe  $\Delta$ ;  $\vec{i}$  : axe unitaire de  $\Delta$

$$I(S / \Delta) = \int_{P \in S} [PH]^2 dm = \vec{i} \cdot \vec{J}_0(S, \vec{i})$$

avec  $\vec{J}_0(S, \vec{i}) = [I_0(S)] \times \vec{i} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Opérateur d'inertie d'un solide

L'opérateur d'inertie d'un solide (S) en un point O est l'opérateur qui à tout vecteur  $\vec{u}$  fait correspondre le vecteur :

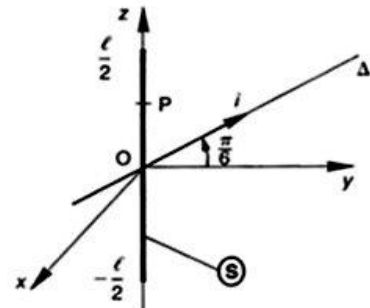
$$\vec{J}_0(S, \vec{u}) = \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) dm$$

Application

$\vec{i} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{y} + \frac{1}{2} \vec{z}$  ; Tige de longueur  $\ell$  et de masse  $m$

Questions

- 1) Calculer l'opérateur d'inertie de la tige (S) au point O
- 2) Calculer le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe  $\Delta$  (O,  $\vec{i}$ )



**RÉPONSE**

Déterminons l'opérateur d'inertie de (S) au point O par sa matrice d'inertie au point O, relativement à la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

Cette matrice est de la forme :

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Sachant qu'un point P quelconque de la tige (S) a pour coordonnées cartésiennes  $(0, 0, z)$  dans R :

$$A = \int_{P \in S} (y^2 + z^2) dm = \int_{P \in S} z^2 dm$$

$$B = \int_{P \in S} (z^2 + x^2) dm = \int_{P \in S} z^2 dm = A$$

$$C = \int_{P \in S} (x^2 + y^2) dm = 0$$

$$D = \int_{P \in S} yz dm = 0$$

$$E = \int_{P \in S} zx dm = 0$$

$$F = \int_{P \in S} xy dm = 0.$$

Calculons A :

$$A = \int_{P \in S} z^2 dm$$

avec  $dm = \frac{m}{l} dz$  ( $\frac{m}{l}$  : masse linéique de S)

$$A = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} z^2 dz,$$

soit  $A = \frac{ml^2}{12}$

la matrice d'inertie est donc :

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} \frac{ml^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe  $\Delta(O, \vec{i})$  est donné par :  $I(S/\Delta) = \vec{i} \cdot \vec{J}_O(S, \vec{i})$

La matrice colonne associée au vecteur  $\vec{J}_O(S, \vec{i})$  s'obtient en effectuant la multiplication de la matrice d'inertie par la matrice colonne associée au vecteur unitaire  $\vec{i}$  :

$$[\vec{J}_O(S, \vec{i})] = \begin{bmatrix} \frac{ml^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ml^2\sqrt{3}}{24} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe  $\Delta(O, \vec{i})$  est égal au produit scalaire du vecteur unitaire  $\vec{i}$  par le vecteur  $\vec{J}_O(S, \vec{i})$

d'où : 
$$I(S/\Delta) = \frac{m l^2}{16}$$

### 6 - 2 Base principale d'inertie

Définition

$(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  = base principale et  $\mathbf{I}_O(S) = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$

Les axes  $(O, \vec{x}_1), (O, \vec{y}_1), (O, \vec{z}_1)$  sont appelés **axes principaux d'inertie**.

Les moments d'inertie  $A_1, B_1, C_1$  sont appelés **moments principaux d'inertie** du solide (S) au point O

Symétries matérielles du solide

#### Exemple 1

Soient les 2 points  $P(x, y, z)$  et  $P'(x', y', z')$  de masse  $dm$

La symétrie par rapport au plan Oxy entraîne :

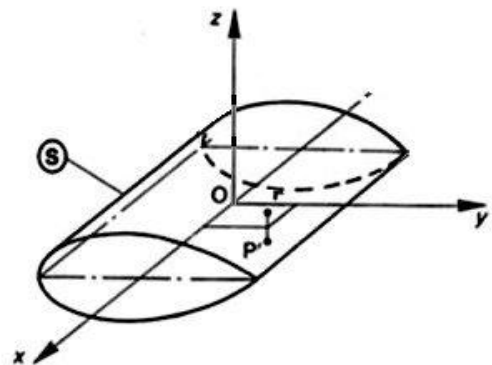
$$D = \int_{P \in S} (y \cdot z) \, dm = 0$$

car  $\int_{P \in S} (y \cdot z) \, dm$  pour  $z \geq 0$  est opposée à  $\int_{P \in S} (y \cdot z) \, dm$  pour  $z \leq 0$

$$\text{de même } E = \int_{P \in S} (z \cdot x) \, dm = 0$$

Donc la matrice d'inertie est de la forme :

$$\mathbf{I}_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



#### Exemple 2

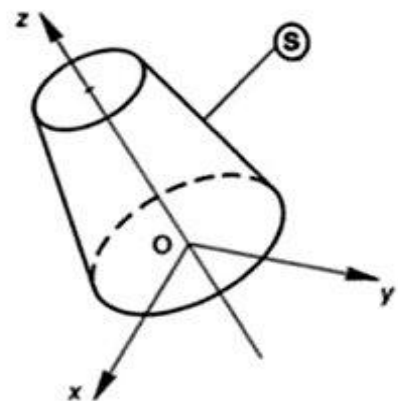
La symétrie par rapport à l'axe  $(O, \vec{z})$  entraîne :

- tous les moments produits sont nuls

-  $I_{Ox} = I_{Oy} = A$

Donc la matrice d'inertie est de la forme :

$$\mathbf{I}_O(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



**6 - 3 Les différents moments d'inertie**

Moment d'inertie par rapport au point O

$$I_o = \int_{P \in S} (x^2 + y^2 + z^2) dm = \int_{P \in S} [OP]^2 dm$$

Moment d'inertie par rapport au plan (O,  $\vec{x}, \vec{y}$ )

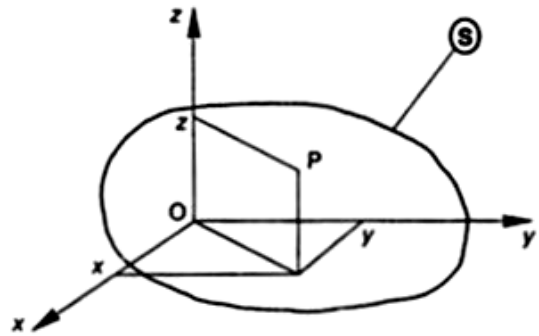
$$I_{oxy} = \int_{P \in S} z^2 dm$$

Moment d'inertie par rapport au plan (O,  $\vec{y}, \vec{z}$ )

$$I_{oyz} = \int_{P \in S} x^2 dm$$

Moment d'inertie par rapport au plan (O,  $\vec{x}, \vec{z}$ )

$$I_{ozx} = \int_{P \in S} y^2 dm$$



Relations entre les moments d'inertie

$$I_o = I_{oxy} + I_{oyz} + I_{ozx} = \frac{1}{2} (A + B + C)$$

$$A = I_{oxy} + I_{ozx}$$

$$B = I_{oxy} + I_{oyz}$$

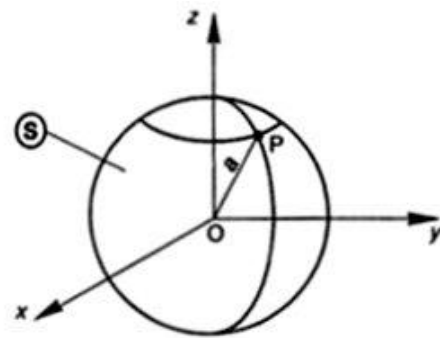
$$C = I_{oyz} + I_{ozx}$$

Exemple : Enveloppe sphérique ( sphère creuse )

$$A = \frac{2}{3} I_o = \frac{2}{3} \int_{P \in S} [OP]^2 dm$$

$$I_o = \int_{P \in S} a^2 dm = a^2 \int_{P \in S} dm = m \cdot a^2$$

$$A = \frac{2}{3} m \cdot a^2$$



**6 - 4 Théorème d'Huygens**

Ce théorème permet de calculer le moment d'inertie par rapport à un axe ( $\Delta$ ) quelconque,  $I_\Delta$ , connaissant celui par rapport à l'axe ( $\Delta_G$ ) passant par le centre de masse G,  $I_G$ . On suppose évidemment que les deux axes ( $\Delta$ ) et ( $\Delta_G$ ) sont parallèles.

Si (a) est la distance entre les deux axes :

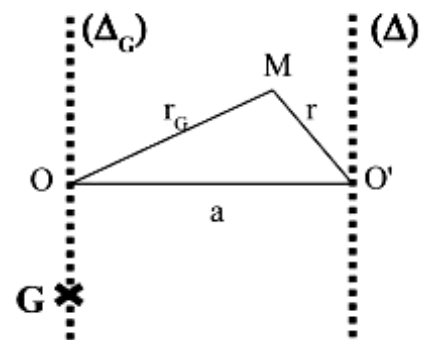
$$I_\Delta = I_G + Ma^2$$

En effet,  $r^2 = \vec{OM}^2 = r_G^2 + a^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{r}_G$  et  $\vec{a} \cdot \vec{r}_G = \vec{a} \cdot \vec{GM}$

Donc  $I_\Delta = \iiint_V r^2 \cdot dm = \iiint_V r_G^2 \cdot dm + \iiint_V a^2 \cdot dm - 2 \cdot \vec{a} \cdot \iiint_V \vec{GM} \cdot dm$

Par définition de G, la dernière intégrale est nulle, on en déduit le théorème d'Huygens.

Une conséquence du théorème d'Huygens est que le moment d'inertie est minimal lorsque l'axe passe par le centre de masse.



Relations entre les moments d'inertie en O et en G

$$A = A_G + m(b^2 + c^2)$$

$$B = B_G + m(a^2 + c^2)$$

$$C = C_G + m(a^2 + b^2)$$

$$D = D_G + m \cdot b \cdot c$$

$$E = E_G + m \cdot a \cdot c$$

$$F = F_G + m \cdot a \cdot b$$

Avec :  $\vec{OG} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y} + c \cdot \vec{z}$  ( dans la base ( $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ) )

**6 - 5 Moment cinétique**

Soit un solide (S) de masse m et de centre de gravité G, en mouvement par rapport à un repère R(O,  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ )

Soit A un point lié au solide (S)

Par définition, le moment cinétique au point A du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R est :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm \text{ avec } \vec{V}_{P/R} = \vec{V}_{A/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}, \text{ le point A étant lié au solide (S)}$$

$$\text{Donc : } \vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge (\vec{V}_{A/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}) \cdot dm = \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{V}_{A/R} \cdot dm + \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}) \cdot dm$$

$$\int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{V}_{A/R} \cdot dm = (\int_{P \in S} \vec{AP} \cdot dm) \wedge \vec{V}_{A/R}$$

La position du centre d'inertie étant définie par :  $m \cdot \vec{AG} = \int_{P \in S} \vec{AP} \cdot dm$  donc  $(\int_{P \in S} \vec{AP} \cdot dm) \wedge \vec{V}_{A/R} \cdot dm = m \cdot \vec{AG} \wedge \vec{V}_{A/R}$

$$\text{D'où : } \vec{\sigma}_A(S/R) = m \cdot \vec{AG} \wedge \vec{V}_{A/R} + \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}) \cdot dm$$

**1er cas :** Le mouvement de (S) par rapport à R est tel que  $\vec{\Omega}_{S/R}$  soit de la forme  $\theta \vec{z}$  ( c'est le cas lorsque (S) a un mouvement plan sur plan dans le plan (O,  $\vec{x}, \vec{y}$ ) ou un mouvement hélicoïdal d'axe  $\vec{z}$ )

Soit R<sub>1</sub>(O<sub>1</sub>,  $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$ ) un repère lié à (S)

On pose  $\theta = \vec{x}_1 \cdot \vec{x}$ , alors  $\vec{\Omega}_{S/R} = \theta \vec{z}$  et  $\vec{AP} = x_1 \vec{x}_1 + y_1 \vec{y}_1 + z_1 \vec{z}_1$  donc :

$$\int_{P \in S} \vec{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}) \cdot dm = \int_{P \in S} (x_1 \vec{x}_1 + y_1 \vec{y}_1 + z_1 \vec{z}_1) \wedge [\theta \vec{z} \wedge (x_1 \vec{x}_1 + y_1 \vec{y}_1 + z_1 \vec{z}_1)] \cdot dm$$

Après avoir effectué les calculs vectoriels :

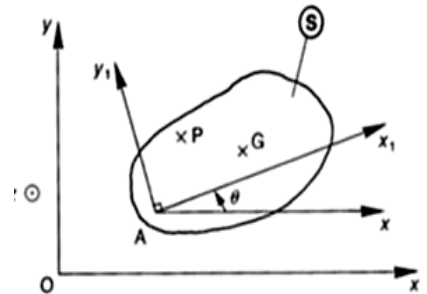
$$\int_{P \in S} \theta [-z x_1 \vec{x}_1 - z y_1 \vec{y}_1 + (x_1^2 + y_1^2) \vec{z}] \cdot dm \text{ soit :}$$

$$-\theta \int_{P \in S} x_1 z \cdot dm - \theta \int_{P \in S} y_1 z \cdot dm + \theta \int_{P \in S} (x_1^2 + y_1^2) \cdot dm$$

$$\text{En posant : } E_1 = \int_{P \in S} z x_1 \cdot dm$$

$$D_1 = \int_{P \in S} z y_1 \cdot dm$$

$$C = \int_{P \in S} (x_1^2 + y_1^2) \cdot dm$$



Ce qui donne pour  $\vec{\sigma}_A(S/R)$  :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m \cdot \vec{AG} \wedge \vec{V}_{A/R} - E_1 \theta \vec{x}_1 - D_1 \theta \vec{y}_1 + C \theta \vec{z}$$

Cas particuliers

■ **A est fixe dans R et E<sub>1</sub> = 0 et D<sub>1</sub> = 0** ( le plan (A,  $\vec{x}_1, \vec{y}_1$ ) est plan de symétrie pour (S)) alors :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = I_{Az} \cdot \theta \vec{z}$$

■ **A est confondu avec G et E<sub>1</sub> = 0 et D<sub>1</sub> = 0**

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = I_{Gz} \cdot \theta \vec{z}$$

Application

Cylindre de révolution (S) rayon a et masse m qui roule sans glisser sur un plan incliné.

R(O,  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ) lié au plan II

R<sub>1</sub>(G,  $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}$ ) lié au cylindre

$$I_{Gz} = \frac{m \cdot a^2}{2} ; E_1 = D_1 = 0$$

Moment cinétique au point G de (S) dans son mouvement par rapport à R

$$\text{Par application de la relation précédente : } \vec{\sigma}_G(S/R) = \frac{m \cdot a^2}{2} \cdot \theta \vec{z}$$

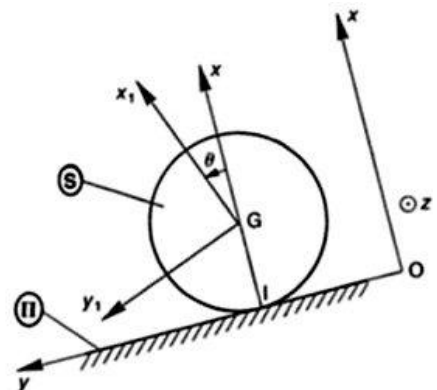
Moment dynamique au point I de (S) dans son mouvement par rapport à R

1<sup>ère</sup> méthode

$$\vec{\sigma}_I(S/R) \text{ et } \vec{\sigma}_G(S/R) \text{ sont liés par la relation : } \vec{\sigma}_I(S/R) = \vec{\sigma}_G(S/R) + m \vec{V}_{G/R} \wedge \vec{IG}$$

sachant que :  $\vec{V}_{G/R} = \vec{V}_{I/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{IG}$  et que (S) roule sans glisser sur le plan (II) alors  $\vec{V}_{G/R} = \vec{0} + \theta \vec{z} \wedge a \vec{x}$

$$\text{soit : } \vec{V}_{G/R} = a \theta \vec{y} \quad \text{d'où } \vec{\sigma}_I(S/R) = \frac{m \cdot a^2}{2} \cdot \theta \vec{z} + m \cdot a \theta \vec{y} \wedge (-a \vec{x}) = \frac{3m \cdot a^2}{2} \cdot \theta \vec{z}$$



$$\vec{\delta}_{I(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{I(S/R)} \right]_R + m \vec{V}_{I/R} \wedge \vec{V}_{G/R} \text{ or } \vec{V}_{I/R} = \vec{V}_{G/R} \text{ alors } \vec{V}_{I/R} \wedge \vec{V}_{G/R} = \vec{0} \text{ alors } \vec{\delta}_{I(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{I(S/R)} \right]_R$$

$$\text{d'où : } \vec{\delta}_{I(S/R)} = \frac{3m \cdot a^2}{2} \cdot \theta'' \vec{z}$$

2<sup>ème</sup> méthode

$$\vec{\delta}_{G(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G(S/R)} \right]_R$$

$$\vec{\delta}_{G(S/R)} = \frac{m \cdot a^2}{2} \cdot \theta'' \vec{z}$$

$$\vec{\delta}_{I(S/R)} = \vec{\delta}_{G(S/R)} + m \vec{r}_{G/R} \wedge \vec{\omega} \quad \text{avec } \vec{r}_{G/R} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{V}_{G/R} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} a \theta' \cdot \vec{y} \right]_R = a \theta'' \cdot \vec{y}$$

$$\vec{\delta}_{I(S/R)} = \frac{m \cdot a^2}{2} \cdot \theta'' \vec{z} + m a \theta'' \cdot \vec{y} \wedge -a \vec{x} \quad \text{d'où : } \vec{\delta}_{I(S/R)} = \frac{3m \cdot a^2}{2} \cdot \theta'' \vec{z}$$

2<sup>ème</sup> cas : Cas général, le mouvement de (S) par rapport à R est quelconque

L'intégrale  $\int_{P \in S} \vec{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}) \cdot dm$  représente l'opérateur d'inertie de (S) appliqué au vecteur  $\vec{\Omega}_{S/R}$

$$\text{Donc : } \vec{\sigma}_A(S/R) = m \cdot \vec{AG} \wedge \vec{V}_{A/R} + \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}_{S/R})$$

Cas particuliers

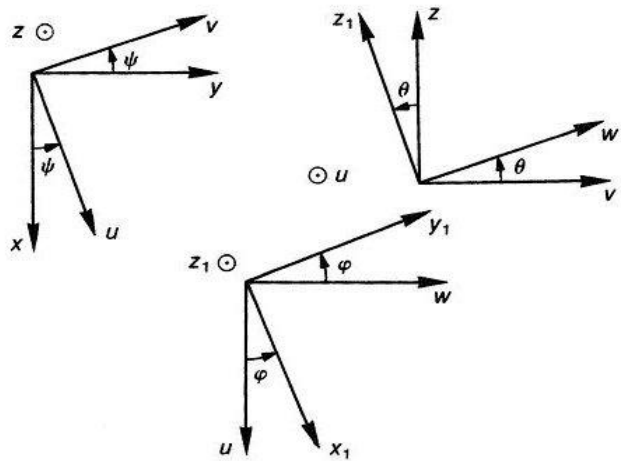
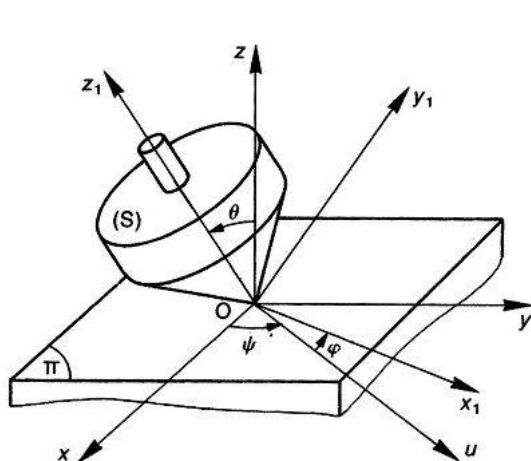
■ A est fixe dans R

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}_{S/R})$$

■ A est confondu avec G

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = \vec{J}_G(S, \vec{\Omega}_{S/R})$$

Application : Toupie (S) d'axe de symétrie (O,  $\vec{z}_1$ )



Matrice d'inertie de la toupie :

$$I_0(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-, -, \vec{z}_1)}$$

R<sub>1</sub> : repère lié à la matrice d'inertie

La position de la base de R<sub>1</sub> par rapport à la base de R est définie par les angles d'Euler  $\psi, \theta, \phi$

1<sup>ère</sup> base intermédiaire : ( $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$ )

2<sup>ème</sup> base intermédiaire : ( $\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1$ )

1 - Moment cinétique au point O de (S) dans son mouvement par rapport à R

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = J_O(S, \vec{\Omega}_{S/R})$$

$$\vec{\Omega}_{S/R} = \varphi' \vec{z}_1 + \theta' \vec{u} + \psi' \vec{z}$$

$$\text{Dans } (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1) : \vec{\Omega}_{S/R} = \varphi' \vec{z}_1 + \theta' \vec{u} + \psi' (\cos\theta \vec{z}_1 + \sin\theta \vec{w}) = \theta' \vec{u} + \psi' \sin\theta \vec{w} + (\varphi' + \psi' \cos\theta) \vec{z}_1$$

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta' \\ \psi' \sin\theta \\ \varphi' + \psi' \cos\theta \end{bmatrix}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)}$$

(la matrice d'inertie est la même dans  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  que dans  $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$ )

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = A\theta' \vec{u} + A\psi' \sin\theta \vec{w} + C(\varphi' + \psi' \cos\theta) \vec{z}_1$$

2 - Moment dynamique au point O de (S) dans son mouvement par rapport à R

a) en projection sur  $\vec{z}$  soit  $\vec{z} \cdot \vec{\delta}_{O(S/R)}$

b) en projection sur  $\vec{z}_1$  soit  $\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{O(S/R)}$

c) en projection sur  $\vec{u}$  soit  $\vec{u} \cdot \vec{\delta}_{O(S/R)}$

Réponses

$$a) \vec{z} \cdot \vec{\delta}_{O(S/R)} = \vec{z} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{O(S/R)} \right]_R = \vec{z} \cdot \left[ \frac{d}{dt} (\vec{z} \cdot \vec{\sigma}_{O(S/R)}) \right]_R - \frac{d\vec{z}}{dt} \cdot \vec{\sigma}_{O(S/R)} \text{ avec } \frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{z} \cdot \vec{u} = 0; \quad \vec{z} \cdot \vec{w} = -\sin\theta; \quad \vec{z} \cdot \vec{z}_1 = \cos\theta$$

$$\vec{z} \cdot \vec{\sigma}_{O(S/R)} = -A\psi' \sin^2\theta + C(\varphi' + \psi' \cos\theta) \cos\theta$$

$$\vec{z} \cdot \vec{\delta}_{O(S/R)} = \frac{d}{dt} [-A\psi' \sin^2\theta + C(\varphi' + \psi' \cos\theta) \cos\theta]$$

$$b) \vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{O(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}_{O(S/R)} \right]_R - \frac{d\vec{z}_1}{dt} \cdot \vec{\sigma}_{O(S/R)}$$

$$\left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)} + \vec{\Omega}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)/R} \wedge \vec{z}_1 = \vec{0} + (\theta' \vec{u} + \psi' \vec{z}) \wedge \vec{z}_1 = \psi' \sin\theta \vec{u} - \theta' \vec{w}$$

$$\text{Ensuite on constate que } \frac{d\vec{z}_1}{dt} \cdot \vec{\sigma}_{O(S/R)} = 0$$

$$\text{Donc : } \vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{O(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}_{O(S/R)} \right]_R \quad \text{d'où} \quad \vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{O(S/R)} = C \cdot \frac{d}{dt} (\varphi' + \psi' \cos\theta)$$

$$c) \vec{u} \cdot \vec{\delta}_{O(S/R)} = \vec{u} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{O(S/R)} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_{O(S/R)} \right]_R - \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{\sigma}_{O(S/R)}$$

$$\left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})} + \vec{\Omega}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})/R} \wedge \vec{u} = \vec{0} + \psi' \vec{z} \wedge \vec{u} = \psi' \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{\sigma}_{O(S/R)} = A \cdot \psi' \sin\theta \cos\theta - C(\varphi' + \psi' \cos\theta) \psi' \sin\theta$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\delta}_{O(S/R)} = A \cdot \theta'' + \psi' \sin\theta \cdot [C(\varphi' + \psi' \cos\theta) - A \cdot \psi' \cos\theta]$$

Moment cinétique par rapport à un axe  $\Delta$

On définit le moment cinétique  $\sigma_{\Delta}$  de  $S$  par rapport à l'axe  $\Delta$  de vecteur directeur  $\vec{u}$  par

$$\sigma_{\Delta} = \vec{\sigma}_A \cdot \vec{u},$$

où  $A$  est un point de  $\Delta$ ;  $\sigma_{\Delta}$  est indépendant du choix de  $A$ . On définit de même le moment d'inertie de  $S$  par rapport à l'axe  $\Delta$  au moyen de

$$J_{\Delta} = \int_S r^2 dm,$$

où  $r$  représente la distance à l'axe du point courant de  $S$ . Une fois le moment d'inertie ainsi défini, on trouve que le moment cinétique par rapport à  $\Delta$  a pour expression

$$\sigma_{\Delta} = J_{\Delta} \omega,$$

$\omega$  étant la vitesse angulaire de rotation autour de  $\Delta$ .

Dans le cas où  $\Delta$  est situé à une distance  $a$  de  $G$ , le théorème de Huygens permet d'écrire

$$J_{\Delta} = J_G + ma^2,$$

avec  $J_G$  moment d'inertie de  $S$  par rapport à l'axe  $\Delta_G$  parallèle à  $\Delta$  et passant par  $G$

**Exemple**

Moment d'inertie d'une sphère pleine homogène de rayon  $R$  et de masse  $m$  par rapport à un de ses diamètres  $\Delta$ .

$$J_{\Delta} = \int_S (x^2 + y^2) dm = \int_S (x^2 + z^2) dm = \int_S (y^2 + z^2) dm.$$

En sommant les trois expressions précédentes, il vient

$$3J_{\Delta} = 2 \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2 \int_S r^2 dm,$$

où  $r$  est la variable radiale des coordonnées sphériques. Soit  $\rho$  la masse volumique de la sphère ( $\rho = 3m/(4\pi R^3)$ )

$$J_{\Delta} = \frac{2}{3} \rho \int_S r^2 dv = \frac{2}{3} \rho \int_0^R r^2 4\pi r^2 dr = \frac{2}{5} mR^2.$$

**7 - Problème résolu : Régulateur de vitesse**

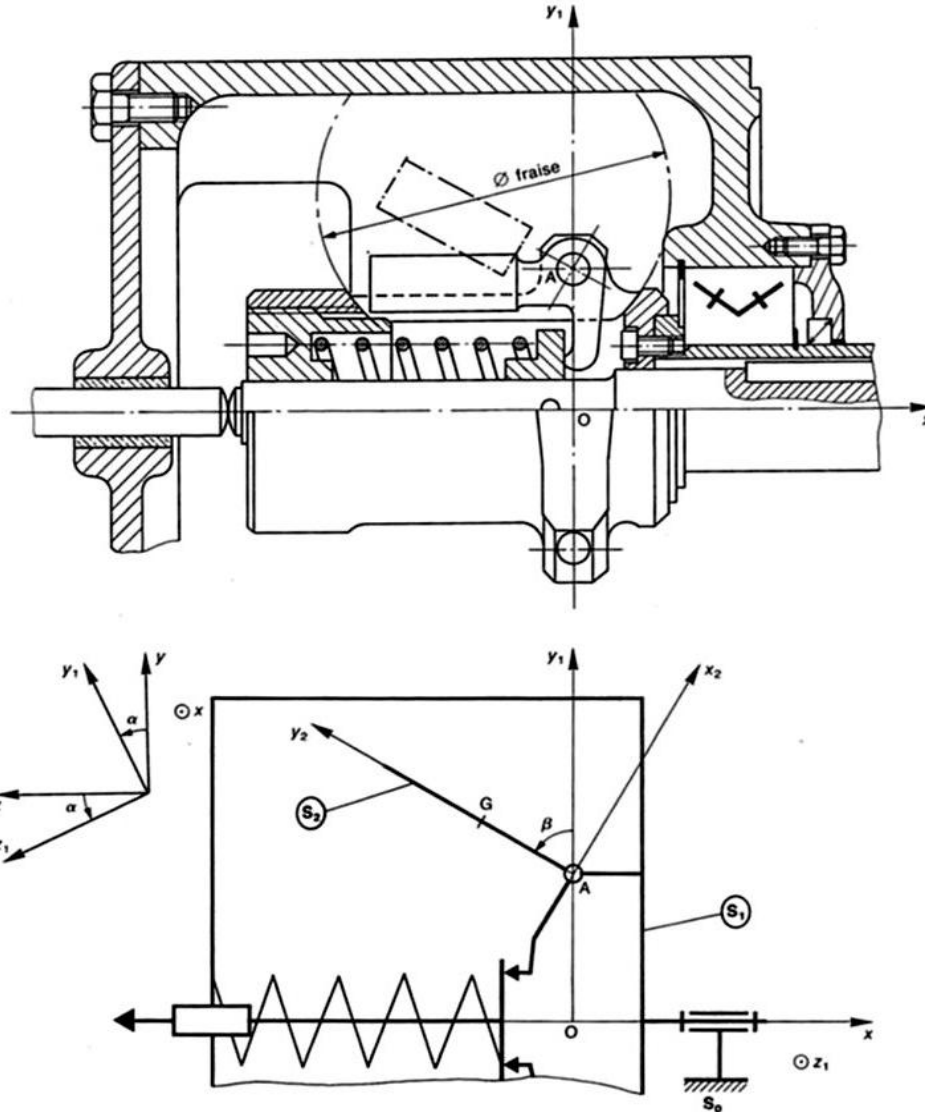
Le repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  galiléen est lié au corps  $(S_0)$

$(S_1)$  a une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x})$  avec  $(S_0)$

$(S_1)$  est le support des masselottes  $(S_2)$  et  $(S_2)$ ;  $\alpha = (\vec{y}, \vec{y}_1)$

$(S_2)$  a une masse  $(m)$  et est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$ ;  $\vec{OA} = a \cdot \vec{y}_1$ ;  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$  est lié à  $(S_2)$

$\vec{AG} = b \cdot \vec{y}_2$ ;  $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ ;  $\beta$  est constant pendant la phase étudiée



**7-1 Calcul approché:** On suppose la masse de  $(S_2)$  concentrée en son centre d'inertie

Projection sur  $z_1$  du moment dynamique au point A de  $(S_2)$  dans son mouvement par rapport à R :  $\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{A(S_2/R)}$

$$\{\mathcal{D}_{(S_2/R)}\} = \begin{cases} m \vec{\Gamma}_{G/R} \\ \vec{\delta}_{A(S_2/R)} \end{cases} \quad \vec{\delta}_{A(S_2/R)} = \int_{G \in S_2} \vec{AG} \wedge \vec{\Gamma}_{G/R} dm$$

$$\vec{V}_{G/R} = \vec{V}_{A/R} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{AG} = a \cdot \alpha' \vec{z}_1 + \alpha' \vec{x}_1 \wedge b \cdot \vec{y}_2 = a \cdot \alpha' \vec{z}_1 + b \alpha' \cos \beta \vec{z}_1 = (a + b \cos \beta) \alpha' \vec{z}_1$$

$$\vec{\Gamma}_{G/R} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{V}_{G/R} \right]_R = (a + b \cos \beta) \alpha'' \vec{z}_1 - (a + b \cos \beta) \alpha'^2 \vec{y}_1 \quad (\beta \text{ est constant pendant la phase étudiée})$$

$$\vec{\Gamma}_{G/R} = (a + b \cos \beta) (\alpha'' \vec{z}_1 - \alpha'^2 \vec{y}_1)$$

$$\vec{AG} \wedge \vec{\Gamma}_{G/R} = b \cdot \vec{y}_2 \wedge [(a + b \cos \beta) (\alpha'' \vec{z}_1 - \alpha'^2 \vec{y}_1)] = b \cdot [(a + b \cos \beta) (\alpha'' \vec{x}_2 + \sin \beta \cdot \alpha'^2 \vec{z}_1)]$$

Donc :  $\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{A(S_2/R)} = b \cdot (a + b \cos \beta) (\sin \beta \cdot \alpha'^2)$

**7 - 2 La matrice d'inertie de (S<sub>2</sub>) au point A dans la base de R<sub>2</sub> est :**  $I_A(S_2) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)}$

1) Moment cinétique au point A de (S<sub>2</sub>) dans son mouvement par rapport à R :  $\vec{\sigma}_{A(S_2/R)}$

$$\vec{\sigma}_{A(S_2/R)} = m. \vec{AG} \wedge \vec{V}_{A/R} + I_A(S_2). \vec{\Omega}_{S_2/R}$$

$$\vec{V}_{A/R} = a.\alpha' \vec{z}_1 \quad \vec{AG} = b.\vec{y}_2 \quad \vec{\Omega}_{S_2/R} = \vec{\Omega}_{S_2/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R} = \beta' \vec{z}_1 + \alpha' \vec{x}_1 = \alpha' \vec{x}_1 \text{ car } \beta = \text{constante}$$

$$\vec{\Omega}_{S_2/R} = \alpha'.(\cos \beta \vec{x}_2 - \sin \beta \vec{y}_2)$$

$$m. \vec{AG} \wedge \vec{V}_{A/R} = m. b.\vec{y}_2 \wedge a.\alpha' \vec{z}_1 = m.b.a. \alpha' \vec{x}_2$$

$$I_A(S_2). \vec{\Omega}_{S_2/R} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)} \begin{bmatrix} \alpha' \cos \beta \\ -\alpha' \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} = (A \alpha' \cos \beta + F \alpha' \sin \beta) \vec{x}_2 - (F \alpha' \cos \beta + B \alpha' \sin \beta) \vec{y}_2$$

$$\vec{\sigma}_{A(S_2/R)} = \alpha' (m.b.a + A \cos \beta + F \sin \beta) \vec{x}_2 - \alpha' (F \cos \beta + B \sin \beta) \vec{y}_2$$

2) Projection sur  $\vec{z}_1$  du moment dynamique au point A de S<sub>2</sub> dans le mouvement par rapport à R

$$\vec{\delta}_{A(S_2/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A(S_2/R)} \right]_R + m. \vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{G/R}$$

$$\vec{V}_{A/R} = a.\alpha' \vec{z}_1 \quad \vec{V}_{G/R} = a.\alpha' \vec{z}_1 + b. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \quad \text{avec } \vec{y}_2 = \cos \beta \vec{y}_1 - \sin \beta \vec{x}_1$$

$$\vec{V}_{G/R} = a.\alpha' \vec{z}_1 + b. \cos \beta \vec{z}_1$$

$$\text{D'où } \vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{G/R} = \vec{0}$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{A(S_2/R)} = \vec{z}_1 \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A(S_2/R)} \right]_R = \frac{d}{dt} \left[ \vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}_{A(S_2/R)} \right]_R - \left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R \cdot \vec{\sigma}_{A(S_2/R)}$$

$$\left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R = -\alpha' \vec{y}_1 = -\alpha' (\sin \beta \vec{x}_2 + \cos \beta \vec{y}_2)$$

$$\left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R \cdot \vec{\sigma}_{A(S_2/R)} = -\alpha'^2 (m.b.a + A \cos \beta + F \sin \beta) \sin \beta + \alpha'^2 (F \cos \beta + B \sin \beta) \cos \beta$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}_{A(S_2/R)} \right]_R = 0$$

$$\text{D'où : } \vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{A(S_2/R)} = -\alpha'^2 (m.b.a + A \cos \beta + F \sin \beta) \sin \beta + \alpha'^2 (F \cos \beta + B \sin \beta) \cos \beta$$



## 8 - Exemples d'application

### Calcul des moments d'inertie de différents solides simples

Déterminer les axes principaux et les moments d'inertie des solides homogènes suivants

1. Un parallélépipède rectangle de côté  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , étudier les cas  $a = b$  et  $a = b = c$ .
2. Une boule de rayon  $r$ .
3. Une balle creuse de rayon  $r$  et d'épaisseur  $e$ .
4. Un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .
5. Un tuyau de rayon extérieur  $R$  de hauteur  $H$  et d'épaisseur  $e$ .

### Solution

1. Le parallélépipède étant homogène, le centre de gravité  $G$  est à l'intersection des diagonales. Il possède trois plans de symétrie parallèles aux faces, on en déduit que les trois axes principaux sont les axes passant par les centres des faces opposées. En introduisant un repère cartésien  $\mathcal{R}_0 = \{G, \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z\}$  avec le vecteur  $\vec{e}_X$  parallèle aux arêtes de longueur  $a$ , le vecteur  $\vec{e}_Y$

parallèle aux arêtes de longueur  $b$  et le vecteur  $\vec{e}_Z$  parallèle aux arêtes de longueur  $c$ .

$$I_X = \int_V (Y^2 + Z^2) dm = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (Y^2 + Z^2) \rho dXdYdZ$$

En décomposant les intégrales il vient :

$$I_X = \int_V (Y^2 + Z^2) dm = \rho \underbrace{\int_{-c/2}^{c/2} dZ}_c \underbrace{\int_{-b/2}^{b/2} Y^2 dY}_{\frac{1}{12}b^3} \underbrace{\int_{-a/2}^{a/2} dX}_a + \rho \underbrace{\int_{-c/2}^{c/2} Z^2 dZ}_{\frac{1}{12}c^3} \underbrace{\int_{-b/2}^{b/2} dY}_b \underbrace{\int_{-a/2}^{a/2} dX}_a$$

soit

$$I_X = \rho abc \frac{1}{12} (b^2 + c^2)$$

et finalement en introduisant la masse  $M = \rho abc$  du solide

$$I_X = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$$

De la même façon, on obtient :

$$I_Y = \frac{M}{12} (a^2 + c^2)$$

et

$$I_Z = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

2. Le centre de gravité  $G$  d'une boule homogène est au centre de la boule est comme tout axe passant par  $G$  est un axe de symétrie d'ordre supérieur à 3, tout axe passant par  $G$  est un axe principal d'inertie. On introduit le repère cartésien  $\mathcal{R} = \{G, \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z\}$ , les axes étant choisis sans distinction.

Les trois axes principaux étant aussi des axes de symétrie d'ordre supérieur à trois, les trois moments d'inertie sont égaux:

$$I_X = I_Y = I_Z = I_{\text{avec}}$$

$$I = \int_V (Y^2 + Z^2) dm = \int_V (X^2 + Z^2) dm = \int_V (X^2 + Y^2) dm$$

On en déduit facilement que

$$\int_V X^2 dm = \int_V Y^2 dm = \int_V Z^2 dm$$

Au lieu de faire le calcul directement, il est plus simple de calculer

$$\int_V (X^2 + Y^2 + Z^2) dm = 3 \int_V X^2 dm$$

car l'intégrale  $\int_V (X^2 + Y^2 + Z^2) dm$  se calcule simplement en passant aux coordonnées polaires :

$$\int_V (X^2 + Y^2 + Z^2) dm = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi =$$

$$\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5} \rho \pi R^5 = \frac{3}{5} MR^2$$

où l'on a introduit la masse  $M = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$ . Soit finalement

$$\int_V X^2 dm = \int_V Y^2 dm = \int_V Z^2 dm = \frac{1}{5} MR^2 \quad \text{et donc} \quad I = \frac{2}{5} MR^2$$

3. La balle creuse possède les mêmes symétries que la boule, on en déduit donc que le centre de gravité  $G$  est au centre de la balle et que les trois axes du repère cartésien  $\mathcal{R} = \{G, \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z\}$  sont des axes principaux d'inertie de moments égaux  $I_X = I_Y = I_Z = I$ . Pour calculer le moment d'inertie, on peut décomposer la balle creuse en une boule homogène de rayon  $R$  à laquelle on a prélevé une boule homogène de rayon  $R - e$ . Dès lors, on peut calculer  $I$  comme

$$I = \underbrace{\frac{2}{5} \rho \frac{4}{3} \pi R^5}_{\text{boule de rayon } R} - \underbrace{\frac{2}{5} \rho \frac{4}{3} \pi (R - e)^5}_{\text{boule de rayon } R - e}$$

$$M = \frac{4}{3} \pi (R^3 - (R - e)^3)$$

soit en introduisant la masse

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \frac{1 - \left[1 - \frac{e}{R}\right]^5}{1 - \left[1 - \frac{e}{R}\right]^3}$$

4. Le cylindre étant homogène, le centre de gravité  $G$  est situé au milieu de l'axe de symétrie  $\Delta$ , l'axe  $\Delta$  est donc un axe principal d'inertie. Tout plan contenant  $\Delta$  est un plan de symétrie donc les deux autres axes principaux sont perpendiculaires à  $\Delta$  et passent par le centre de gravité. On introduit le repère cartésien  $\mathcal{R} = \{G, \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z\}$  en alignant  $\vec{e}_Z$  le long de l'axe  $\Delta$ .

Comme  $\Delta$  est un axe de symétrie d'ordre supérieur à 3  $I_X = I_Y$ . Calculons  $I_X$ :

$$I_X = \int_C (Y^2 + Z^2) dm$$

Pour mener le calcul, il faut découper le cylindre en "tranches" parallèles au plan  $(Y, Z)$  et d'épaisseur  $dX$ . Chaque tranche est un parallépipède rectangle d'épaisseur  $dX$  de longueur  $H$  et de largeur  $l(X)$ . La largeur  $l(X)$  dépend de la position  $X$  de la tranche dans le cylindre. Le calcul s'effectue en intégrant en premier lieu sur  $Y$  et  $Z$  puis sur  $X$ . Comme le cylindre est homogène, l'élément de masse  $dm$  vaut  $dm = \rho dX dY dZ$ .

$$I_X = \rho \int_{-R}^R \left[ \int_{-H/2}^{H/2} \int_{-l(X)/2}^{l(X)/2} (Y^2 + Z^2) dY dZ \right] dX$$

Or

$$\int_{-H/2}^{H/2} \int_{-l(X)/2}^{l(X)/2} (Y^2 + Z^2) dY dZ = \underbrace{\int_{-H/2}^{H/2} \int_{-l(X)/2}^{l(X)/2} Y^2 dY dZ}_{\frac{1}{12} H l(X)^3} + \underbrace{\int_{-H/2}^{H/2} \int_{-l(X)/2}^{l(X)/2} Z^2 dY dZ}_{\frac{1}{12} H^3 l(X)}$$

Soit

$$I_X = \frac{1}{12} \rho \int_{-R}^R [H l(X)^3 + H^3 l(X)] dX$$

la largeur  $l(X)$  est la longueur d'une corde d'un cercle de rayon  $R$  à une distance  $X$  du centre du cercle, on en déduit la

relation  $\left(\frac{l(X)}{2}\right)^2 + X^2 = R^2$  soit  $l(X) = 2 \sqrt{R^2 - X^2}$  d'où

$$I_X = \frac{2}{3}H\rho \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - X^2}^3 dX + \frac{1}{6}\rho H^3 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - X^2} dX$$

Les calculs se simplifient en posant  $X = R \sin \theta$  ainsi  $\sqrt{R^2 - X^2} = R \cos \theta$  et  $dX = R \cos \theta d\theta$  de sorte que :

$$I_X = \frac{2}{3}H\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^4 \cos^4 \theta d\theta + \frac{1}{6}\rho H^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos^2 \theta d\theta$$

Pour calculer les intégrales, il faut linéariser les cosinus

$$\cos^4 \theta = \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 = \frac{e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}}{2^4} + 4 \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2^4} + \frac{6}{2^4} = \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$$

soit

$$I_X = \frac{2}{3}HR^4\rho \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8} \right) d\theta}_{\frac{3\pi}{8}} + \frac{1}{6}\rho H^3 R^2 \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta}_{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_X = \frac{2}{3}HR^4\rho \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{12}\rho H^3 R^2 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\pi HR^4\rho + \frac{1}{12}\pi\rho H^3 R^2 = M \left[ \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}H^2 \right]$$

Le calcul de  $I_Z$  est plus rapide :

$$I_Z = \int_C (X^2 + Y^2) dm = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho H 2\pi r dr = \rho H 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2$$

5. Le tuyau possède le même centre de gravité et les mêmes axes de symétrie que le cylindre précédent. Comme pour la balle creuse, on peut imaginer le tuyau comme composé d'un cylindre plein de rayon  $R$  auquel on retire un cylindre de rayon  $R - e$ . Cela donne pour les moments principaux en appelant  $\rho$  la densité :

$$I_X = I_Y = \underbrace{\frac{1}{4}\pi HR^4\rho + \frac{1}{24}\pi\rho H^3 R^2}_{\text{Cylindre de rayon } R} - \underbrace{\left[ \frac{2}{8}\pi H (R - e)^4 \rho + \frac{1}{24}\pi\rho H^3 (R - e)^2 \right]}_{\text{Cylindre de rayon } R - e}$$

$$I_X = I_Y = \frac{1}{4}\pi H \left[ R^4 - (R - e)^4 \right] \rho + \frac{1}{24}\pi\rho H^3 \left[ R^2 - (R - e)^2 \right]$$

$$I_X = I_Y = \frac{1}{4}M \left[ R^2 + (R - e)^2 \right] + \frac{1}{24}MH^2$$

$$\text{où } M \text{ est la masse du tuyau } M = \rho H \left[ R^2 - (R - e)^2 \right] \pi$$

## Principe fondamental de la dynamique

La cinématique correspond à l'étude des vecteurs vitesse et accélération, mais ces quantités sont dues à l'interaction entre le corps considéré et le monde extérieur, plus précisément aux forces qui agissent sur ce corps. La relation entre le champ de la cinématique et celui des forces est donnée par la relation fondamentale de la dynamique. En conséquence, il est indispensable de préciser le référentiel dans lequel on considère cette relation fondamentale de la dynamique. En particulier, cette relation ne peut être appliquée que dans un référentiel dit galiléen.

### 1 - Masse et quantité de mouvement

Si on essaie de déplacer une voiture en panne sèche, il faut souvent s'y mettre à plusieurs, alors que pour un ballon de foot, cela n'est pas difficile seul. Cette différence vient que pour la voiture et le ballon de foot, la vitesse de chacun de ces objets ne suffit pas à le caractériser, mais il faut aussi considérer quelque chose qui fait qu'il est plus difficile de déplacer la voiture que le ballon de foot. Cette 'inertie' au déplacement se traduit par la masse de l'objet. On suppose dans ce cours que cette masse est indépendante du mouvement de l'objet et du référentiel considéré. Ce ne serait pas le cas si on s'intéressait au lancement d'une fusée qui permet de la masse au fur et à mesure qu'elle s'élève dans le ciel.

Pour donner une valeur précise à cette masse, la seule méthode est de passer sur la balance c'est à dire de comparer la masse de l'objet à une référence elle-même calibrée par rapport à la masse étalon de un kilogramme en platine iridié déposé au Bureau des Poids et Mesures et qui est la référence internationale pour la masse. On peut d'ailleurs remarquer que l'étalon de masse n'a pas évolué depuis 1901 contrairement aux autres échelles fondamentales telles que la seconde ou le mètre. Cette définition de la masse fait en fait intervenir le poids d'un corps c'est à dire son interaction avec la Terre et il est possible que cette masse ne corresponde pas à la masse d'inertie définie au début. L'expérience montre néanmoins que ces deux notions sont identiques.

Cette définition de la masse nous permet de définir la quantité de mouvement d'un point matériel de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel donné :  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Cette définition porte bien son nom et traduit le fait qu'une voiture a une quantité de mouvement plus grande qu'un ballon de foot même si les deux se déplacent à la même vitesse. Ainsi dans les cours ultérieurs de physique, c'est cette quantité de mouvement qui jouera un rôle fondamental et non la vitesse de l'objet.

### 2 - Référentiel galiléen - Lois de Newton

#### 2 - 1 Définition

On considère un référentiel ( $\mathcal{R}$ ) muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . Ce référentiel est appelé référentiel galiléen, si un mobile infiniment éloigné de tout autre objet matériel :

- y est animé d'un mouvement rectiligne uniforme
- ou bien y est immobile.

Remarque : on appelle aussi les référentiels galiléens, référentiels d'inertie.

#### 2 - 2 Référentiel de Copernic

La définition des référentiels galiléens pose la question de leur existence: peut-on trouver un référentiel galiléen dans la nature sachant qu'il faut que le mobile soit éloigné suffisamment des autres pour ne pas interagir avec eux! Le plus 'simple' imaginé est basé sur notre bon vieux système solaire qui semble en première approximation isolé du reste de l'univers et qui interagit peu avec les étoiles avoisinantes.

En première approximation, on considère le système solaire comme un système isolé c'est à dire qui n'interagit pas avec d'autres étoiles ou systèmes planétaires.

Le référentiel de Copernic est défini par son origine  $O$  qui est le centre de masse (ou barycentre) du système solaire et par trois axes reliant cette origine  $O$  à trois étoiles très éloignées (dites 'fixes'). Dans cette approximation, le référentiel de Copernic est un référentiel galiléen.

En première approximation, le barycentre du système solaire se trouve au centre du Soleil tout simplement parce que la masse du Soleil est très supérieure à la somme de la masse de tous les autres objets du système solaire.

Le référentiel de Copernic étant galiléen, on peut alors construire une infinité de référentiels galiléens, il s'agit de tous les référentiels animés d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à ce référentiel comme nous le montrerons dans le chapitre sur les changements de référentiels. Réciproquement, tout référentiel animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic (c'est à dire dont l'origine du repère est animé...) est un référentiel galiléen.

## 2 - 3 Référentiel galiléen approché

Dans l'approximation précédente, sachant que la Terre tourne autour du Soleil et n'est donc pas animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au Soleil, un référentiel avec comme origine le centre de la Terre et avec comme axes, les directions des trois étoiles fixes, n'est pas galiléen. En conséquence, tout référentiel avec pour origine un quelconque point de la Terre ne peut pas être galiléen et donc on ne pourra pas appliquer la relation fondamentale de la dynamique.

Pour sortir de cette impasse, on peut remarquer que le mouvement de la Terre sur son orbite quasi-circulaire est lent et qu'il faut, comme chacun le sait, une année pour en faire le tour. En général, l'échelle de temps sur laquelle se produit l'étude du mouvement qu'on étudie est au plus de quelques heures. A cette échelle de temps, l'orbite terrestre peut être approximé par sa tangente, et donc en première approximation, la Terre parcourt un mouvement rectiligne, ce mouvement est uniforme en première approximation car l'orbite de la Terre est quasi-circulaire. De manière approché, un référentiel ayant pour origine le centre de la Terre et ayant pour 3 axes, les trois directions du référentiel de Copernic est un référentiel galiléen approché.

Le centre de la Terre, n'est pas forcément l'origine la plus pratique, une origine à la surface de la Terre l'est nettement plus. Comme la terre tourne sur elle-même, on se retrouve avec le même problème que précédemment. On peut faire exactement le même raisonnement qu'au paragraphe précédent en remplaçant le centre du Soleil par le centre de la Terre et la Terre par un point à la surface de la Terre. On aboutit à ce que un point à la surface de la Terre peut-être pris comme origine et on prend comme axes, trois directions fixes. On obtient alors de nouveau un référentiel galiléen approché. Évidemment, ceci n'est valable strictement qu'à une échelle de temps encore plus courte car on a négligé la rotation de la Terre sur elle-même.

## 2 - 4 Lois de Newton dans un référentiel galiléen

**1<sup>ère</sup> loi : Principe de l'inertie** . Un objet livré à lui-même, sans interaction avec les autres objets reste au repos si il était initialement au repos ou bien est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme si il était initialement en mouvement.

**2<sup>ème</sup> loi : Principe fondamental de la dynamique** . Dans un référentiel galiléen, le mouvement d'un point matériel de masse  $m$  soumis à un ensemble de forces dont la résultante est  $\vec{F}$  est caractérisé par son accélération

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} .$$

On écrit ce principe sous la forme :  $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

**3<sup>ème</sup> loi : Principe de l'action et de la réaction** . Lorsque 2 points matériels A et B sont en interaction, la force qu'exerce le point matériel A sur le point matériel B est de même intensité, parallèle mais de direction opposée à la

force qu'exerce le point matériel B sur le point matériel A :  $\vec{F}_{A \rightarrow B} = - \vec{F}_{B \rightarrow A}$

## 3 - Principe fondamental de la dynamique.- Théorèmes généraux de la dynamique

### 3 - 1 Enoncé du principe fondamental

Soit un solide  $S$  de masse volumique  $\rho$  et un référentiel  $\mathcal{R}$ . On définit le tenseur dynamique de  $S$  dans  $\mathcal{R}$  par

$$(D) = \begin{cases} \vec{R}_\delta = \int_{M \in S} \vec{a}(M/\mathcal{R}) \rho d\tau \\ \vec{\delta}_A = \int_{M \in S} \vec{AM} \wedge \vec{a}(M/\mathcal{R}) \rho d\tau, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \boxed{\{D_{(S/R)}\} = \begin{cases} \int_{P \in S} \vec{r}_{P/R} dm \\ \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{r}_{P/R} dm \end{cases}}$$

où  $\vec{a}(M/\mathcal{R})$  (ou  $\vec{r}_{P/R}$ ) est l'accélération du point  $M$  (ou du point P) dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

Le principe fondamental de la dynamique s'énonce comme suit :

**Il existe un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, et au moins une chronologie appelée chronologie galiléenne, tels que pour tout sous-ensemble matériel (e) d'un ensemble matériel (E) le torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$  soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures à (e)**

$$\{\mathcal{D}_{(e/R)}\} = \{ \mathcal{T} \bar{e} \rightarrow e \} \text{ quel que soit } (e) \subset (E)$$

**3 - 2 Théorèmes généraux de la dynamique** (  $\mathcal{R}$  = repère galiléen )

$$\text{On a : } \{\mathcal{D}_{(e/R)}\} = \begin{cases} m\vec{\Gamma}_{G/R} \\ \vec{\delta}_{A(S/R)} \end{cases} \text{ et } \{ \mathcal{T} \bar{e} \rightarrow e \} = \begin{cases} \vec{R}_{(\bar{e} \rightarrow e)} \\ \vec{M}_{A(\bar{e} \rightarrow e)} \end{cases}$$

Théorème de la résultante dynamique

Pour tout sous-ensemble (e) de l'ensemble (E) en mouvement par rapport au repère galiléen (R) , la résultante dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$  est égale à la résultante générale du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e)

$$m\vec{\Gamma}_{G/R} = \vec{R}_{(\bar{e} \rightarrow e)}$$

Théorème du moment dynamique

Pour tout sous-ensemble (e) de l'ensemble (E) en mouvement par rapport au repère galiléen (R) , la moment dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$  est égal au moment résultant du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e)

$$\vec{\delta}_{A(S/R)} = \vec{M}_{A(\bar{e} \rightarrow e)}$$

quel que soit A

**3 - 3 Equations du mouvement**

■ Définition

Une équation de mouvement est une équation différentielle du second ordre traduisant les théorèmes généraux , dans laquelle ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique.

■ Intégrale première du mouvement

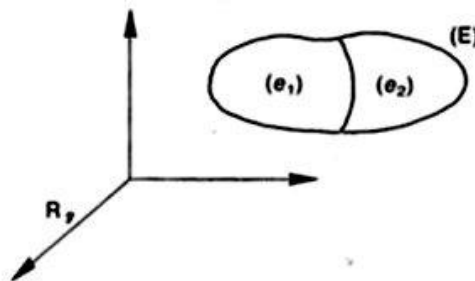
Une intégrale première du mouvement est une équation différentielle du premier ordre de la forme :  $f(q_i', q_i, t) = \text{constante}$ , obtenue par intégration d'une équation du mouvement

**4 - Principe des actions réciproques.( ou théorème des actions mutuelles)**

Théorème

**L'action mécanique du sous-ensemble matériel (e<sub>2</sub>) sur le sous-ensemble matériel (e<sub>1</sub>) est opposée à l'action mécanique de (e<sub>1</sub>) sur (e<sub>2</sub>).**

$$\{ \mathcal{T} e_2 \rightarrow e_1 \} = - \{ \mathcal{T} e_1 \rightarrow e_2 \}$$



Cas particuliers

Le torseur dynamique du sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) peut être nul. On se ramène alors au principe fondamental de la statique.

Ce torseur est nul dans les 3 cas suivants :

1 - (e) est en équilibre par rapport à  $\mathcal{R}$

2 - (e) est de masse nulle

3 - Le solide considéré est animé d'un mouvement uniforme ( sans accélération )

**Exemple 1**

Deux pièces  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{x})$   
 Le ressort ( $r$ ) de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  est supposé de masse nulle.

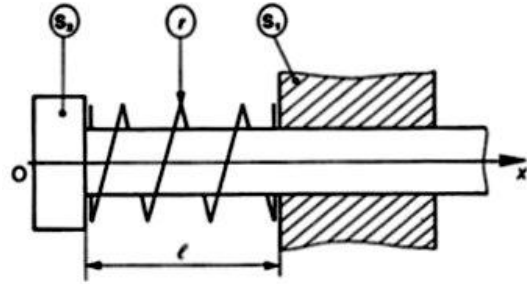
Action mécanique du ressort sur  $S_1$

$$\{ \mathcal{T}r \rightarrow S_1 \} = \begin{Bmatrix} k(l - l_0)\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

Principe fondamental appliqué au ressort ( $r$ ) ( de masse nulle )

Donc :  $\{ \mathcal{T}r S_1 \rightarrow r \} + \{ \mathcal{T}r S_2 \rightarrow r \} = \{ \vec{0} \}$

Compte-tenu du théorème des actions mutuelles :  $\{ \mathcal{T}r \rightarrow S_2 \} = \begin{Bmatrix} k(l - l_0)\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$



**Exemple 2**

(e) est un solide (S) de masse  $m$  ayant une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_g)$

- (S) est animé d'un mouvement de rotation uniforme  $\theta' = cte$
- le centre d'inertie G de (S) est sur l'axe de rotation

■ Matrice d'inertie de (S) dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_g)$

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_g)}$$

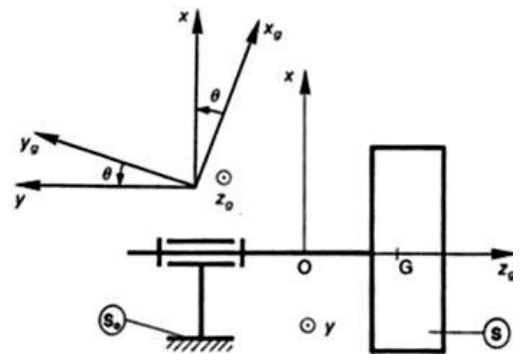
Torseur dynamique en O

$$\{ \mathcal{D}_{(S/R)} \} = \begin{Bmatrix} m\vec{r}_{G/R} \\ \vec{\delta}_{O(S/R)} \end{Bmatrix}_O$$

O est fixe dans  $R_g$ , donc :  $\vec{\delta}_{O(S/Rg)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{O(S/Rg)} \right]_R$

$$\vec{\sigma}_{O(S/Rg)} = \vec{J}_O(S, \vec{\Omega}_{S/Rg}) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_g)} = C \theta' \vec{z}_g$$

d'où  $\vec{\delta}_{O(S/Rg)} = \vec{0}$  car  $\theta' = cte$



**5 - Applications**

**5 - 1 Application 1**

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  galiléen lié au plan II

$$\vec{g} = -g\vec{x}; \alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}) \quad (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2});$$

(S) homogène, de masse  $m$  et de rayon  $a$ , centre d'inertie G

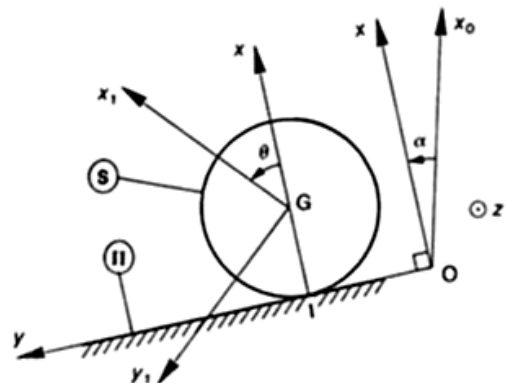
$I_G = a \cdot \vec{x}$  f = coefficient de frottement

■ Action mécanique de contact de (II) sur (S)

$$\{ \mathcal{T}_{II \rightarrow S} \} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I \quad \text{avec } \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y};$$

$R_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  est lié à (S)

On pose  $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$



1) Equation du mouvement de S par rapport à (II)

Inventaire des actions :

Pesanteur :  $\{ \mathcal{T}_g \rightarrow S \} = \begin{Bmatrix} -mg\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$       Action de contact :  $\{ \mathcal{T}_{II \rightarrow S} \} = \begin{Bmatrix} X\vec{x} + Y\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$

Pour obtenir directement une équation scalaire ne faisant pas intervenir les inconnues X et Y, il faut appliquer le théorème du moment dynamique en I

$$\{ \mathcal{T}_{\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{s}} \} = \begin{Bmatrix} -mg \cdot \vec{x}_0 \\ mg \cdot a \cdot \sin \alpha \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_{I(S/Rg)} = \vec{\sigma}_{G(S/Rg)} + m \vec{V}_{G/R} \wedge \vec{GI} \quad \vec{\sigma}_{G(S/Rg)} = \vec{J}_G(S, \vec{\Omega}_{S/Rg}) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix} = C \theta' \vec{z} \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

$$m \vec{V}_{G/R} \wedge \vec{GI} = m \cdot a \theta' \vec{y} \wedge -a \vec{x} = m \cdot a^2 \theta' \vec{z} \quad C = \frac{m \cdot a^2}{2}$$

$$\text{d'où : } \vec{\sigma}_{I(S/Rg)} = \frac{3m \cdot a^2}{2} \theta' \vec{z}$$

$$\vec{\delta}_{I(S/Rg)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{I(S/Rg)} \right]_R + m \vec{V}_{I/R} \wedge \vec{V}_{G/R} = \frac{3m \cdot a^2}{2} \theta'' \vec{z} + m a \theta' \vec{y} \wedge a \theta' \vec{y} \quad (\vec{V}_{I/R} = \vec{V}_{G/R} = a \theta' \vec{y})$$

$$\text{donc : } \vec{\delta}_{I(S/Rg)} = \frac{3m \cdot a^2}{2} \theta'' \vec{z}$$

$$\text{On applique le PFD : } \vec{\delta}_{I(S/Rg)} = \frac{3m \cdot a^2}{2} \theta'' \vec{z} = mg \cdot a \cdot \sin \alpha \cdot \vec{z}$$

$$\text{d'où l'équation en projection sur } O\vec{z} : \frac{3m \cdot a^2}{2} \theta'' = mg \cdot a \cdot \sin \alpha \text{ soit } \theta'' = \frac{2g}{3a} \sin \alpha$$

2)  $y$  = abscisse du centre d'inertie  $G$  de  $(S)$  sur l'axe  $O\vec{y}$ . On suppose que  $y = 0$  lorsque  $\theta = 0$

Equation du mouvement de  $(S)$  par rapport à  $(II)$  en fonction de  $y$

roulement sans glissement, alors  $y = a \cdot \theta$  donc  $y' = a \cdot \theta'$  et  $y'' = a \cdot \theta''$  donc

$$y'' = \frac{2g}{3} \sin \alpha$$

3) à  $t = 0$ ,  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$ ; Détermination de  $y(t)$  définissant la position de  $G$  dans  $R$

$$y'' = \frac{2g}{3} \sin \alpha \quad \text{donc } y' = \frac{2g}{3} \sin \alpha \cdot t + C_1 \text{ et } y = \frac{g}{3} \sin \alpha \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2 \quad (\text{avec } C_1 = C_2 = 0 \text{ car conditions initiales nulles})$$

Donc

$$y = \frac{g}{3} \sin \alpha \cdot t^2$$

4) Valeur maximale de  $\alpha$  pour que  $(S)$  roule sans glisser sur  $(II)$

$$\{ \mathcal{T}_{II \rightarrow \mathbf{s}} \} = \begin{Bmatrix} X \cdot \vec{x} + Y \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{Condition de roulement sans glissement en } I : \text{il faut } |Y| \leq f \cdot |X| \quad (1)$$

$$\{ \mathcal{D}_{(S/R)} \} = \begin{Bmatrix} m \vec{I}_{G/R} = ma \theta'' \vec{y} = m y'' \vec{y} \\ \vec{\delta}_{I(S/R)} \end{Bmatrix}$$

Résultante dynamique en projection sur  $Ox$  :  $-mg \cos \alpha + X = 0$  d'où  $X = mg \cos \alpha$

$$\text{sur } Oy : m g \sin \alpha + Y = \frac{2g}{3} m \sin \alpha \text{ d'où } Y = \frac{2g}{3} m \sin \alpha - m g \sin \alpha = m g \sin \alpha \left( \frac{2}{3} - 1 \right) = -\frac{1}{3} m g \sin \alpha$$

(1) impose donc :  $|\frac{1}{3} m g \sin \alpha| \leq f \cdot |m g \cos \alpha|$  soit

$$f \geq \frac{1}{3} \tan \alpha$$



5 - 2 Application 2

On considère la toupie de masse  $m$ , de centre d'inertie  $G$  et

d'axe de symétrie matérielle  $(O, \vec{z}_1)$

Matrice d'inertie de la toupie :

$$I_0(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-, -, \vec{z}_1)}$$

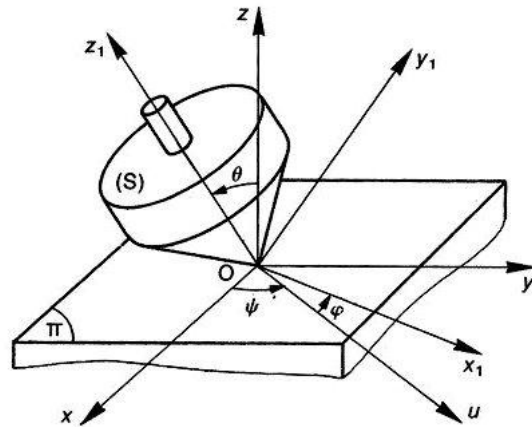
$R_1$  : repère lié à la matrice d'inertie  $G$

La position de la base de  $R_1$  par rapport à la base de  $R$  est définie par les angles d'Euler  $\psi, \theta, \varphi$

1<sup>ère</sup> base intermédiaire :  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$

2<sup>ème</sup> base intermédiaire :  $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$

$$\vec{g} = -g \cdot \vec{z} \quad \vec{OG} = \ell \vec{z}_1$$



1) Equations du mouvement de la toupie par rapport à  $\pi$

$$\{ \mathcal{T}_{\pi \rightarrow S} \} = \begin{Bmatrix} X \cdot \vec{x} + Y \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

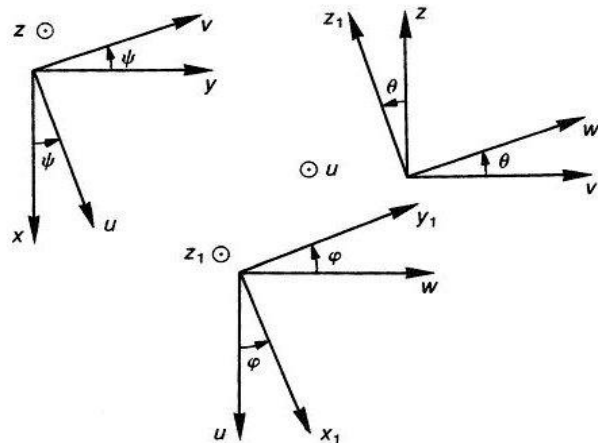
$$\{ \mathcal{T}_{g \rightarrow S} \} = \begin{Bmatrix} -mg \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Pour ne pas faire intervenir  $X, Y, Z$  (inconnues de liaison) il faut appliquer le théorème du moment dynamique en  $O$

$$\vec{M}_O(\vec{g}) = \vec{M}_G(\vec{g}) + (-mg\vec{z}) \wedge \vec{OG} = \vec{0} + (-mg\vec{z}) \wedge (\ell \vec{z}_1)$$

$$\vec{M}_O(\vec{g}) = mg \cdot \ell \cdot \sin\theta \vec{u}$$

$$\{ \mathcal{T}_{g \rightarrow S} \} = \begin{Bmatrix} -mg \cdot \vec{z} \\ mg \cdot \ell \cdot \sin\theta \vec{u} \end{Bmatrix}$$



donc  $\vec{M}_O(\vec{g} \rightarrow S) = mg \cdot \ell \cdot \sin\theta \vec{u}$  et ses projections sont nulles sur les vecteurs unitaires perpendiculaires à  $\vec{u}$

On va donc écrire l'équation vectorielle du moment dynamique  $\vec{\delta}_{0(S/R)}$  en projection :

- sur  $\vec{u}$  car  $\vec{M}_O(\vec{g} \rightarrow S)$  est sur  $\vec{u}$
- sur  $\vec{z}$  car  $\vec{z}$  est fixe dans la base de  $R$
- sur  $\vec{z}_1$  car  $\vec{z}_1$  est l'axe de révolution matérielle de  $(S)$

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = m \vec{OG} \wedge \vec{V}_{O/R} + \vec{J}_O(S, \vec{\Omega}_{S/R})$$

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = \vec{J}_O(S, \vec{\Omega}_{S/R})$$

$$\vec{\Omega}_{S/R} = \varphi' \vec{z}_1 + \theta' \vec{u} + \psi' \vec{z}$$

Dans  $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$  :  $\vec{\Omega}_{S/R} = \varphi' \vec{z}_1 + \theta' \vec{u} + \psi' (\cos\theta \vec{z}_1 + \sin\theta \vec{w}) = \theta' \vec{u} + \psi' \sin\theta \vec{w} + (\varphi' + \psi' \cos\theta) \vec{z}_1$

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta' \\ 0 \psi' \sin\theta \\ \varphi' + \psi' \cos\theta \end{bmatrix}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)}$$

(la matrice d'inertie est la même dans  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  que dans  $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$ )

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = A\theta' \vec{u} + A\psi' \sin\theta \vec{w} + C(\varphi' + \psi' \cos\theta) \vec{z}_1$$

a)  $\vec{\delta}_{0(S/R)}$  en projection sur  $\vec{z}$  soit  $\vec{z} \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)}$

$$\vec{z} \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)} = \vec{z} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{0(S/R)} \right]_R = \vec{z} \cdot \left[ \frac{d}{dt} (\vec{z} \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)}) \right]_R - \frac{d\vec{z}}{dt} \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)} \text{ avec } \frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{z} \cdot \vec{u} = 0; \quad \vec{z} \cdot \vec{w} = \sin\theta; \quad \vec{z} \cdot \vec{z}_1 = \cos\theta$$

$$\vec{z} \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)} = A\psi' \sin^2\theta + C(\varphi' + \psi' \cos\theta) \cos\theta$$

$$\vec{z} \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)} = \frac{d}{dt} [A\psi' \sin^2\theta + C(\varphi' + \psi' \cos\theta) \cos\theta]$$

b)  $\vec{\delta}_{0(S/R)}$  en projection sur  $\vec{z}_1$  soit  $\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)}$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)} \right]_R - \frac{d\vec{z}_1}{dt} \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)}$$

$$\left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)} + \vec{\Omega}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)/R} \wedge \vec{z}_1 = \vec{0} + (\theta' \vec{u} + \psi' \vec{z}) \wedge \vec{z}_1 = \psi' \sin \theta \vec{u} - \theta' \vec{w}$$

Ensuite on constate que  $\frac{d\vec{z}_1}{dt} \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)} = 0$

Donc :  $\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)} \right]_R$  d'où  $\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)} = C \cdot \frac{d}{dt} (\varphi' + \psi' \cos \theta)$

c)  $\vec{\delta}_{0(S/R)}$  en projection sur  $\vec{u}$  soit  $\vec{u} \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)}$

$$\vec{u} \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)} = \vec{u} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{0(S/R)} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)} \right]_R - \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)}$$

$$\left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})} + \vec{\Omega}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})/R} \wedge \vec{u} = \vec{0} + \psi' \cdot \vec{z} \wedge \vec{u} = \psi' \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)} = A \cdot \psi' \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - C(\varphi' + \psi' \cos \theta) \psi' \sin \theta$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)} = A \cdot \theta'' + \psi' \cdot \sin \theta \cdot [C(\varphi' + \psi' \cos \theta) - A \cdot \psi' \cos \theta]$$

L'application du PFD donne les équations issues du moment dynamique :

$$\frac{d}{dt} [A\psi' \sin^2 \theta + C(\varphi' + \psi' \cos \theta) \cos \theta] = 0 \quad \text{d'où } A\psi' \sin^2 \theta + C r_0 \cos \theta = \text{constante}$$

$$C \cdot \frac{d}{dt} (\varphi' + \psi' \cos \theta) = 0 \quad \text{donc } (\varphi' + \psi' \cos \theta) = \text{constante} = r_0$$

$$A \cdot \theta'' + \psi' \cdot \sin \theta \cdot [C(\varphi' + \psi' \cos \theta) - A \cdot \psi' \cos \theta] = m \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta$$

$$\text{donc } A \cdot \theta'' + \psi' \cdot \sin \theta \cdot [C \cdot r_0 - A \cdot \psi' \cos \theta] = m \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta$$

2) Conditions pour lesquelles il existe des mouvements tels que  $\psi' = \text{constante} = \psi'_0$

L'équation  $A\psi' \sin^2 \theta + C r_0 \cos \theta = \text{constante}$  donne en dérivant :  $A\psi'_0 \theta' \sin \theta \cos \theta - C r_0 \theta' \sin \theta = 0$  soit  $A\psi'_0 \cos \theta - C r_0 = 0$

Ce qui implique :  $\theta = \text{constante} = \theta_0$

De même en dérivant  $(\varphi' + \psi' \cos \theta) = \text{constante}$  on obtient :  $\varphi'' - \psi' \theta' \sin \theta = 0$  soit  $\varphi'' = 0$  et  $\varphi' = \text{constante} = \varphi'_0$

L'équation  $A \cdot \theta'' + \psi' \cdot \sin \theta \cdot [C \cdot r_0 - A \cdot \psi' \cos \theta] = m \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta$  aboutit à :  $\psi'_0 \cdot [C \cdot r_0 - A \cdot \psi'_0 \cos \theta_0] = m \cdot g \cdot l$

( en supposant que  $\sin \theta_0 \neq 0$  )

Dans ce mouvement dit stationnaire, l'axe de la toupie décrit d'un mouvement uniforme un cône d'axe  $(O, \vec{z})$  et de demi-angle au sommet  $\theta_0$

3) En considérant les mouvements où

$\psi' = \text{constante} = \psi'_0$

$\theta = \text{constante} = \theta_0$

$\varphi' = \text{constante} = \varphi'_0$

En admettant que la rotation propre  $\varphi'_0$  est très grande devant  $\psi'_0$  et  $\theta_0$ , déterminer  $\varphi'_0$  en fonction de ( on supposera A et C du même ordre de grandeur)

Si  $\varphi'_0 \gg \psi'_0$  et  $\varphi'_0 \gg \theta_0$  alors l'équation  $(\varphi' + \psi' \cos \theta) = \text{constante} = r_0$  indique que  $\varphi'_0 = r_0$

Par suite l'équation :  $\psi'_0 \cdot [C \cdot r_0 - A \cdot \psi'_0 \cos \theta_0] = m \cdot g \cdot l$  donne  $\psi'_0 \cdot C \cdot r_0 = \psi'_0 \cdot C \cdot \varphi'_0 = m \cdot g \cdot l$  soit

$$\varphi'_0 = \frac{m \cdot g \cdot l}{\psi'_0}$$

Application numérique :

$m = 30 \text{ g}$

$g = 10 \text{ m/s}^2$

$l = 3 \text{ cm}$

$C = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

$\psi'_0 = \pi \text{ rad/s}$

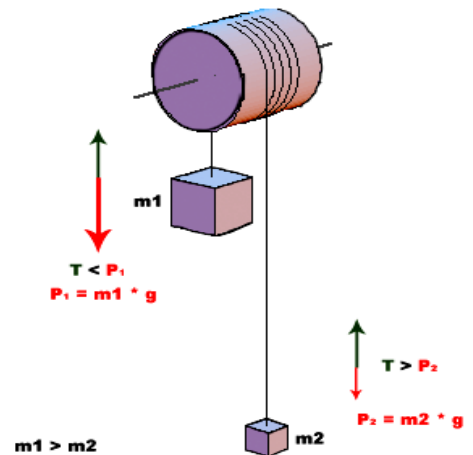
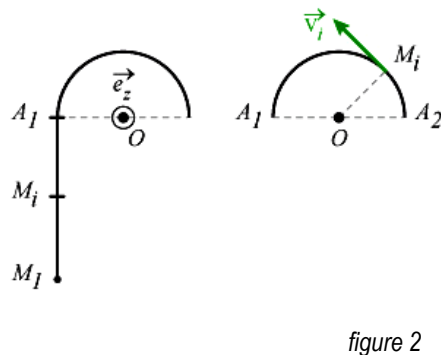
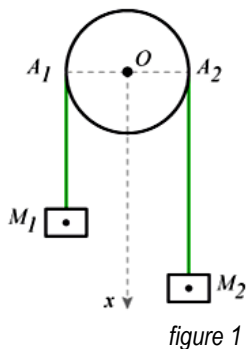
$$\varphi'_0 = 191,11 \text{ rad/s}$$

**Machine d'Atwood**

Deux corps  $M_1$  et  $M_2$ , de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$  sont reliés par un fil inextensible de longueur  $L$  et de masse  $m$  non négligeable, passant dans la gorge d'une poulie. Cette poulie sera considérée comme un disque homogène de masse  $m_p$  et de rayon  $R$ . La masse  $m_1$  étant supérieure à la masse  $m_2$ , le système débloqué à l'instant  $t = 0$  se met en mouvement.

1. Évaluer le moment cinétique du système par rapport à l'axe horizontal  $Oz$  de la poulie.
2. Évaluer le moment des forces extérieures par rapport à  $Oz$ .
3. En déduire la nature du mouvement. On supposera qu'à l'instant  $t = 0$   $x = 0$ . Que deviennent ces résultats si la masse du fil est négligeable devant les masses en présence.

**Solution détaillée**



1. Décomposons le moment cinétique :

$$\vec{L}_{/O} = \vec{L}_{1/O} + \vec{L}_{2/O} + \vec{L}_{A_1 M_1/O} + \vec{L}_{A_2 M_2/O} + \vec{L}_{A_1 A_2/O} + \vec{L}_{P/O}$$

avec

$\vec{L}_{1/O}$  moment cinétique par rapport à  $O$  de la masse  $m_1$

$\vec{L}_{2/O}$  moment cinétique par rapport à  $O$  de la masse  $m_2$

$\vec{L}_{A_1 M_1/O}$  moment cinétique par rapport à  $O$  de la portion de fil  $A_1 M_1$

$\vec{L}_{A_2 M_2/O}$  moment cinétique par rapport à  $O$  de la portion de fil  $A_2 M_2$

$\vec{L}_{A_1 A_2}$  moment cinétique par rapport à  $O$  de la portion de fil  $A_1 A_2$  reposant sur la poulie

$\vec{L}_P$  moment cinétique par rapport à  $O$  de la poulie

Soit  $\vec{v}$  la vitesse de la masse  $M_1$ . Le fil étant inextensible, les 2 masses ont même vitesse.

$$\vec{L}_{1/O} = \vec{OM}_1 \wedge m_1 \vec{v} = \vec{OA}_1 \wedge m_1 \vec{v} + \vec{A_1 M_1} \wedge m_1 \vec{v}$$

comme  $\vec{A_1 M_1}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, il reste:  $\vec{L}_{1/O} = \vec{OA}_1 \wedge m_1 \vec{v} = m_1 R v \vec{e}_z$

De même pour la masse  $m_2$ ,  $\vec{L}_{2/O} = \vec{OM}_2 \wedge m_2 \vec{v} = \vec{OA}_2 \wedge m_2 \vec{v} + \vec{A_2 M_2} \wedge m_2 \vec{v} = m_2 R v \vec{e}_z$

$\vec{L}_{A_1 M_1/O} = \sum \vec{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$  or  $\vec{OM}_i \wedge \vec{v}_i = \vec{OA}_1 \wedge \vec{v}_i + \vec{A_1 M_i} \wedge \vec{v}_i = R v \vec{e}_z$ , tous les points du fil étant animés de la même vitesse.

$$\vec{L}_{A_1 M_1/O} = \sum m_i R v \vec{e}_z$$

pour le segment  $A_1 M_1$ ,  $\sum m_i = m_3 = x m / L$

$$\vec{L}_{A_1 M_1/O} = x m R v / L \vec{e}_z$$

De même pour le segment  $A_2 M_2$ ,  $\vec{L}_{A_2 M_2/O} = \sum m_i R v \vec{e}_z$

pour le segment  $A_2 M_2$ ,  $\sum m_i = m_4 = m(L - x - \pi R) / L$

$$\vec{L}_{A_2 M_2/O} = m(L - x - \pi R) R v / L \vec{e}_z$$

$$\vec{L}_{A_1 A_2/O} = \sum \vec{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum m_i R v \vec{e}_z$$

pour le segment  $A_1A_2$   $\sum m_i = m_5 = \pi Rm/L$

$$\vec{L}_{A_1M_1/O} = \pi R^2 v m / L \vec{e}_z$$

$$\vec{L}_P = I_{O_z} \omega \vec{e}_z$$

Il reste à calculer le moment d'inertie  $I_{O_z}$  pour un disque homogène autour de son axe de rotation. Décomposons le disque en anneaux homogènes concentriques de rayon  $\rho$  et d'épaisseur  $d\rho$ . Chacun de ces anneaux a un moment d'inertie

$$dI_{O_z} = \rho^2 dm$$

$$dm = \sigma 2\pi \rho d\rho \text{ où } \sigma \text{ représente la densité surfacique. Pour le disque complet, } I_{O_z} = \int_0^R \sigma 2\pi \rho^3 d\rho$$

$$I_{O_z} = \sigma \pi R^4 / 2. \text{ La relation qui relie } \sigma \text{ à } m_p \text{ est la suivante: } m_p = \sigma \pi R^2$$

$$\text{donc } I_{O_z} = m_p R^2 / 2$$

$$\text{d'où } \vec{L}_P = m_p \omega R^2 / 2 \vec{e}_z$$

La poulie effectue un mouvement de rotation à la vitesse angulaire  $\omega$  suite à la translation du fil avec la vitesse  $v = \omega R$

$$\text{soit } \vec{L}_P = m_p R v / 2 \vec{e}_z$$

On en déduit le moment cinétique total:

$$\vec{L}_{/O} = (m_1 + m_2 + m + \frac{m_p}{2}) R v \vec{e}_z = (m_1 + m_2 + m + \frac{m_p}{2}) R \dot{x} \vec{e}_z$$

2. Bilan des forces extérieures agissant sur le système comprenant les 2 masses, le fil et la poulie :

- Poids du fil, i.e. des parties  $A_1M_1, A_1A_2, A_2M_2$
- Poids de chacune des 2 masses
- Poids de la poulie

Quelles sont les forces pour lesquelles le moment par rapport à  $O_z$  est égal au vecteur nul ?

- Poids de la poulie, la droite d'action intercepte l'axe de rotation
- Poids de la portion de fil  $A_1A_2$ , idem

$$\sum \vec{M}_{\vec{F}_{ext}/O} = \vec{OM}_1 \wedge m_1 \vec{g} + \vec{OM}_2 \wedge m_2 \vec{g} + \vec{OG}_1 \wedge m_3 \vec{g} + \vec{OG}_2 \wedge m_4 \vec{g}$$

avec  $G_1$  et  $G_2$  milieux des segments  $A_1M_1$  et  $A_2M_2$  respectivement.

$$\text{Pour le poids de la masse } m_1, \vec{OM}_1 \wedge m_1 \vec{g} = (\vec{OA}_1 + \vec{A}_1M_1) \wedge m_1 \vec{g}$$

$$\text{Comme } \vec{A}_1M_1 \text{ et } \vec{g} \text{ sont colinéaires, } \vec{OM}_1 \wedge m_1 \vec{g} = R m_1 g \vec{e}_z$$

$$\text{De la même façon pour la masse } m_2, \vec{OM}_2 \wedge m_2 \vec{g} = -R m_2 g \vec{e}_z \text{ On peut décomposer}$$

$$\vec{OG}_1 = \vec{OA}_1 + \vec{A}_1G_1$$

$$\text{Comme } \vec{A}_1G_1 \text{ et } \vec{g} \text{ sont colinéaires, } \vec{OG}_1 \wedge m_3 \vec{g} = R m_3 g \vec{e}_z = x m R g / L \vec{e}_z$$

$$\text{De la même façon, } \vec{OG}_2 \wedge m_4 \vec{g} = -R m_4 g \vec{e}_z = -m g R (L - x - \pi R) / L \vec{e}_z$$

$$\text{Donc } \sum \vec{M}_{\vec{F}_{ext}/O} = g R (m_1 - m_2 - m + m \pi R / L + 2 x m / L) \vec{e}_z$$

3. On écrit le théorème du moment cinétique:  $\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \sum \vec{M}_{\vec{F}_{ext}/O}$  En remplaçant avec les résultats des questions précédentes,  $(m_1 + m_2 + m + m_p/2) R \ddot{x} = g(m_1 - m_2 - m + m \pi R / L + 2 x m / L)$

$$(m_1 + m_2 + m + m_p/2) \ddot{x} - 2 g x m / L = g(m_1 - m_2 - m + m \pi R / L)$$

On obtient une équation différentielle de la forme :  $\ddot{x} - \omega^2 x = K$

$$\omega^2 = \frac{2 g m}{L(m_1 + m_2 + m + m_p/2)}$$

avec

$$K = g \frac{(m_1 - m_2 - m + m \pi R / L)}{(m_1 + m_2 + m + m_p/2)}$$

et

La solution sans second membre est de la forme  $x_s = A \cosh(\omega t + \varphi)$

Une solution particulière s'écrit:  $x_p = -\frac{K}{\omega^2}$

La solution générale avec second membre s'écrit:  
Or à  $t = 0$ ,  $x = 0$  et  $v = \dot{x} = 0$

$$d'où \varphi = 0 \text{ et } A = \frac{K}{\omega^2}$$

$$x = \frac{K}{\omega^2}(\cosh \omega t - 1)$$

Cette équation est caractéristique d'un mouvement oscillant. Si on néglige la masse du fil,  $m = 0$ , l'équation différentielle se simplifie de la façon suivante :

$$(m_1 + m_2 + m_p/2)\ddot{x} = g(m_1 - m_2)$$

$$\ddot{x} = g \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2 + m_p/2)}$$

soit  
On retrouve l'équation différentielle d'un mouvement uniformément accéléré .

## 6 - Expression du principe fondamental de la statique dans un repère non galiléen

Rg = Repère galiléen

R = Repère non galiléen

On veut étudier le mouvement d'un sous-ensemble matériel (e) d'une ensemble matériel (E)

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à (e) dans son mouvement par rapport à Rg s'écrit :

$$\{\mathcal{D}_{(e/Rg)}\} = \{\mathcal{J}_{(\bar{e} \rightarrow e)}\} \text{ avec le torseur dynamique exprimé au point A : } \{\mathcal{D}_{(e/Rg)}\} = \begin{cases} \int_{P \in e} \dots \vec{I}_{P/Rg} dm = m \vec{I}_{G/Rg} \\ \int_{P \in e} \overline{AP} \wedge \vec{I}_{P/Rg} dm = \vec{\delta}_A(S/Rg) \end{cases}$$

La relation de composition des vecteurs accélération au point P entre les repères R et Rg s'écrit :

$$\vec{I}_{P/Rg} = \vec{I}_{P/R} + \vec{I}_{P \in R/Rg} + 2 \vec{\Omega}_{R/Rg} \wedge \vec{V}_{P/R}$$

Soient les 3 torseurs :

Torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R

Torseur des effets d'inertie d'entraînement sur (e) dans son mouvement par rapport à R et à Rg:

Torseur des effets d'inertie de Coriolis sur (e) dans son mouvement par rapport à R et à Rg

$$\{\mathcal{D}_{(e/R)}\} = \begin{cases} \int_{P \in e} \dots \vec{I}_{P/R} dm \\ \int_{P \in e} \overline{AP} \wedge \vec{I}_{P/R} dm \end{cases} \quad \{\mathcal{D}_{ie(e,R/Rg)}\} = \begin{cases} - \int_{P \in e} \dots \vec{I}_{P \in R/Rg} dm \\ - \int_{P \in e} \overline{AP} \wedge \vec{I}_{P \in R/Rg} dm \end{cases} \quad \{\mathcal{D}_{ic(e,R/R)}\} = \begin{cases} - \int_{P \in e} 2 \cdot \vec{\Omega}_{R/Rg} \wedge \vec{V}_{P/R} dm \\ - \int_{P \in e} \overline{AP} \wedge [2 \cdot \vec{\Omega}_{R/Rg} \wedge \vec{V}_{P/R}] dm \end{cases}$$

Par conséquent on a :  $\{\mathcal{D}_{(e/R)}\} = \{\mathcal{J}_{(\bar{e} \rightarrow e)}\} + \{\mathcal{D}_{ie(e,R/Rg)}\} + \{\mathcal{D}_{ic(e,R/R)}\}$

**Le principe fondamental de la dynamique s'applique relativement à tout repère, à condition d'ajouter au torseur des actions mécaniques extérieures, le torseur des effets d'inertie d'entraînement et le torseur des effets d'inertie de Coriolis.**

Remarque

Si le repère R est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel galiléen Rg:

$$\vec{I}_{P \in R/Rg} = \vec{0} \text{ et } \vec{\Omega}_{R/Rg} = \vec{0}$$

Par conséquent, les 2 torseurs des effets d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont nuls.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors dans le repère R :  $\{\mathcal{D}_{(e/R)}\} = \{\mathcal{J}_{(\bar{e} \rightarrow e)}\}$

Conclusion : tout repère R en translation rectiligne uniforme par rapport à un repère galiléen est aussi galiléen.

**Application : accélération de la pesanteur**

On étudie l'équilibre d'un pendule simple à la surface de la Terre.

$R_g(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$  repère galiléen :

- origine : centre de la Terre
- axes : ont des directions fixes par rapport à certaines étoiles

L'axe  $(O, \vec{z}_g)$  est orienté du pôle sud vers le pôle nord.

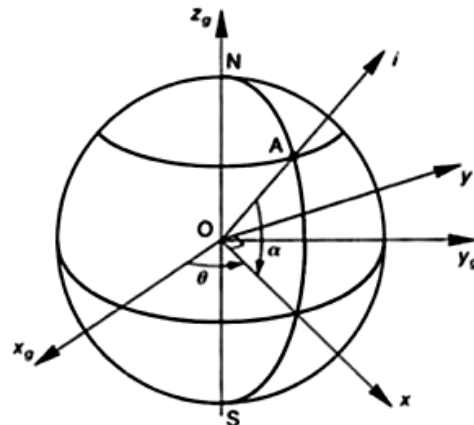
$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_g)$  repère lié à la Terre

$\theta = (\vec{x}_g, \vec{x})$  ;  $\omega = \text{constante} = 1 \text{ tour} / 24 \text{ heures}$

A = point de la surface de la Terre situé dans le plan  $(O, \vec{z}_g, \vec{x})$

On pose :  $\vec{OA} = r \cdot \vec{i}$  ( $r = \text{rayon de la Terre}$ )

$\alpha = (\vec{i}, \vec{x})$  ( $\alpha = \text{latitude du point A}$ )



En A, le pendule est considéré simple et immobile par rapport à la Terre.

Le pendule est constitué par une sphère (S) de masse (m) et de centre d'inertie G suspendue à un fil

Sur (S) s'exercent les actions mécaniques extérieures :

■ Action mécanique du fil :  $\{T_{(fil \rightarrow S)}\}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{T} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}$

$\vec{T}$  ayant la direction du fil

■ Action mécanique de la Terre :  $\{F_{(Terre \rightarrow S)}\}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}$

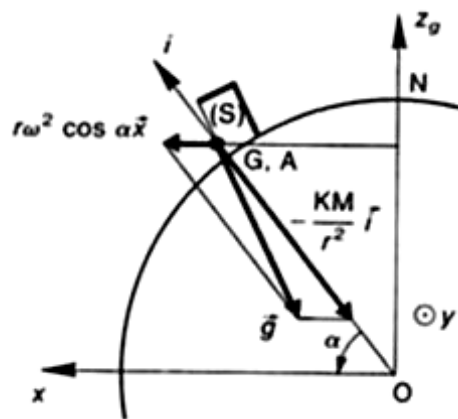
$\vec{F}$  = Force d'attraction newtonienne =  $-k \frac{mM}{r^2} \vec{i}$

avec : - k = constante de gravitation universelle =  $6,67 \cdot 10^{-11}$  unités SI

- m = masse de (S)

- M = masse de la Terre

- r = rayon de la Terre



La résultante générale des actions mécaniques appliquées à (S) est :  $\vec{R}_{(S \rightarrow S)} = \vec{T} + \vec{F}$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à (S) (R non galiléen) :  $\vec{0} = \vec{R}_{(S \rightarrow S)} - m \vec{l}_{G \in R/Rg}$

On a :  $\theta = \omega \cdot t$  ( le mouvement du point G est uniforme dans  $R_g$  )

G décrit un cercle d'axe  $(O, \vec{z}_g)$  et de rayon  $r \cdot \cos \alpha$  donc  $\vec{l}_{G \in R/Rg} = -r \omega^2 \cos \alpha \vec{x}$

Donc  $\vec{R}_{(S \rightarrow S)} + m \cdot r \omega^2 \cos \alpha \vec{x} = \vec{0}$  sachant que  $\vec{R}_{(S \rightarrow S)} = \vec{T} + \vec{F}$  et  $\vec{F} = -k \frac{mM}{r^2} \vec{i}$

D'où :  $\vec{T} = k \frac{mM}{r^2} \vec{i} - m \cdot r \omega^2 \cos \alpha \vec{x}$

■ Soit  $\vec{P}$  le poids de (S) si **R est galiléen** alors  $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$  avec  $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

Donc  $\vec{g}$  a pour expression :  $\vec{g} = k \frac{M}{r^2} \vec{i} - r \omega^2 \cos \alpha \vec{x}$

**Le vecteur accélération de la pesanteur n'est pas exactement dirigé vers le centre de la Terre ( sauf aux pôles et à l'équateur )**

Application numérique :  $r = 6370 \text{ km}$ ,  $\omega = 1 \text{ tour} / \text{jour}$  ;  $(r \omega^2 \cos \alpha)_{\text{maxi}} = r \omega^2$  ( à l'équateur ) donc  $r \omega^2 = 0,033 \text{ m/s}^2$

Sachant que  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $r \omega^2$  reste inférieur à 0,35 % de la valeur de g

*Le torseur des actions d'inertie de Coriolis dues à la rotation de la Terre est négligeable par rapport au torseur d'action mécanique de la pesanteur.*

*Il faut néanmoins le prendre en compte pour expliquer :*

- la déviation vers l'ouest des fusées ou des projectiles lancés du sol

- la déviation des courants aériens dans chaque hémisphère

- la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault ( 0,7 tour / jour dans le sens horaire pour une latitude nord de 45° )

## 7 - Equilibrage dynamique

Le problème essentiel en fabrication, c'est l'équilibrage des solides tournant autour d'un axe.

L'équilibrage est nécessaire :

- pour éviter les vibrations ( détérioration rapide des paliers )
- pour éviter le bruit lors de l'utilisation du matériel

### 7 - 1 Schématisation adoptée

Le repère  $R_0(O_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au bâti

Le solide (S) a une masse  $m$ , un centre d'inertie  $G$ ,  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$  est le repère lié à (S)

Le solide (S) est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$

$\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$  et  $\vec{OG} = a\vec{x} + c\vec{z}_0$

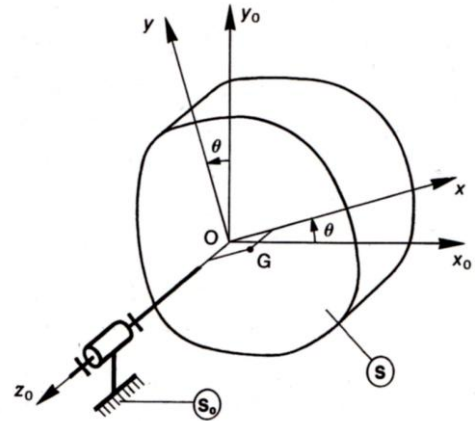
$$I_0(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)}$$

L'action mécanique inconnue exercée par  $(S_0)$  sur (S) est

$$\text{représentée en O par le torseur : } \left\{ \mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S)} \right\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{Bmatrix}_O$$

On pose :  $\vec{R} = X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z}$

$$\vec{M}_O = L.\vec{x} + M.\vec{y}$$



Sur (S) , s'exerce également l'action mécanique ( supposée connue ) d'un ensemble matériel (E) représentée au point O par le torseur :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(E \rightarrow S)} \right\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{10} \end{Bmatrix}_O$$

On pose :  $\vec{R}_1 = X_1.\vec{x} + Y_1.\vec{y} + Z_1.\vec{z}$

$$\vec{M}_{10} = L_1.\vec{x} + M_1.\vec{y} + N_1.\vec{z}$$

Si (S) est la roue d'un véhicule, alors (E) est constitué par exemple par la route , la pesanteur, l'arbre de transmission.

### 6 - 2 Action mécanique de $(S_0)$ sur (S)

Le torseur de l'action mécanique de  $(S_0)$  sur (S) s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique à (S) par rapport à  $R_0$

$$\left\{ \mathcal{D}_{(S/R_0)} \right\} = \left\{ \mathcal{T}_{(\vec{S} \rightarrow S)} \right\} = \left\{ \mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S)} \right\} + \left\{ \mathcal{T}_{(E \rightarrow S)} \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} m\vec{I}_{G/R_0} \\ \vec{\delta}_{0(S/R_0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{10} \end{Bmatrix} \text{ d'où : } \begin{cases} m\vec{I}_{G/R_0} = \vec{R} + \vec{R}_1 \\ \vec{\delta}_{0(S/R_0)} = \vec{M}_O + \vec{M}_{10} \end{cases}$$

$$\vec{I}_{G/R_0} = \frac{d}{dt} [\vec{V}_{G/R_0}]_{R_0} \text{ avec } \vec{V}_{G/R_0} = a.\theta'.\vec{y} \text{ soit } \vec{I}_{G/R_0} = a.\theta''.\vec{y} + a.\theta'(\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{y}) = a.\theta''.\vec{y} + a.\theta'(\theta'_{z_0} \wedge \vec{y})$$

$$\vec{I}_{G/R_0} = a.\theta''.\vec{y} - a.\theta'^2.\vec{x}$$

$$\text{Le point O étant fixe dans R, donc : } \vec{\delta}_{0(S/R_0)} = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{0(S/R_0)}]_{R_0} \text{ avec } \vec{\sigma}_{0(S/R_0)} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)}$$

$$\text{Donc : } \vec{\sigma}_{0(S/R_0)} = -E.\theta'.\vec{x} - D.\theta'.\vec{y} + C.\theta'.\vec{z}_0$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{0(S/R_0)}]_{R_0} = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{0(S/R_0)}]_R + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{\sigma}_{0(S/R_0)}$$

$$\vec{\delta}_{0(S/R_0)} = -E.\theta''.\vec{x} - D.\theta''.\vec{y} + C.\theta''.\vec{z}_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -E.\theta' \\ -D.\theta' \\ C.\theta' \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)}$$

$$\vec{\delta}_{0(S/R_0)} = -E.\theta''.\vec{x} - D.\theta''.\vec{y} + C.\theta''.\vec{z}_0 - D.\theta'^2.\vec{x} - D.\theta'^2.\vec{y} = -(E.\theta'' + D.\theta'^2).\vec{x} - (D.\theta'' + D.\theta'^2).\vec{y} + C.\theta''.\vec{z}_0$$

En projections :

Résultante sur Ox :	$-ma.\theta'' = X + X_1$
Oy :	$m.a.\theta'' = Y + Y_1$
Oz :	$0 = Z + Z_1$
Moment sur Ox :	$-(E \theta'' + D \theta'^2) = L + L_1$
Oy :	$-(D \theta'' + D \theta'^2) = M + M_1$
Oz :	$C \theta'' = N_1$

On peut donc exprimer facilement X, Y, Z, L, M facilement

**6 - 3 Conditions d'équilibrage dynamique**

Pour éviter les vibrations l'action dans la liaison entre (S) et  $S_0$  :

- doit être aussi constante que possible
- doit être indépendante de  $\theta$  et  $\theta'$

D'après les équations précédentes les conditions d'équilibrage dynamique sont :

- $a = 0$  ( le **centre d'inertie** doit être **sur l'axe de rotation** )
- $D = 0$  et  $E = 0$  : **l'axe de rotation  $(O, \vec{z}_0)$  est axe principal d'inertie**

**6 - 4 Réalisation pratique de l'équilibrage dynamique**

On remplace (S) par  $(S') = (S) + (S_1) + (S_2)$

$(S_1)$  et  $(S_2)$  sont assimilables à des points matériels

$m_i$  = masse du solide (i)

$G'$  = centre d'inertie du solide  $(S')$ ,  $(E')$  et  $(D')$  produits d'inertie de  $(S')$  ( par rapport à R )

$(S')$  est dynamiquement équilibré si  $G'$  est sur l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et si  $D' = 0$  et  $E' = 0$

La position de  $G'$  est définie par :  $\vec{OG'} = \frac{m\vec{OG} + m_1\vec{OG}_1 + m_2\vec{OG}_2}{m + m_1 + m_2}$

Si  $G'$  est sur l'axe de rotation  $(O, \vec{z}_0)$  cette équation vectorielle s'écrit en projections sur :

$O\vec{x}' : ma + m_1x_1 + m_2x_2 = 0$  (18)

$O\vec{y}' : m_1y_1 + m_2y_2 = 0$  (19)

$D' = D + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2$  (20)

$E' = E + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2$  (21)

Remarque :

Si  $D \neq 0$ , l'équilibrage dynamique ne peut se faire avec une seule masse. En effet si  $m_2 = 0$  alors pour  $y_1 = 0$  il faut  $D = 0$  ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ.

Nous avons donc 4 équations pour 8 inconnues (  $m_1, m_2, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  )

Si on examine par exemple les conditions dans le cas de l'équilibrage d'une roue de véhicule, on constate que les masses sont fixées sur le bord de la jante.

Hypothèse : la projection du point  $M_i$  est sur l'axe de rotation  $(O, \vec{z}_0)$  donc  $\begin{cases} \theta_i = \vec{x}, \overline{H_i M_i} \\ r_i = \|\overline{H_i M_i}\| \end{cases}$

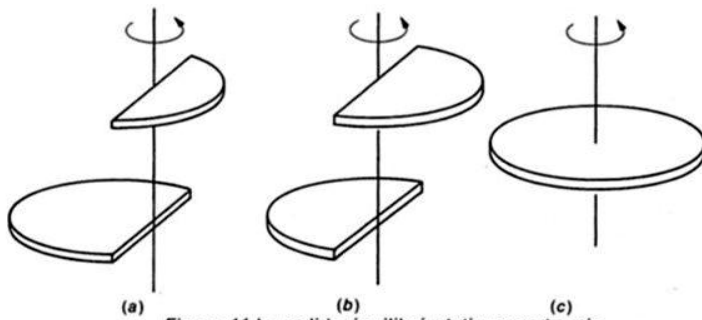
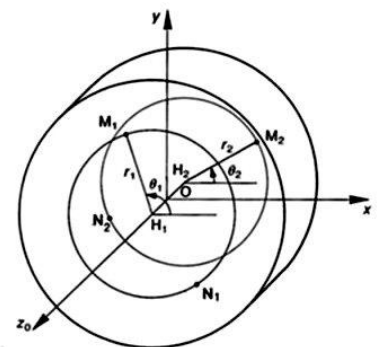


Figure 11 b : solide équilibré statiquement mais non dynamiquement.

Figure 11 a : solide non équilibré.

Figure 11 c : solide équilibré dynamiquement.





On passe des coordonnées cartésiennes  $x_i, y_i, z_i$  aux coordonnées cylindriques  $r_i, \theta_i, z_i$

Les 4 conditions imposées sont :  $z_1, z_2, r_1, r_2$  ( généralement  $r_1 = r_2$  )

Il reste 4 inconnues :  $m_1, m_2, \theta_1, \theta_2$

(18) et (21) impliquent :  $m_1 x_1 (z_2 - z_1) = E - m a z_2$  (22) (  $m_2 x_2$  éliminé )

(19) et (20)  $m_1 y_1 (z_2 - z_1) = D$  (23) (  $m_2 y_2$  éliminé )

si  $D \neq 0$  donc  $z_2 \neq z_1$

Alors les 2 masses doivent être situées dans 2 plans de section droite de la roue distincts.

On pose :  $x_1 = r_1 \cos \theta_1$  et  $y_1 = r_1 \sin \theta_1$  on obtient :  $m_1 r_1 \cos \theta_1 (z_2 - z_1) = E - m a z_2$   
 $m_1 r_1 \sin \theta_1 (z_2 - z_1) = D$

d'où :  $\cotg \theta_1 = \frac{E - m a z_2}{D}$  on obtient  $\theta_1$  à  $\pi$  près , d'où  $m_1$  puis  $m_2$  et  $\theta_2$

#### Remarque

Au lieu d'ajouter des masses aux points  $M_1$  et  $M_2$ , on peut enlever les mêmes masses aux points  $N_1$  et  $N_2$  symétriques des points  $M_1$  et

$M_2$ , par rapport à  $(O, \vec{z}_0)$  ( utilisé pour équilibrer des rotors de moteurs , turbines, vilebrequins )

On a supposé que l'on connaissait  $D$  et  $E$ , mais dans la réalité on ne connaît pas  $D$  et  $E$ .

On utilise donc des équilibreuse qui déterminent les caractéristiques de la résonance engendrée par le mouvement de la roue montée sur un palier approprié.

### 8 - Problème résolu

**But de l'étude**

Comparer les accélérations maximales qui peuvent être obtenues sur les 3 types de véhicules suivants :

- Traction avant ( TA )
- Propulsion arrière ( PA )
- 4 roues motrices ( 4RM )

L'étude est modélisée par un problème plan

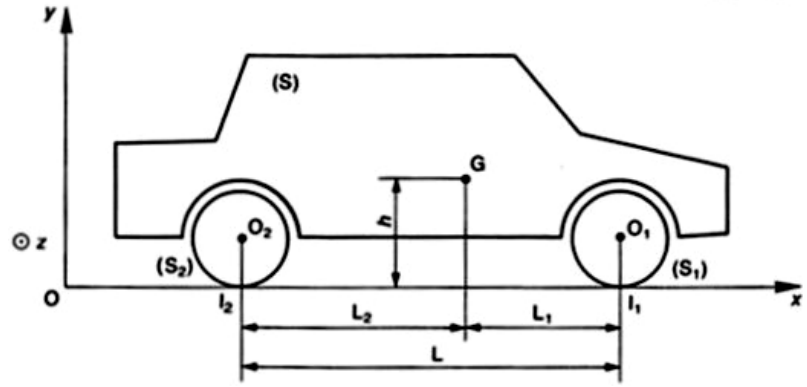
Le repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  galiléen est lié à la route d'axe  $(O, \vec{x})$

$$\vec{g} = -g \cdot \vec{y}$$

G = centre d'inertie du véhicule (S)

(S) est animé d'un mouvement de translation rectiligne ( accélération  $\gamma \vec{x}$  )

Les liaisons roues / châssis sont sans frottement.



■ Actions route / roues

$$\{ \mathcal{J}_{(\text{route} \rightarrow S_1)} \} = \begin{Bmatrix} T_1 \vec{x} + N_1 \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_1} \quad \{ \mathcal{J}_{(\text{route} \rightarrow S_2)} \} = \begin{Bmatrix} T_2 \vec{x} + N_2 \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_2}$$

f = coefficient de frottement route / roues

$$\mu_1 = \frac{T_1}{N_1} \text{ et } \mu_2 = \frac{T_2}{N_2}$$

L'action de l'air est négligée

La masse des roues est négligée

$g = 10 \text{ m/s}^2$  ;  $L_1 = 1 \text{ m}$  ;  $L_2 = 1,3 \text{ m}$  ;  $h = 0,5 \text{ m}$  ;  $M = 1200 \text{ kg}$

**7 - 1 Hypothèse : équi-adhérence des roues  $\mu_1 = \mu_2$**

a) Détermination pour chaque type de véhicule des expressions de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  en fonction de  $\gamma$

$$\{ \mathcal{D}_{(S/R)} \} = \{ \mathcal{J}_{(\vec{s} \rightarrow S)} \} = \begin{Bmatrix} M \vec{\Gamma}_{G/R} \\ \vec{\delta}_{G(S/R)} \end{Bmatrix}_G \text{ avec } \vec{\delta}_{G(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)} \right]_R$$

$$\{ \mathcal{J}_{(g \rightarrow S)} \} = \begin{Bmatrix} -Mg \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G \quad \{ \mathcal{J}_{(\text{route} \rightarrow S_1)} \} = \begin{Bmatrix} T_1 \vec{x} + N_1 \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_1} \quad \{ \mathcal{J}_{(\text{route} \rightarrow S_2)} \} = \begin{Bmatrix} T_2 \vec{x} + N_2 \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_2}$$

$$\vec{\Gamma}_{G/R} = \gamma \vec{x}$$

$$\overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)} = I_{S/\Delta}(\overrightarrow{\Omega}_{S/R}) = \vec{0}$$

$$-Mg \vec{y} + T_1 \vec{x} + N_1 \vec{y} + T_2 \vec{x} + N_2 \vec{y} = M \gamma \vec{x}$$

En projection sur Ox :  $T_1 + T_2 = M \gamma$

En projection sur Oy :  $-Mg + N_1 + N_2 = 0$

$$\vec{\delta}_{I_1(S/R)} = \vec{\delta}_{G(S/R)} + M \cdot \overrightarrow{\Gamma}_{G/R} \wedge \overrightarrow{GI_1} = M \gamma \vec{x} \wedge (-h \cdot \vec{y} + L_1 \cdot \vec{x}) = -M \gamma h \cdot \vec{z}$$

$$\{ \mathcal{J}_{(g \rightarrow S)} \} = \begin{Bmatrix} -Mg \vec{y} \\ -Mg \vec{y} \wedge \overrightarrow{GI_1} \end{Bmatrix}_{I_1} = \begin{Bmatrix} -Mg \vec{y} & -Mg \vec{y} \\ -Mg \vec{y} \wedge (-h \cdot \vec{y} + L_1 \cdot \vec{x}) & \end{Bmatrix}_{I_1} = \begin{Bmatrix} -Mg \cdot \vec{y} \\ Mg L_1 \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_{I_1}$$

$$\{ \mathcal{J}_{(\text{route} \rightarrow S_2)} \} = \begin{Bmatrix} T_2 \vec{x} + N_2 \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_2} = \begin{Bmatrix} T_2 \vec{x} + N_2 \vec{y} \\ (T_2 \vec{x} + N_2 \vec{y}) \wedge L \cdot \vec{x} \end{Bmatrix}_{I_2} = \begin{Bmatrix} T_2 \vec{x} + N_2 \vec{y} \\ -N_2 \cdot L \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_{I_2}$$

Donc :  $-Mh \gamma = Mg L_1 - N_2 \cdot L$  soit :  $N_2 = \frac{Mg L_1 + Mh \gamma}{L}$

Et :  $N_1 = Mg - N_2$  et donc  $N_1 = \frac{Mg(L-L_1) - Mh\gamma}{L}$

Véhicule à traction avant:  $T_2 = 0$        $T_1 = M\gamma$        $\mu_1 = \frac{T_1}{N_1}$

D'où :  $\mu_1 = \frac{M\gamma L}{Mg(L-L_1) - Mh\gamma}$  soit  $\mu_1 = \frac{\gamma L}{g(L-L_1) - h\gamma}$  et  $\mu_2 = 0$

Véhicule à propulsion :  $T_1 = 0$        $T_2 = M\gamma$

$\mu_1 = 0$  et  $\mu_2 = \frac{M\gamma L}{MgL_1 + Mh\gamma}$  soit :  $\mu_2 = \frac{\gamma L}{gL_1 + h\gamma}$  et  $\mu_1 = 0$

Véhicule à 4 roues motrices:  $\mu_1 = \mu_2$  soit  $\frac{T_1}{N_1} = \frac{T_2}{N_2}$  ou  $\frac{N_2}{N_1} = \frac{T_2}{T_1}$

$1 + \frac{T_2}{T_1} = \frac{M\gamma}{T_1}$        $T_1 = \frac{M\gamma}{1 + \frac{T_2}{T_1}}$

$\frac{N_2}{N_1} = \frac{MgL_1 + Mh\gamma}{Mg(L-L_1) - Mh\gamma} = \frac{gL_1 + h\gamma}{g(L-L_1) - h\gamma}$

$T_1 = \frac{M\gamma}{1 + \frac{gL_1 + h\gamma}{g(L-L_1) - h\gamma}} = \frac{M\gamma[g(L-L_1) - h\gamma]}{gL}$

$\frac{N_1}{T_1} = \frac{MgL[g(L-L_1) - h\gamma]}{L.M\gamma[g(L-L_1) - h\gamma]} = \frac{g}{\gamma}$  soit  $\mu_1 = \mu_2 = \frac{\gamma}{g}$

b) Graphes correspondants

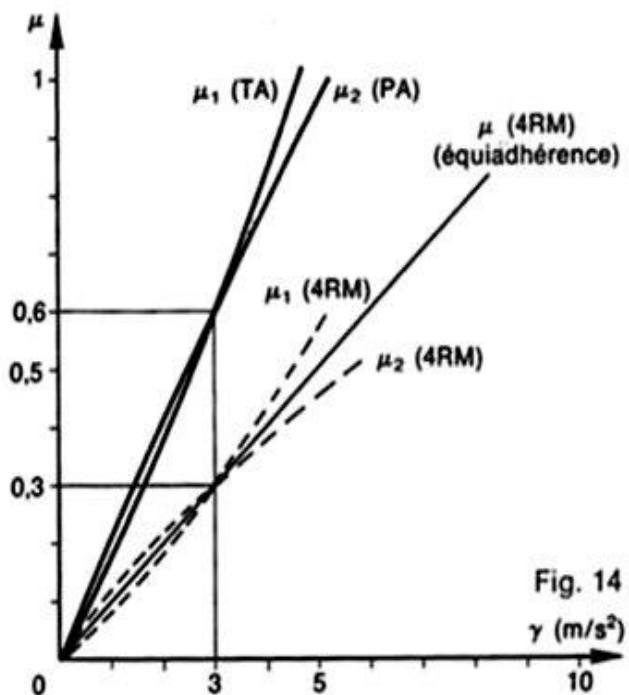
Les pentes à l'origine sont :

$\mu_1'(TA) = \frac{L}{gL_2} = 0,176$

$\mu_2'(PA) = \frac{L}{gL_1} = 0,23$

$\mu'(4RM) = \frac{1}{g} = 0,1$

On peut remarquer que  $\mu_1(TA) = \mu_2(PA) = 0,6$  pour  $\gamma = 3 \text{ m/s}^2$



c) Conclusion

On a une meilleure motricité du véhicule à 4 roues motrices dans tous les cas .

Si  $f < 0,6$  : meilleure motricité TA / PA

Si  $f > 0,6$  : meilleure motricité PA / TA

**7 - 2 L'hypothèse d'équi-adhérence des roues n'est pas conforme à la réalité pour le véhicule à 4 roues motrices. Pour ce type de véhicule, la puissance transmise par le moteur aux roues avant et arrière est sensiblement identique (  $T_1 = T_2$  )**

a) Détermination de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  en fonction de  $\gamma$  pour le véhicule à 4 roues motrices

$T_1 + T_2 = M\gamma$        $2T_1 = 2T_2 = M\gamma$        $T_1 = T_2 = \frac{1}{2}M\gamma$

$-Mg + N_1 + N_2 = 0$

$-Mh\gamma = MgL_1 - N_2 \cdot L$

$N_2 = \frac{MgL_1 + Mh\gamma}{L}$

$\mu_2 = \frac{T_2}{N_2} = \frac{\frac{1}{2}M\gamma L}{MgL_1 + Mh\gamma} = \frac{\gamma L}{2(gL_1 + h\gamma)}$

$N_1 = Mg - N_2 = \frac{Mg(L-L_1) - Mh\gamma}{L}$

$\mu_1 = \frac{T_1}{N_1} = \frac{\frac{1}{2}M\gamma L}{Mg(L-L_1) - Mh\gamma} = \frac{\gamma L}{2(gL_2 - h\gamma)}$

b) Les courbes en pointillés représentent les graphes correspondants

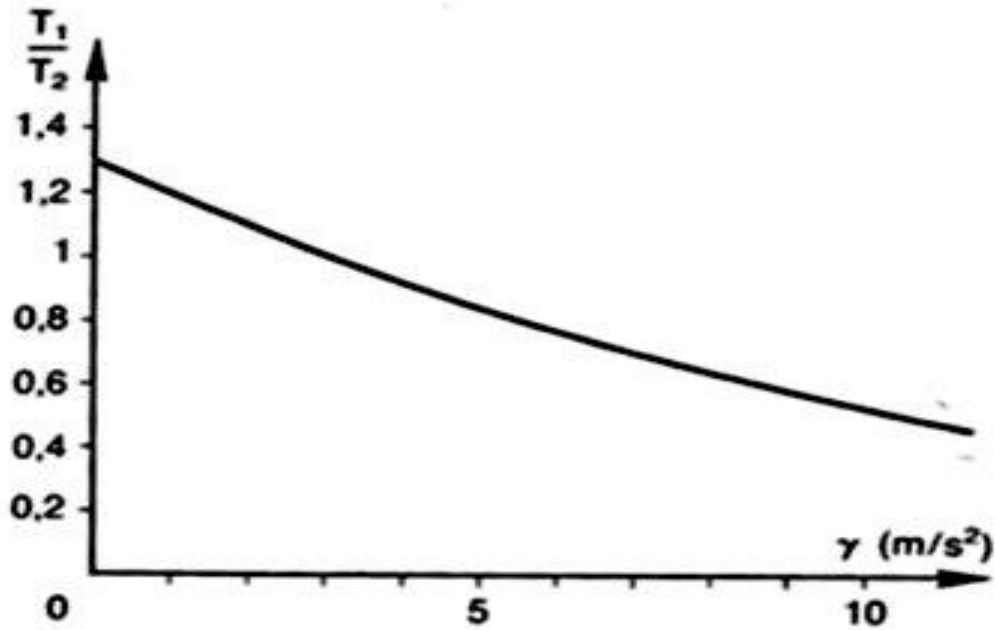
**7 - 3 Pour les véhicules à 4 roues motrices utilisés dans les rallyes , on cherche le plus possible à obtenir une équi-adhérence des roues en répartissant convenablement la puissance du moteur entre les roues avant et arrière.**

a) Dans l'hypothèse, d'équi-adhérence des roues, détermination du rapport de puissance entre les roues avant et arrière en fonction de  $\gamma$

$$\frac{T_1}{N_1} = \frac{T_2}{N_2} \quad N_2 = \frac{Mg L_1 + Mh \gamma}{L} \quad N_1 = \frac{Mg(L - L_1) - Mh \gamma}{L}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{Mg L_2 - Mh \gamma}{Mg L_1 + Mh \gamma} = \frac{g L_2 - h \gamma}{g L_1 + h \gamma}$$

b) Courbes



## Puissance, énergie cinétique, travail des actions mécaniques

Le travail d'une force mesure l'effort à faire pour déplacer un objet le long d'un trajet qui peut-être horizontal ou pas, rectiligne ou pas. Un travail peut être positif auquel cas, on parlera de travail moteur, car un moteur peut très bien effectuer cet effort de déplacement. A l'opposé, un travail peut être négatif, on parle de travail résistant car il s'oppose au déplacement, c'est le cas des forces de frottements. Intuitivement, plus la distance à parcourir est longue, plus le travail sera grand et plus l'objet est imposant et plus le travail à fournir pour le déplacer sera grand. Par contre, si on se place sur une patinoire debout, les seules forces qui s'exercent sur nous sont notre propre poids et la réaction du sol de la patinoire. En principe, il n'y a pas de forces de frottements solides ou très peu, c'est pour cela qu'on tombe si facilement... Il est alors très facile à une autre personne de nous donner une petite impulsion d'énergie qui va nous permettre de nous déplacer sur de longues distances. Les deux forces qui agissent sur nous sont toutes les deux orthogonales à la trajectoire et ne travaillent pas. Si maintenant, la même expérience est renouvelée sur un sol 'normal', il sera beaucoup plus difficile de nous faire bouger 'à l'insu de notre plein gré' à cause des frottements solides qui seront importants. Dans ce cas là, si une autre personne veut nous faire bouger d'un point A à un point B sans qu'on lève le doigt de pied, elle devra fournir beaucoup d'énergie pour s'opposer aux frottements solides. Par rapport au cas précédent, il n'y a qu'une seule force supplémentaire, la force de frottement solide qui est parallèle à la trajectoire et va 'très bien' travailler.

### 1 - Puissance

#### 1 - 1 Puissance développée par une action mécanique extérieure à un ensemble matériel dans son mouvement par rapport à un repère.

( $\Sigma$ ) et (E) sont 2 ensembles matériels  
 ( $\Sigma$ ) exerce une action mécanique sur (E) ( représentée par la densité de forces  $\vec{f}_{(M)}$ )

##### Définition

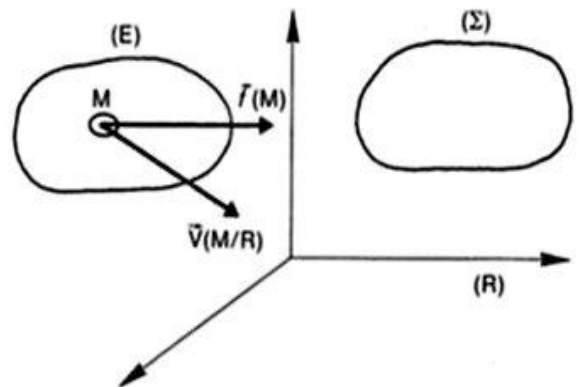
La puissance développée à la date t par l'action de ( $\Sigma$ ) sur (E), dans le mouvement de (E) par rapport au repère R est :

$$P_{(\Sigma \rightarrow E/R)} = \int_{M \in E} \vec{f}_{(M)} \cdot \vec{V}_{M/R} dm$$

##### Remarques

- Expression à adopter lorsque le champ de forces est défini par une densité linéique, surfacique ou volumique
- Lorsque l'action  $\Sigma \rightarrow E/R$  se réduit à un vecteur ( $M, \vec{F}_{(M)}$ )

$$P_{(\Sigma \rightarrow E/R)} = \vec{F}_{(M)} \cdot \vec{V}_{M/R}$$



#### 1 - 2 Puissance développée par une action mécanique extérieure à un solide dans son mouvement par rapport à un repère

Si (E) est un solide (S) avec son champ de vitesses représenté par un torseur  $\{v_{(S/R)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{A \in S/R} \end{array} \right\}$

Pour un point M quelconque :  $\vec{V}_{M \in S/R} = \vec{V}_{A \in S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AM}$

Donc :  $P_{(\Sigma \rightarrow S/R)} = \int_{M \in E} \vec{f}_{(M)} \cdot [\vec{V}_{A \in S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AM}] dm = \vec{V}_{A \in S/R} \cdot \int_{M \in E} \vec{f}_{(M)} dm + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \int_{M \in E} \vec{AM} \wedge \vec{f}_{(M)} dm$

Torseur associé à l'action mécanique de ( $\Sigma$ ) sur (S) :  $\{J_{(\Sigma \rightarrow S)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(\Sigma \rightarrow S)} \\ \vec{M}_{A(\Sigma \rightarrow S)} \end{array} \right\}$

$\vec{R}_{(\Sigma \rightarrow S)} = \int_{M \in E} \vec{f}_{(M)} dm$  et  $\vec{M}_{A(\Sigma \rightarrow S)} = \int_{M \in E} \vec{AM} \wedge \vec{f}_{(M)} dm$

D'où :  $P_{(\Sigma \rightarrow S/R)} = \vec{V}_{A \in S/R} \cdot \vec{R}_{(\Sigma \rightarrow S)} + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{M}_{A(\Sigma \rightarrow S)}$

Soit :  $P_{(\Sigma \rightarrow S/R)} = \{J_{(\Sigma \rightarrow S)}\} \cdot \{v_{(S/R)}\}$

##### Remarque

La puissance développée par l'action mécanique de ( $\Sigma$ ) sur (S) est **nulle** dans tout repère lié à (S)

Application Véhicule à 4 roues motrices se déplaçant en ligne droite

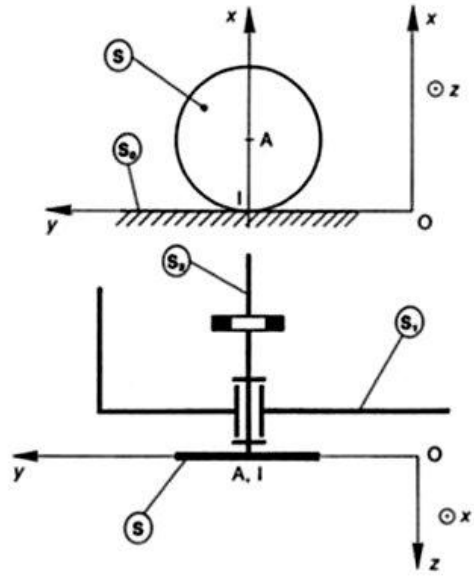
Calcul des puissances développées par les différentes actions mécaniques au niveau d'une roue arrière motrice.

Le repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est lié à  $(S_0)$  ( la route )

$(S)$  : Roue arrière motrice de centre A , de rayon (a) roule sans glisser en I

$(S_1)$  : Chassis ;  $(S_2)$  : Arbre de transmission ;

C.  $\vec{z}$  = Moment du couple transmis par  $(S_2)$  ( joint de cardan par exemple )



Torseurs cinématiques

$$\{\mathcal{V}_{(S_1/S_0)}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{(S/S_1)}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v \\ \omega & 0 \end{Bmatrix}$$

Torseurs d'actions mécaniques

$$\{\mathcal{J}_{(S_0 \rightarrow S)}\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \{\mathcal{J}_{(S \rightarrow S_1)}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix} \quad \{\mathcal{J}_{(S_2 \rightarrow S)}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}$$

1) Puissance développée par l'action mécanique de  $(S_2)$  sur  $(S)$  dans son mouvement de  $(S)$  par rapport à  $(S_0)$

$$P_{(S_2 \rightarrow S/S_1)} = \{\mathcal{J}_{(S_2 \rightarrow S)}\} \cdot \{\mathcal{V}_{(S/S_1)}\}$$

$$P_{(S_2 \rightarrow S/S_1)} = C \cdot \omega$$

2) Puissance développée par l'action mécanique de  $(S_0)$  sur  $(S)$  dans son mouvement de  $(S)$  par rapport à  $(S_1)$

$$P_{(S_0 \rightarrow S/S_1)} = \{\mathcal{J}_{(S_0 \rightarrow S)}\} \cdot \{\mathcal{V}_{(S/S_0)}\}$$

$$P_{(S_0 \rightarrow S/S_1)} = \vec{R}_{(S_0 \rightarrow S)} \cdot \vec{V}_{I \in S/S_0} = 0$$

3) Puissance développée par l'action mécanique  $(S_0)$  sur  $(S)$  dans son mouvement de  $(S)$  par rapport à  $(S_1)$

$$P_{(S_0 \rightarrow S/S_1)} = \{\mathcal{J}_{(S_0 \rightarrow S)}\} \cdot \{\mathcal{V}_{(S/S_1)}\}$$

$$\{\mathcal{V}_{(S/S_1)}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a\omega \\ \omega & 0 \end{Bmatrix}$$

$$P_{(S_0 \rightarrow S/S_1)} = -T \cdot a \cdot \omega$$

4) Puissance développée par  $(S)$  sur  $(S_1)$  dans son mouvement par rapport à  $(S)$

$$P_{(S \rightarrow S_1/S_0)} = \{\mathcal{J}_{(S \rightarrow S_1)}\} \cdot \{\mathcal{V}_{(S_1/S_0)}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v \\ \omega & 0 \end{Bmatrix}$$

$$P_{(S \rightarrow S_1/S_0)} = Y \cdot v$$

5) Puissance développée par  $(S)$  sur  $(S_1)$  dans son mouvement par rapport à  $(S)$

$$P_{(S \rightarrow S_1/S)} = \{\mathcal{J}_{(S \rightarrow S_1)}\} \cdot \{\mathcal{V}_{(S_1/S)}\}$$

$$P_{(S \rightarrow S_1/S)} = 0$$

Conséquence

$$P_{(\Sigma \rightarrow S/R)} = \int_{M \in E} \vec{f}_{(M)} \cdot \vec{V}_{M/R} dm \quad P_{(\Sigma \rightarrow S/R_1)} = \int_{M \in E} \vec{f}_{(M)} \cdot \vec{V}_{M/R_1} dm$$

$$\text{Donc : } P_{(\Sigma \rightarrow S/R_1)} - P_{(\Sigma \rightarrow S/R)} = \int_{M \in E} \vec{f}_{(M)} \cdot (\vec{V}_{M/R_1} - \vec{V}_{M/R}) dm$$

$$P_{(\Sigma \rightarrow S/R_1)} - P_{(\Sigma \rightarrow S/R)} = \{\mathcal{J}_{(\Sigma \rightarrow E)}\} \cdot \{\mathcal{V}_{(R_1/R)}\}$$

**1 - 3 Puissance développée par les actions mutuelles entre deux ensembles matériels**

(Σ) et (E) sont 2 ensembles matériels distincts en mouvement par rapport à un repère R

■ Définition

La puissance développée, à la date t, par les actions mutuelles entre (Σ) et (E), dans leur mouvement par rapport à un repère R est :

$$\mathbf{P}_{(\Sigma \leftrightarrow E/R)} = \mathbf{P}_{(\Sigma \rightarrow E/R)} + \mathbf{P}_{(E \rightarrow \Sigma/R)}$$

■ Propriété

La puissance développée par les actions mutuelles entre (Σ) et (E) est indépendante du repère R

$$\mathbf{P}_{(\Sigma \rightarrow E/R)} \cdot \mathbf{P}_{(\Sigma \rightarrow E/R_1)} = \underbrace{[\{\mathcal{J}_{(\Sigma \rightarrow E)}\} + \{\mathcal{J}_{(E \rightarrow \Sigma)}\}]}_{= 0 \text{ (actions mutuelles)}} \cdot \{\boldsymbol{\omega}_{(R_1/R)}\}$$

D'où :  $\mathbf{P}_{(\Sigma \rightarrow E/R)} = \mathbf{P}_{(\Sigma \rightarrow E/R_1)}$

La puissance développée par les actions mutuelles entre (Σ) et (E) est indépendante du repère choisi.

Cette puissance sera simplement notée :  $\mathbf{P}_{(\Sigma \leftrightarrow E)}$

■ Application

(S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>) sont 2 solides en contact ponctuel en un point A.

Le coefficient de frottement est f

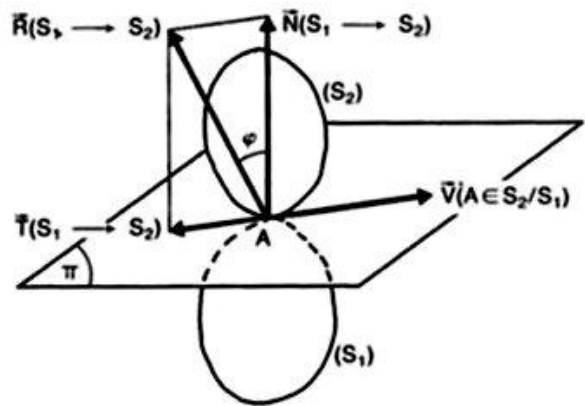
(π) = plan tangent commun en A à (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>)

Torseur d'action mécanique de (S<sub>1</sub>) sur (S<sub>2</sub>)

$$\{\mathcal{J}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\overrightarrow{R}_{(S_1 \rightarrow S_2)} = \overrightarrow{N}_{(S_1 \rightarrow S_2)} + \overrightarrow{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)}$$

Effort normal                  Effort tangentiel



Torseur cinématique du mouvement de (S<sub>2</sub>) par rapport à (S<sub>1</sub>)

$$\{\boldsymbol{\omega}_{(S_2/S_1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{S_2/S_1} \\ \overrightarrow{V}_{A \in S_2/S_1} \end{array} \right\} \quad \overrightarrow{V}_{A \in S_2/S_1} = \text{vecteur vitesse de glissement ayant même direction que } \overrightarrow{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \text{ et de sens contraire}$$

1) Puissance développée par les actions mutuelles entre (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>)

$$\mathbf{P}_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} = \mathbf{P}_{(S_1 \rightarrow S_2/R)} + \mathbf{P}_{(S_2 \rightarrow S_1/R)}$$

Si on choisit R ∈ (S<sub>1</sub>) ( Puissance indépendante du repère )

$$\mathbf{P}_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} = \mathbf{P}_{(S_1 \rightarrow S_2/S_1)} = \{\mathcal{J}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} \cdot \{\boldsymbol{\omega}_{(S_2/S_1)}\}$$

$$\mathbf{P}_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} = \overrightarrow{R}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \cdot \overrightarrow{V}_{A \in S_2/S_1} = \overrightarrow{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \cdot \overrightarrow{V}_{A \in S_2/S_1}$$

La puissance développée est négative ou nulle, c'est une **puissance perdue** par **frottement** entre (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>) qui est transformée en chaleur.

2) Condition pour laquelle la puissance est nulle

La puissance est nulle si :

- le contact (S<sub>1</sub>) / (S<sub>2</sub>) est sans frottement
- (S<sub>2</sub>) roule sans glisser sur (S<sub>1</sub>)

### 1 - 4 Liaison parfaite entre 2 solides

#### ■ Définition

2 solides (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>) ont une liaison parfaite si, quel que soit le mouvement de (S<sub>2</sub>) par rapport à (S<sub>1</sub>) autorisé par la liaison, la puissance développée par les actions mutuelles entre (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>)

Soit :

$$\mathbf{P}_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} = 0$$

Remarque

Cette puissance doit être nulle, quelles que soient les valeurs des composantes non nulles des éléments de réduction du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{(S_2/S_1)}\}$  de la liaison entre (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>)

#### Conséquence

Par rapport à un repère R :  $\mathbf{P}_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} = \mathbf{P}_{(S_1 \rightarrow S_2/R)} + \mathbf{P}_{(S_2 \rightarrow S_1/R)}$

Si R est relié à S<sub>1</sub> :  $\mathbf{P}_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} = \mathbf{P}_{(S_1 \rightarrow S_2/S_1)}$

Si R est relié à S<sub>2</sub> :  $\mathbf{P}_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} = \mathbf{P}_{(S_1 \rightarrow S_1/S_2)}$

Une liaison parfaite entre 2 solides (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>) est telle que :

$$\mathbf{P}_{(S_1 \rightarrow S_2/S_1)} = 0 \text{ ou } \mathbf{P}_{(S_2 \rightarrow S_1/S_2)} = 0$$

D'où :  $\{\mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} \cdot \{\mathcal{V}_{(S_2/S_1)}\} = 0$

**Les torseurs statiques et cinématiques sont réciproques**

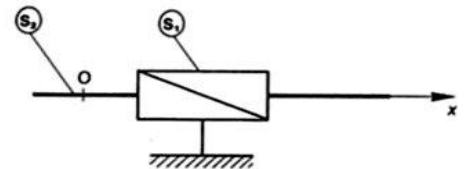
#### Exemples

2 exemples de liaisons parfaites entre 2 solides :

- liaison sans frottement (à contact ponctuel, linéique ou surfacique)
- liaison sans glissement (bille ou cylindre de révolution roulant sans glisser sur un plan)

#### Application

2 solides (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>) ont une liaison glissière d'axe (O,  $\vec{x}$ ) de pas réduit (p)



#### ■ Caractéristiques du torseur d'action mécanique de contact de (S<sub>1</sub>) sur (S<sub>2</sub>)

Liaison sans frottement  $\mathbf{P}_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} = 0$

$$\mathbf{P}_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} = \{\mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} \cdot \{\mathcal{V}_{(S_2/S_1)}\}$$

$$\{\mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \\ \overrightarrow{M}_{O(S_1 \rightarrow S_2)} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{(S_2/S_1)}\} = \begin{Bmatrix} \alpha' \vec{x} \\ p \cdot \alpha' \vec{x} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Donc : } p \cdot \alpha' \cdot \vec{x} \cdot \overrightarrow{R}_{(S_1 \rightarrow S_2)} + \alpha' \cdot \vec{x} \cdot \overrightarrow{M}_{O(S_1 \rightarrow S_2)} = 0$$

D'où :  $p \cdot \vec{x} \cdot \overrightarrow{R}_{(S_1 \rightarrow S_2)} + \vec{x} \cdot \overrightarrow{M}_{O(S_1 \rightarrow S_2)} = 0$

## 2 - Travail

### 2 - 1 Définition

Le travail, entre les dates t<sub>1</sub> et t<sub>2</sub>, de l'action mécanique de l'ensemble matériel (Σ) sur l'ensemble matériel (E), dans le mouvement de (E) par rapport au repère R est :

$$W_{t_1}^{t_2}(\rightarrow E/R) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{P}_{(\Sigma \rightarrow E/R)} dt$$

Unité de travail : Joule (J)

(Unité de puissance : Watt (W))



Application : Véhicule à 4 roues ( cf paragraphe 1-2 )

Détermination entre les instants  $t_1 = 0$  et  $t_2 = 30$  s , du travail de l'action mécanique de la roue (S) sur le châssis (S1) dans le mouvement de (S1) par rapport à (S0) sachant que pendant cette phase du mouvement  $Y = 300$  N et  $v = \gamma.t$  ( $\gamma = 2,2$  m/s<sup>2</sup>)

$$W_{t_1}^{t_2} ( \rightarrow S_1 / S_0 ) = \int_{t_1}^{t_2} P_{(S \rightarrow S_1 / S_0)} dt = \int_{t_1}^{t_2} Y \cdot v \cdot dt = \gamma \cdot Y \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{t_1}^{t_2} = 297000 \text{ J}$$

### 3- Energie cinétique

Soit un solide (S) de masse m et de centre de gravité G, en mouvement par rapport à un repère R(O,  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ )

Soit A un point lié au solide (S)

Par définition, l'énergie cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R est :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \int_{P \in S} [ \vec{V}_{P/R} ]^2 dm$$

Si le point A est lié au solide (S) il existe la relation entre  $\vec{V}_{P/R}$  et  $\vec{V}_{A/R}$  :  $\vec{V}_{P/R} = \vec{V}_{A/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}$

$$\text{Donc } 2T_{(S/R)} = \int_{P \in S} ( \vec{V}_{A/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP} ) \cdot [ \vec{V}_{P/R} ] dm$$

$$\text{d'où } 2T_{(S/R)} = \int_{P \in S} \vec{V}_{A/R} \cdot [ \vec{V}_{P/R} ] dm + \int_{P \in S} ( \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP} ) \cdot [ \vec{V}_{P/R} ] dm$$

$$\int_{P \in S} \vec{V}_{A/R} \cdot [ \vec{V}_{P/R} ] dm = \vec{V}_{A/R} \cdot \int_{P \in S} [ \vec{V}_{P/R} ] dm$$

$$\int_{P \in S} ( \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP} ) \cdot [ \vec{V}_{P/R} ] dm = \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \int_{P \in S} ( \vec{AP} \wedge \vec{V}_{P/R} ) dm$$

$$\text{Par suite : } 2T_{(S/R)} = \vec{V}_{A/R} \cdot \int_{P \in S} [ \vec{V}_{P/R} ] dm + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \int_{P \in S} ( \vec{AP} \wedge \vec{V}_{P/R} ) dm$$

Il apparait les 2 éléments de réduction du torseur cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R ainsi que les 2 éléments de réduction au point A du torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à R.

Rappel

Soient 2 torseurs :  $\{ \mathcal{T}_1 \} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}(\tau_1) \\ \vec{M}_A(\tau_1) \end{matrix} \right\}$  et  $\{ \mathcal{T}_2 \} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}(\tau_2) \\ \vec{M}_A(\tau_2) \end{matrix} \right\}$  exprimés au même point A

On appelle produit des deux torseurs  $\{ \mathcal{T}_1 \}$  et  $\{ \mathcal{T}_2 \}$  le scalaire suivant :

$$\{ \mathcal{T}_1 \} \cdot \{ \mathcal{T}_2 \} = \vec{R}(\tau_1) \cdot \vec{M}_A(\tau_2) + \vec{R}(\tau_2) \cdot \vec{M}_A(\tau_1)$$

Le produit des deux torseurs est indépendant du point choisi pour exprimer les torseurs.

Par conséquent, le double de l'énergie cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport à R est égal au produit de de son torseur cinétique par son torseur cinématique.

$$2T_{(S/R)} = \{ \mathcal{C}(S/R) \} \cdot \{ \mathcal{V}(S/R) \} \text{ ce qui correspond à : } 2T_{(S/R)} = m \cdot \vec{V}_{G/R} \cdot \vec{V}_{A/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_A(S/R)$$

Cas particuliers

1<sup>er</sup> cas : A est fixe dans R alors :  $2T_{(S/R)} = \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_A(S/R)$

a) Si  $\vec{\Omega}_{S/R}$  est de la forme  $\theta \vec{z}$  donc :  $\vec{\sigma}_A(S/R) = -E_1 \theta \vec{x}_1 - D_1 \theta \vec{y}_1 + I_{Az} \theta \vec{z}$  d'où :  $2T_{(S/R)} = I_{Az} \theta^2$

b) Si  $\vec{\Omega}_{S/R}$  est quelconque donc :  $\vec{\sigma}_A(S/R) = \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}_{S/R})$  d'où :  $2T_{(S/R)} = \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}_{S/R})$

2<sup>ème</sup> cas : A est confondu avec G alors :  $2T_{(S/R)} = m \cdot (\vec{V}_{G/R})^2 + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_G(S/R)$

a) Si  $\vec{\Omega}_{S/R}$  est de la forme  $\theta \vec{z}$  donc :  $\vec{\sigma}_A(S/R) = -E_1 \theta \vec{x}_1 - D_1 \theta \vec{y}_1 + I_{Gz} \theta \vec{z}$  d'où :  $2T_{(S/R)} = m \cdot (\vec{V}_{G/R})^2 + I_{Gz} \theta^2$

b) Si  $\vec{\Omega}_{S/R}$  est quelconque donc :  $\vec{\sigma}_A(S/R) = \vec{J}_G(S, \vec{\Omega}_{S/R})$  d'où :  $2T_{(S/R)} = m \cdot (\vec{V}_{G/R})^2 + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{J}_G(S, \vec{\Omega}_{S/R})$

Application

Cylindre de révolution (S) rayon a et masse m qui roule sans glisser sur un plan incliné.

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié au plan II

$R_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au cylindre

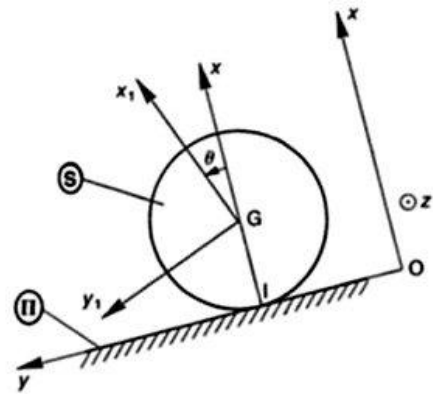
$$I_{Gz} = \frac{m \cdot a^2}{2}; E_1 = D_1 = 0$$

(S) roulant sans glisser sur (II)  $\vec{V}_{I \in S/R} = \vec{0}$

$$\text{par suite : } 2T_{(S/R)} = \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_{I(S/R)}$$

$$\vec{\Omega}_{S/R} = \theta' \vec{z} \text{ et } \vec{\sigma}_{I(S/R)} = \vec{\sigma}_G(S/R) + m \vec{V}_{G/R} \wedge \vec{GI} = \frac{m \cdot a^2}{2} \theta' \vec{z} + m \cdot a^2 \theta' \vec{z}$$

$$\vec{\sigma}_{I(S/R)} = \frac{3m \cdot a^2}{2} \cdot \theta' \vec{z} \text{ d'où : } 2T_{(S/R)} = \frac{3m \cdot a^2}{2} \cdot \theta'^2$$



Calculer le moment dynamique en O

a) en projection sur  $\vec{z}$  soit  $\vec{z} \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)}$

b) en projection sur  $\vec{z}_1$  soit  $\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)}$

c) en projection sur  $\vec{u}$  soit  $\vec{u} \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)}$

Réponses

$$a) \vec{z} \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)} = \vec{z} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{0(S/R)} \right]_R = \vec{z} \cdot \left[ \frac{d}{dt} (\vec{z} \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)}) \right]_R - \frac{d\vec{z}}{dt} \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)} \text{ avec } \frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{z} \cdot \vec{u} = 0; \vec{z} \cdot \vec{w} = -\sin\theta; \vec{z} \cdot \vec{z}_1 = \cos\theta$$

$$\vec{z} \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)} = -A\psi' \sin^2\theta + C(\varphi' + \psi' \cos\theta) \cos\theta$$

$$\vec{z} \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)} = \frac{d}{dt} [-A\psi' \sin^2\theta + C(\varphi' + \psi' \cos\theta) \cos\theta]$$

$$b) \vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)} \right]_R - \frac{d\vec{z}_1}{dt} \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)}$$

$$\left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)} + \vec{\Omega}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)/R} \wedge \vec{z}_1 = \vec{0} + (\theta' \vec{u} + \psi' \vec{z}) \wedge \vec{z}_1 = \psi' \sin\theta \vec{u} - \theta' \vec{w}$$

Ensuite on constate que  $\frac{d\vec{z}_1}{dt} \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)} = 0$

$$\text{Donc : } \vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}_{0(S/R)} \right]_R \text{ d'où } \vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_{0(S/R)} = C \cdot \frac{d}{dt} (\varphi' + \psi' \cos\theta)$$

#### 4 - Forces dérivant d'une énergie potentielle

On considère 2 ensembles ( $\Sigma$ ) et (E) en mouvement par rapport à un repère R

##### 4 - 1 Energie potentielle d'un ensemble matériel associé à une action mécanique extérieure

Définition

L'ensemble matériel (E) possède une énergie potentielle associée à l'action mécanique de ( $\Sigma$ ) sur (E) dans le mouvement de (E) par rapport au repère R, s'il existe une fonction scalaire  $V_{(\Sigma \rightarrow E / R)}$  telle que :

$$P_{(\Sigma \rightarrow E / R)} = - \frac{d}{dt} V_{(\Sigma \rightarrow E / R)}$$

$V_{(\Sigma \rightarrow E / R)}$  est l'énergie potentielle de (E) associée à l'action mécanique de ( $\Sigma$ ) sur (E) dans le mouvement de (E) par rapport à R

Exemple : Energie potentielle de la pesanteur

R(O,  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ) repère lié à la Terre

L'action mécanique de la pesanteur un ensemble matériel (E) de masse (m) et de centre d'inertie G est représenté par un champ de forces uniforme défini par la densité massique

$$\vec{g} = -g \cdot \vec{z}$$

Puissance développée par l'action mécanique de la pesanteur sur (E) dans le mouvement E / R:

$$P_{(g \rightarrow E / R)} = \int_{M \in E} \vec{g} \cdot \vec{V}_{(M/R)} \cdot dm$$

$$P_{(g \rightarrow E / R)} = -g \cdot \vec{z} \cdot \int_{M \in E} \vec{V}_{(M/R)} \cdot dm \text{ or } \int_{M \in E} \vec{V}_{(M/R)} \cdot dm = m \cdot \vec{V}_{(G/R)}$$

$$\text{Donc } P_{(g \rightarrow E / R)} = -m \cdot g \cdot \vec{z} \cdot \vec{V}_{(G/R)} = -m \cdot g \cdot \vec{z} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{OG} \right]_R$$

$$\vec{z} \text{ étant fixe dans R : } P_{(g \rightarrow E / R)} = -m \cdot g \cdot \left[ \frac{d}{dt} (\vec{z} \cdot \vec{OG}) \right]_R = -m \cdot g \cdot \left[ \frac{d}{dt} z_G \right]_R$$

$$V_{(g \rightarrow E / R)} = m \cdot g \cdot z_G$$

$V_{(g \rightarrow E / R)}$  est l'énergie potentielle de (E)

Remarques

- L'énergie potentielle est une fonction primitive de la puissance, elle est donc définie à une constante près
- On dit que la puissance dérive d'une énergie potentielle
- L'énergie potentielle est une énergie en réserve ( eau d'un barrage, marteau pilon, ressort ...)
- Un ensemble matériel possède une énergie lorsqu'il a la capacité de développer une puissance ( ou produire un travail )

##### 3 - 2 Energie potentielle de 2 ensembles matériels associée à une action mutuelle

Définition

Les deux ensembles matériels ( $\Sigma$ ) et (E) possèdent une énergie potentielle associée à une action mutuelle s'il existe une fonction scalaire

$$V_{(\Sigma \leftrightarrow E)} \text{ telle que : } P_{(\Sigma \leftrightarrow E)} = - \frac{d}{dt} V_{(\Sigma \leftrightarrow E)}$$

$V_{(\Sigma \leftrightarrow E)}$  est appelée énergie potentielle de ( $\Sigma$ ) et (E) , associée à l'action mutuelle considérée.

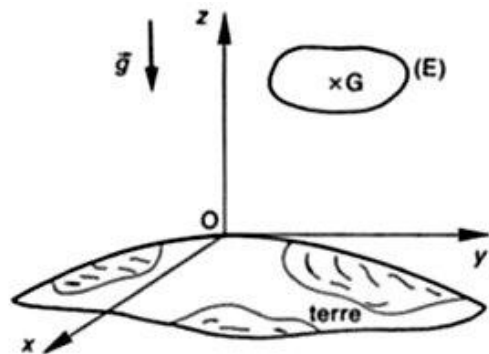
Remarques

L'énergie  $V_{(\Sigma \leftrightarrow E)}$  est indépendante de tout repère.

L'action mécanique de la pesanteur est égale à l'action mécanique d'attraction terrestre ( aux effets d'inertie dûs à la rotation de la Terre près)

$$P_{(g \rightarrow E / R)} = P_{(T \rightarrow E / R)}$$

R étant lié à la Terre :  $P_{(T \rightarrow E / R)} = P_{(T \leftrightarrow E)}$  ( Energie potentielle de la pesanteur = Energie potentielle de la Terre )



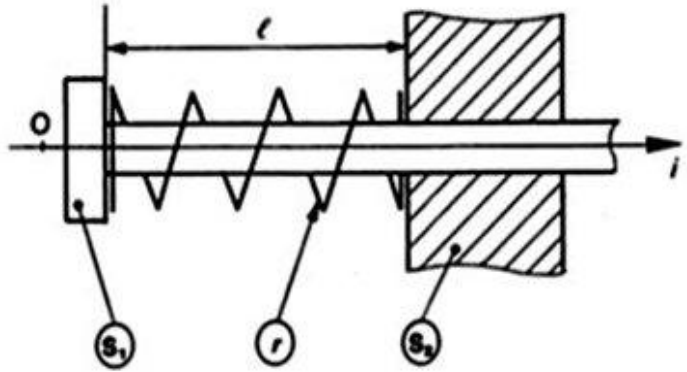
Exemple

Energie potentielle de 2 solides entre lesquels est intercalé un ressort de traction-compression de masse nulle.

Deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) ont une liaison pivot glissant d'axe ( $O, \vec{i}$ ). Un ressort ( $r$ ) de traction compression, de masse nulle, de raideur  $K$ , de longueur à vide  $l_0$ , placé suivant l'axe ( $O, \vec{i}$ ) entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ), exerce sur ( $S_2$ ) une action mécanique représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(r \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} -K(l-l_0)\vec{i} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

( $l$  : longueur sous charge du ressort).



Calcul de la puissance développée par l'action mécanique du ressort sur ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) dans leur mouvement par rapport à un repère  $R$  quelconque

$$P_{(r \rightarrow S_1, S_2 / R)} = P_{(r \rightarrow S_1 / R)} + P_{(r \rightarrow S_2 / R)} \text{ soit : } P_{(r \rightarrow S_1, S_2 / R)} = \{\mathcal{T}(r \rightarrow S_1)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_1 / R)\} + \{\mathcal{T}(r \rightarrow S_2)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_2 / R)\}$$

$$\text{Le ressort ayant une masse nulle : } \{\mathcal{T}(r \rightarrow S_1)\} = -\{\mathcal{T}(r \rightarrow S_2)\}$$

$$\text{Par suite : } P_{(r \rightarrow S_1, S_2 / R)} = \{\mathcal{T}(r \rightarrow S_2)\} \cdot [\{\mathcal{V}(S_2 / R)\} - \{\mathcal{V}(S_1 / R)\}]$$

$$\text{Soit : } P_{(r \rightarrow S_1, S_2 / R)} = \{\mathcal{T}(r \rightarrow S_2)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_2 / S_1)\}$$

Puissance indépendante du repère  $R$ , on notera simplement :  $P_{(r \rightarrow S_1, S_2)}$

Vu la forme de l'expression, on peut considérer qu'il existe entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) une action mutuelle représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \{\mathcal{T}(r \rightarrow S_2)\}$$

$$\text{Torseur cinématique du mouvement } S_2 / S_1 \quad \{\mathcal{V}(S_2 / S_1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \frac{dl}{dt}\vec{i} \end{Bmatrix} \text{ et } \{\mathcal{T}(r \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} -k(l-l_0)\vec{i} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\text{donc : } P_{(r \rightarrow S_1, S_2)} = \begin{Bmatrix} -k(l-l_0)\vec{i} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \frac{dl}{dt}\vec{i} \end{Bmatrix} = -k(l-l_0) \cdot \frac{dl}{dt}$$

$$\text{d'où : } \mathbf{V}_{(r \rightarrow S_1, S_2)} = -\frac{k}{2}(l-l_0)^2 \text{ à une constante près}$$

Remarques

Ce résultat est comparable à l'attraction Terre / corps car soulever un corps revient en fait à déformer le système Terre - Corps

**5 - Théorème de l'énergie cinétique.**

C'est une traduction énergétique du principe fondamental de la dynamique.

**5 - 1 Pour un solide :**

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un solide ( $S$ ) de masse  $m$  dans un repère galiléen est :

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\} = \{\tau_{\vec{s} \rightarrow S}\}$$

$\{\mathcal{D}(S/R_g)\}$  est le **torseur dynamique**

$\{\tau_{\vec{s} \rightarrow S}\}$  est le **torseur des actions mécaniques extérieures à ( $S$ ) s'appliquant sur ( $S$ )**

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\} \cdot \{\mathcal{V}(S/R_g)\} = \{\tau_{\vec{s} \rightarrow S}\} \cdot \{\mathcal{V}(S/R_g)\}$$

$$\left\{ \mathcal{D}_{(S/R_g)} \right\} = \begin{cases} \int_{M \in S} \vec{\Gamma}_{M/R_g} dm \\ \int_{M \in S} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}_{M/R_g} dm \end{cases} \quad \text{et} \quad \left\{ \mathcal{V}_{(S/R_g)} \right\} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R_g} \\ \vec{V}_{A/R_g} \end{cases}$$

De plus :  $\vec{V}_{A/R_g} = \vec{V}_{M/R_g} + \vec{\Omega}_{S/R_g} \wedge \vec{MA}$  et  $\vec{\Gamma}_{M/R_g} \cdot \vec{V}_{M/R_g} = \frac{d}{dt} [\vec{V}_{M/R_g}] \cdot \vec{V}_{M/R_g} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [V_{M/R_g}]^2$ .

Donc :  $\int_{M \in S} \vec{\Gamma}_{M/R_g} \cdot \vec{V}_{M/R_g} dm = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int [V_{M/R_g}]^2 dm \right\}$

$\frac{1}{2} \int [V_{M/R_g}]^2 dm$  est l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à Rg

$$\boxed{\frac{d}{dt} T_{(S/R_g)} = P_{(\vec{S} \rightarrow S/R_g)}} \quad \text{avec } T_{(S/R_g)} = \text{énergie cinétique galiléenne de (S)}$$

**Enoncé du théorème**

La dérivée, par rapport à la date t de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide (S) est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (S)

**5 - 2 Pour un ensemble (E) de (n) solides**

En ajoutant membre à membre les (n) équations de chaque solide

$$\boxed{\frac{d}{dt} T_{(E/R_g)} = P_{(\vec{E} \rightarrow E/R_g)} + \sum_{i,j=1}^n P_{(S_i \leftrightarrow S_j)} \quad i < j}$$

La dérivée par rapport à la date t de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble (E) est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E) et des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de (E)

Remarques

- Le théorème de l'énergie cinétique n'est valable que si l'on tient compte dans le calcul de la puissance des actions mutuelles entre les solides de (E) ( donc intérieures à (E) )
- C'est là une différence essentielle avec le principe fondamental de la dynamique.
- L'équation obtenue n'est pas indépendante des équations scalaires fournies par le principe fondamental.
- Les équations de Lagrange ( autre traduction du principe fondamental ) sont équivalentes aux équations obtenues par le principe fondamental.

Autre expression du théorème de l'énergie cinétique

$$\boxed{T_{t_2(E/R_g)} - T_{t_1(E/R_g)} = W_{t_1}^{t_2}(\vec{E} \rightarrow E/R_g) + \sum_{i,j=1}^n W_{t_1}^{t_2}(S_i \leftrightarrow S_j) \quad i < j}$$

**5 - 3 Intégrale première de l'énergie cinétique**

Si les puissances intervenant sont nulles ( ou dérivent d'une énergie potentielle ) :  $\frac{d}{dt} T_{(E/R_g)} = - \frac{d}{dt} V_{(E/R_g)}$

$$\boxed{T_{(E/R_g)} + V_{(E/R_g)} = C}$$

Cette expression constitue l'intégrale première de l'énergie cinétique

Remarques

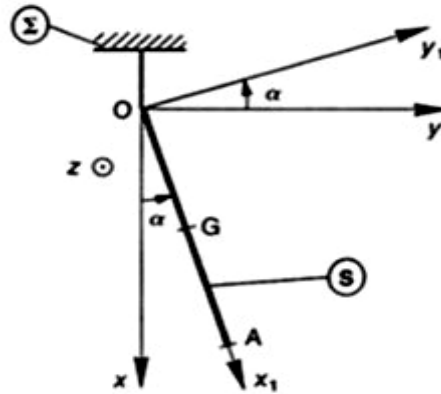
- Le théorème de l'énergie cinétique montre que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont homogènes à un travail
- Le théorème de l'énergie cinétique mesure des transferts d'énergie et des transformations d'énergie en puissance ( ou en travail ) et inversement.

**5 - 4 Unités**

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont homogènes à un travail, il faut donc les exprimer en **Joules**

5- 5 Application 1 : Pendule simple

Le pendule (S) est constitué par une tige OA de longueur  $\ell$ , homogène de masse  $m$  et de centre d'inertie G.  
 (S) oscille dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ . La liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z})$  entre  $(\Sigma)$  et (S) est parfaite.  
 Soit  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  un repère lié à (S) tel que  $\vec{OA} = \ell \vec{x}_1$   
 On pose  $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$



Question

Déterminer l'intégrale première de l'énergie cinétique du mouvement de (S) par rapport à R, sachant qu'à la date  $t = 0$  :  
 $\alpha(0) = \alpha_0$  et  $\alpha'(0) = 0$

$$\frac{d}{dt} T_{(S/R)} = P_{(\vec{s} \rightarrow S/R)} + \sum_{i,j=1}^n P_{(S_i \leftrightarrow S_j)} \text{ avec : } \sum_{i,j=1}^n P_{(S_i \leftrightarrow S_j)} = 0$$

$$2 T_{(S/R)} = I_{Oz} \alpha^2 = \frac{m}{3} \ell^2 \alpha^2$$

$$P_{(\vec{s} \rightarrow S/R)} = P_{(\Sigma \rightarrow S/R)} + P_{(g \rightarrow S/R)}$$

La liaison  $(\Sigma)/(S)$  est parfaite, alors :  $P_{(\Sigma \leftrightarrow S)} = 0$

Comme le repère R est lié à  $(\Sigma)$  :  $P_{(\Sigma \leftrightarrow S)} = P_{(\Sigma \rightarrow S/R)}$  donc  $P_{(\Sigma \rightarrow S/R)} = 0$

$$V_{(g \rightarrow S/R)} = -m \cdot g \cdot x_G \quad x_G = \vec{x} \cdot \vec{OG} = \frac{1}{2} \ell \cos \alpha$$

$$V_{(g \rightarrow S/R)} = -m \cdot g \frac{\ell}{2} \cos \alpha$$

$$T_{(S/R)} + V_{(S/R)} = C \quad (\text{ou } \frac{d}{dt} T_{(S/R)} = - \frac{d}{dt} V_{(g \rightarrow S/R)}) \text{ donc } m \frac{\ell^2}{6} \alpha^2 - m \cdot g \frac{\ell}{2} \cos \alpha = C$$

$$\text{Soit : } \alpha^2 - 3 \frac{g}{\ell} \cos \alpha = D \quad (D = \text{constante})$$

Conditions initiales : pour  $t = 0 \quad 3 \frac{g}{\ell} \cos \alpha_0 = D$

Intégrale première de l'énergie cinétique :

$$\alpha^2 = 3 \frac{g}{\ell} (\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

Remarques

En dérivant par rapport à  $t$ , on obtient :  $2\alpha' \alpha'' + 3 \frac{g}{\ell} \alpha' \sin \alpha = 0$

En supposant que  $\alpha' \neq 0 \quad 2 \alpha'' + 3 \frac{g}{\ell} \sin \alpha = 0$

- Lors de son oscillation le pendule transforme son énergie potentielle en énergie cinétique et inversement. Ces énergies augmentent ou diminuent uniquement lorsqu'une puissance est développée.
- Le pendule n'oscille pas indéfiniment ( frottements dans la liaison pivot et résistance de l'air )  
 L'énergie mécanique du pendule se transforme en énergie thermique jusqu'à l'arrêt.
- Les transformations des énergies thermiques en autres énergies sont toujours difficiles et incomplètes ( l'énergie se dégrade en changeant de forme )

5 - 6 Application 2 : Réducteur à train épicycloïdal

Le schéma de principe d'un réducteur à train épicycloïdal à axes parallèles est représenté *figure 8*.

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est un repère galiléen lié au bâti ( $S_0$ ) du réducteur.

L'ensemble ( $S_1$ ), constitué par l'arbre moteur et la roue dentée de  $n_1$  dents qui lui est liée, a une liaison pivot d'axe ( $O, \vec{x}_0$ ) avec ( $S_0$ ).

Soit  $I_1$  le moment d'inertie de ( $S_1$ ) par rapport à l'axe ( $O, \vec{x}_0$ ). On pose :  $\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \omega_1 \vec{x}_0$ . L'arbre récepteur ( $S_2$ ) a une liaison pivot d'axe ( $O, \vec{x}_0$ ) avec ( $S_0$ ).

Soit  $I_2$  le moment d'inertie de ( $S_2$ ) par rapport à l'axe ( $O, \vec{x}_0$ ). On pose :  $\vec{\Omega}(S_2/R_0) = \omega_2 \vec{x}_0$ . Le repère  $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})$  est lié à ( $S_2$ ).

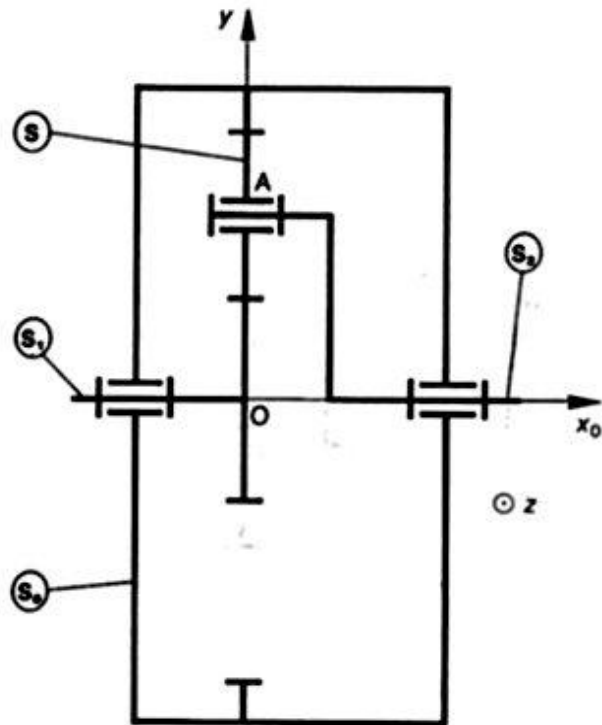
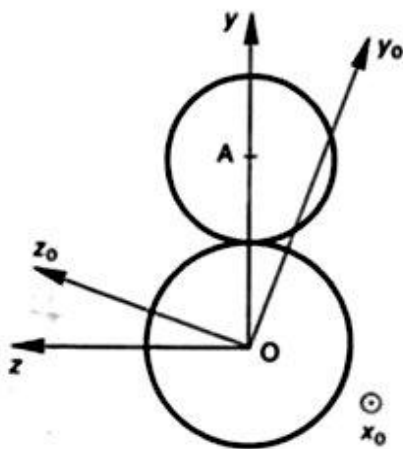
Le satellite ( $S$ ) de  $n$  dents, à une liaison pivot d'axe ( $A, \vec{x}_0$ ) avec ( $S_2$ ), telle que  $\vec{OA} = d\vec{y}$  ( $d > 0$ ). Soient  $m$  la masse de ( $S$ ) et  $I$  son moment d'inertie par rapport à l'axe ( $A, \vec{x}_0$ ). Le point  $A$  est le centre d'inertie de ( $S$ ). On pose :  $\vec{\Omega}(S/R_0) = \omega \vec{x}_0$ .

( $S$ ) engrène avec une couronne de  $n_0$  dents d'axe ( $O, \vec{x}_0$ ), liée à ( $S_0$ ).

Le moteur exerce sur ( $S_1$ ) une action mécanique représentée par un couple de moment  $C_1 \vec{x}_0$ . Le récepteur exerce sur ( $S_2$ ) une action mécanique représentée par le couple de moment  $-C_2 \vec{x}_0$ . Toutes les liaisons sont parfaites, l'action mécanique de la pesanteur est négligée.

On pose  $\lambda = \frac{\omega_2}{\omega_1}$  et  $\mu = \frac{\omega}{\omega_1}$

(On montre que :  $\lambda = -\frac{n_1}{n_0 + n_1}$  et  $\mu = -\frac{n_1}{2n}$ .)



**Question 1**

Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble ( $E$ ) des 3 solides ( $S_1$ ), ( $S_2$ ) et ( $S$ ) dans leur mouvement par rapport à  $R_0$

Par définition :

$$2T_{(E/R_0)} = 2T_{(S_1/R_0)} + 2T_{(S_2/R_0)} + 2T_{(S/R_0)}$$

$$2T_{(S_1/R_0)} = I_1 \omega_1^2$$

$$2T_{(S_2/R_0)} = I_2 \omega_2^2$$

$$2T_{(S/R_0)} = m[\vec{V}_{A/R_0}]^2 + I \omega^2 = m \cdot d^2 \cdot \omega_2^2 + I \omega^2$$

$$2T_{(E/R_0)} = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + m \cdot d^2 \cdot \omega_2^2 + I \omega^2$$

$$2T_{(E/R_0)} = I_1 \omega_1^2 + (I_2 + m \cdot d^2) \cdot \lambda^2 \cdot \omega_1^2 + I \mu^2 \cdot \omega_1^2$$

$$2T_{(E/R_0)} = [I_1 + (I_2 + m \cdot d^2) \cdot \lambda^2 + I \mu^2] \omega_1^2$$

Soit  $I_e$ , l'inertie équivalente de la chaîne cinématique rapportée à l'arbre moteur :  $2T_{(E/R_0)} = I_e \omega_1^2$

**Question 2**

Equation obtenue en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à (E) dans son mouvement par rapport à  $R_0$

Equation traduisant le théorème de l'énergie cinétique appliqué à (E) dans son mouvement par rapport à  $R_0$

$$\frac{d}{dt} (T_{(E/R_0)}) = P_{(\bar{E} \rightarrow E/R_0)} + P_{(S_1 \leftrightarrow S)} + P_{(S \leftrightarrow S_2)}$$

$P_{(S_1 \leftrightarrow S)}$  et  $P_{(S \leftrightarrow S_2)}$  sont nulles car les liaisons sont parfaites

$$\text{D'où : } P_{(\bar{E} \rightarrow E/R_0)} = P_{(S_0 \rightarrow S_1/R_0)} + P_{(S_0 \rightarrow S/R_0)} + P_{(S_0 \rightarrow S_2/R_0)} + P_{(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)} + P_{(\text{récepteur} \rightarrow S_2/R_0)}$$

$P_{(S_0 \rightarrow S_1/R_0)}$  ;  $P_{(S_0 \rightarrow S/R_0)}$  ;  $P_{(S_0 \rightarrow S_2/R_0)}$  sont nulles car les liaisons sont parfaites et  $R_0$  est lié à  $S_0$

$$\text{et } P_{(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)} = \{ \boldsymbol{\tau}_{\text{moteur} \rightarrow S_1} \} \cdot \{ \boldsymbol{v}_{(S_1/R_0)} \} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_1 \vec{x}_0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_1 \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = C_1 \cdot \omega_1$$

$$P_{(\text{récepteur} \rightarrow S_2/R_0)} = \{ \boldsymbol{\tau}_{\text{récepteur} \rightarrow S_2} \} \cdot \{ \boldsymbol{v}_{(S_2/R_0)} \} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -C_2 \vec{x}_0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_2 \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = -C_2 \cdot \omega_2$$

$$\text{Donc : } P_{(\bar{E} \rightarrow E/R_0)} = C_1 \cdot \omega_1 - C_2 \cdot \omega_2$$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique :  $I_e \omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} = C_1 \cdot \omega_1 - C_2 \cdot \omega_2$

Avec  $\omega_2 = \lambda \cdot \omega_1$  d'où :

$$I_e \frac{d\omega_1}{dt} = C_1 - \lambda C_2$$

Remarque

Le théorème de l'énergie cinétique est bien adapté pour une approche globale d'un mécanisme à un degré de mobilité



## 6 - Exemple d'application : Démarreur manuel de moteur Diesel

La figure ci-dessous représente un démarreur manuel pour moteur Diesel

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est un repère galiléen lié au carter du démarreur, ainsi qu'au bâti du moteur.

La vis (7) a une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x})$  avec le carter du démarreur, et l'écrou (9) possède une liaison glissière avec l'arbre creux (6) . une roue à rochet (32) liée au pignon conique (36) interdit la rotation  $(-R_y)$  de (36).

Une roue à rochet débrayable (12) liée à (17) interdit ou autorise ( si débrayée) la rotation  $(-R_x)$  du pignon (17).

Le lancement du moteur s'effectue en 5 phases

### 1<sup>ère</sup> phase :

Encliquetage de la roue à rochet (12) , d'où suppression de la rotation  $(R_x)$  de (17)

### 2<sup>ème</sup> phase :

Rotation  $(+R_y)$  de (36) qui entraîne la rotation  $(-R_x)$  de (6), (9) et (7) . La rotation  $(-R_x)$  de (7) entraîne la translation  $(+t_x)$  de (17) jusqu'à compression totale du ressort (14)

Le pignon (17) engrène avec la couronne de démarreur du moteur et la vis (7) est bloquée.

### 3<sup>ème</sup> phase :

La vis (7) étant immobilisée, la poursuite de la rotation  $(-r_x)$  de (7) entraîne sa translation  $(-t_x)$  ( course  $d = 40$  mm) et la compression des rondelles Belleville (5).

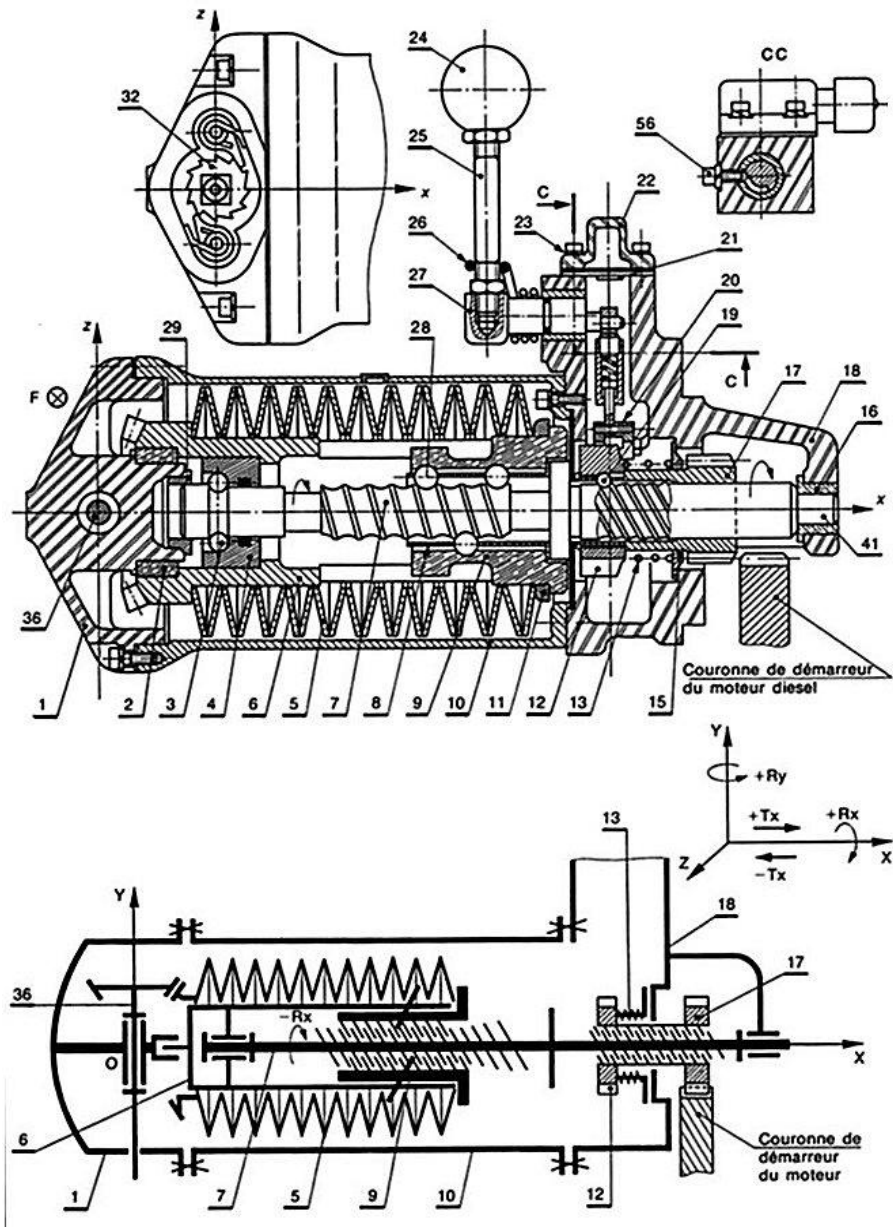
### 4<sup>ème</sup> phase :

La rotation d'un quart de tour de l'excentrique (27) permet le débrayage de la roue à rochet (12), d'où la rotation  $(-R_x)$  du pignon (17). sous l'action des rondelles (5), la translation  $(+t_x)$  de l'écrou (9) provoque la rotation  $(-R_x)$  de la vis (7). Le système vis (7) écrou (9) est rendu réversible grâce au faible coefficient de frottement de la liaison hélicoïdale à billes, de pasq  $p = 10$  mm. La rotation de (7) entraîne celle de (17) et de la couronne de démarreur du moteur Diesel.

### 5<sup>ème</sup> phase :

Le moteur, une fois lancé, provoque le renvoi du pignon (17) à sa position initiale, grâce à la rampe hélicoïdale de la vis (7) et du ressort (14)

Le schéma représente la situation du démarreur entre la 3<sup>ème</sup> phase et la 4<sup>ème</sup> phase. Le but de l'étude est de déterminer après lancement, la vitesse de rotation de vilebrequin (V) du moteur, dont l'axe de rotation est parallèle à  $(O, \vec{x})$



On note :

- $x$  : le déplacement de l'écrou (9) par rapport à sa position initiale ( rondelles comprimées )
- $\theta$  : L'angle qui définit la position angulaire de la vis (7) par rapport à R, tel que  $\theta = 0$  lorsque  $x = 0$
- $\varphi$  : L'angle qui définit la position angulaire du vilebrequin (V) par rapport à R, tel que  $\varphi = 0$  lorsque  $\theta = 0$
- $\lambda$  : Le rapport de réduction de l'engrenage constitué par le pignon (17) et la couronne du démarreur.
- $I$  : Le moment d'inertie de la vis (7) par rapport à son axe de rotation ( pièces entraînées en rotation comprises )
- $m$  : la masse de l'écrou (9)

$K$  : La raideur de l'ensemble des rondelles Belleville

$C_0$  : Le moment du couple résistant exercé par le moteur (M) sur le vilebrequin (V)

On donne :  $\lambda = \frac{1}{10}$  ;  $I = 6.10^{-4}$  kg.m<sup>2</sup> ;  $J = 4$  kg.m<sup>2</sup> ,  $m = 1,65$  kg ;  $K = 95$  daN/mm ;  $C_0 = 26$  m.daN

Toutes les liaisons sont parfaites . L'action mécanique de la pesanteur est négligée.

**1 – Relation entre la position x de l'écrou (9) et la position angulaire θ de la vis (7)**

$x = -\frac{p\theta}{2\pi}$        $p = \text{pas de la vis (7)} = 10 \text{ mm}$   
 La vis tourne dans le sens  $-R_x$  ;  $\theta = -8\pi$  lorsque  $x = 40 \text{ mm}$

**2 – Relation entre la position angulaire θ de la vis (7) et la position angulaire φ du vilebrequin (V)**

$\theta = -\frac{\varphi}{\lambda}$  ou  $\varphi = -\lambda\theta$

**3 – Energie cinétique galiléenne de l'ensemble (E) constitué par l'écrou (9), la vis (7) et le vilebrequin (V)**

(7) : inertie I ; (V) : inertie J ; (9) : masse m

$$2T(E/R) = I\theta'^2 + J\varphi'^2 + m\dot{x}^2$$

$$2T(E/R) = I\theta'^2 + J\lambda^2\theta'^2 + m\frac{p^2\theta'^2}{4\pi^2}$$

$$(T(E/R) = T(7/R) + T(V/R) + T(9/R))$$

$$T(E/R) = \frac{1}{2}\theta'^2(I + J\lambda^2 + m\frac{p^2}{4\pi^2})$$

**4 – Energie potentielle de l'écrou (9) associé à l'action mécanique du ressort constitué par les rondelles Belleville (5) supposées de masse nulle**

$K = \text{raideur de l'ensemble des rondelles (5)}$

$d = \text{course de l'écrou (9)} (= 40 \text{ mm})$

$x = \text{déplacement de l'écrou (9) par rapport à sa position initiale (rondelles comprimées)}$

Effort développé par les rondelles :  $\vec{F} = k(d-x)\vec{x}$  ( $d < x$ )

Puissance développée par l'action des rondelles sur l'écrou dans son mouvement par rapport à R :  $P_{((5)\rightarrow(9)/R)} = k(d-x).x'$

D'où l'énergie potentielle :  $V_{(5)\rightarrow(9)/R} = \frac{1}{2}k(d-x)^2$

**5 – Puissance développée par l'action mécanique du moteur (M) sur le vilebrequin (V) dans son mouvement par rapport à R**

$C_0 = \text{Moment du couple exercé par le moteur sur le vilebrequin}$

$\lambda\theta' = \varphi' = \text{vitesse de rotation du vilebrequin}$

$$P_{((M)\rightarrow(V)/R)} = \lambda C_0.\theta'$$

**6 – Application du théorème de l'énergie cinétique à (E) dans son mouvement par rapport à R. Détermination de la vitesse de rotation de la vis du démarreur à la fin du lancement**

$$\frac{d}{dt} T(E/R) = P_{(E\rightarrow E/R)} = P_{((5)\rightarrow(9)/R)} + P_{((M)\rightarrow(V)/R)}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}\theta'^2(I + J\lambda^2 + m\frac{p^2}{4\pi^2}) \right] = - \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}k(d-x)^2 \right) \right] + \lambda C_0.\theta'$$

En exprimant la variation d'énergie cinétique galiléenne de (E) entre 2 dates  $t_1$  et  $t_2$  ( $d\theta = \theta'$ )

$$\frac{1}{2}(I + J\lambda^2 + m\frac{p^2}{4\pi^2}) [\theta'^2]_{t_1}^{t_2} = - \left[ \frac{1}{2}k(d-x)^2 \right]_{t_1}^{t_2} + \lambda C_0[\theta]_{t_1}^{t_2}$$

• à  $t_1 = \text{début du lancement}$  :  $\theta(t_1) = 0$        $\theta'(t_1) = 0$        $x(t_1) = 0$

• à  $t_2 = \text{fin du lancement}$  :  $\theta(t_2) = -8\pi$        $\theta'(t_2) = \theta'_f$  (inconnue)       $x(t_2) = d$

$$\frac{1}{2}(I + J\lambda^2 + m\frac{p^2}{4\pi^2}) \theta_f'^2 = \frac{1}{2}kd^2 - \lambda C_0.8\pi$$

D'où 
$$\theta_f'^2 = \frac{\frac{1}{2}kd^2 - \lambda C_0.8\pi}{\frac{1}{2}(I + J\lambda^2 + m\frac{p^2}{4\pi^2})}$$

## Résumé

1 - Les éléments de réduction du **torseur cinétique** d'un ensemble matériel (S) de masse m, de centre d'inertie G dans son mouvement par rapport au repère R

$$\{\mathcal{C}_{(S/R)}\} = \begin{cases} \int_{P \in S} \vec{V}_{P/R} dm = m \vec{V}_{G/R} & \text{Quantité de mouvement} \\ \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{V}_{P/R} dm = \vec{\sigma}_{A(S/R)} & \text{Moment cinétique} \end{cases}$$

2 - Les éléments de réduction du **torseur dynamique** de cet ensemble matériel (S)

$$\{\mathcal{D}_{(S/R)}\} = \begin{cases} \int_{P \in S} \vec{\Gamma}_{P/R} dm = m \vec{\Gamma}_{G/R} & \text{Résultante dynamique} \\ \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}_{P/R} dm = \vec{\delta}_{A(S/R)} & \text{Moment dynamique} \end{cases}$$

3 - Relation entre le **moment dynamique** et le **moment cinétique** de l'ensemble matériel (S)

$$\vec{\delta}_{A(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A(S/R)} \right]_R + m \cdot \vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{G/R}$$

A est un point quelconque

Si A est fixe dans R

$$\vec{\delta}_{A(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A(S/R)} \right]_R$$

Si A est confondu avec G

$$\vec{\delta}_{G(S/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G(S/R)} \right]_R$$

4 - **L'énergie cinétique** de l'ensemble matériel (S) dans son mouvement par rapport au repère R

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \int_{P \in S} [ \vec{V}_{P/R} ]^2 dm$$

5 - L'opérateur d'inertie d'un solide (S) au point O est l'opérateur qui, à tout vecteur  $\vec{u}$ , fait correspondre le vecteur :

$$\vec{J}_O(S, \vec{u}) = \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) dm$$

6 - La matrice d'inertie d'un solide (S), au point O relativement à la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\vec{J}_O(S, \vec{x}) \quad \vec{J}_O(S, \vec{y}) \quad \vec{J}_O(S, \vec{z})$$

Avec :

$$A = \int_{P \in S} (y^2 + z^2) dm \quad B = \int_{P \in S} (x^2 + z^2) dm \quad C = \int_{P \in S} (x^2 + y^2) dm$$

$$D = \int_{P \in S} (y \cdot z) dm \quad E = \int_{P \in S} (z \cdot x) dm \quad F = \int_{P \in S} (x \cdot y) dm$$

Pour calculer le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe, mettre en évidence les symétries par rapport à cet axe ( simplification des calculs ) Par exemple pour un solide symétrique par rapport au plan xOy, Ixz (E) et Iyz (D) sont nuls

Avant de multiplier deux matrices, vérifier qu'elles soient exprimées dans la même base.

7 - Le **moment d'inertie** du solide (S) par rapport à l'axe  $\Delta(O, \vec{i})$

$$I(S / \Delta) = \vec{i} \cdot \vec{J}_O(S, \vec{i})$$

8 - **Théorème de Huyghens**

(S) : solide de masse m; centre d'inertie G

Relations entre les moments d'inertie en O et en G

$$A = A_G + m(b^2 + c^2)$$

$$B = B_G + m(a^2 + c^2)$$

$$C = C_G + m(a^2 + b^2)$$

$$D = D_G + m.b.c$$

$$E = E_G + m.a.c$$

$$F = F_G + m.a.b$$

Avec :  $\vec{OG} = a. \vec{x} + b. \vec{y} + c. \vec{z}$  ( dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  )

9 - Le **moment cinétique** du solide (S) au point A dans son mouvement par rapport à R

**1<sup>er</sup> cas :** Le mouvement de (S) par rapport à R est tel que  $\vec{\Omega}_{S/R}$  soit de la forme  $\theta' \vec{z}$  ( c'est le cas lorsque (S) a un mouvement plan sur plan dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  ou un mouvement hélicoïdal d'axe  $\vec{z}$  )

Ce qui donne pour  $\vec{\sigma}_A(S/R)$  :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m. \vec{AG} \wedge \vec{V}_{A/R} - E_1 \theta' \vec{x}_1 - D_1 \theta' \vec{y}_1 + C \theta' \vec{z}$$

Cas particuliers

■ **A est fixe dans R et  $E_1 = 0$  et  $D_1 = 0$**  ( le plan  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  est plan de symétrie pour (S)) alors :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = I_{Az}. \theta' \vec{z}$$

■ **A est confondu avec G et  $E_1 = 0$  et  $D_1 = 0$**

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = I_{Gz}. \theta' \vec{z}$$

**2<sup>ème</sup> cas :** Cas général, le mouvement de (S) par rapport à R est quelconque

L'intégrale  $\int_{P \in S} \vec{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}) . dm$  représente l'opérateur d'inertie de (S) appliqué au vecteur  $\vec{\Omega}_{S/R}$

Donc : 
$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m. \vec{AG} \wedge \vec{V}_{A/R} + \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}_{S/R})$$

Cas particuliers

■ **A est fixe dans R**

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}_{S/R})$$

■ **A est confondu avec G**

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = \vec{J}_G(S, \vec{\Omega}_{S/R})$$

10 – Principe fondamental de la dynamique

Il existe au moins un repère  $R_g$ , appelé repère galiléen et au moins une chronologie galiléenne, tels que pour tout sous-ensemble matériel (E), le torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à  $R_g$  soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures à (e)

$$\{ \mathcal{D}_{(e/R)} \} = \{ \mathcal{T} \bar{e} \rightarrow e \} \text{ quel que soit } (e) \subset (E)$$

11 – Une équation du mouvement est une équation différentielle du second ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique.

Par conséquent, pour obtenir directement une équation scalaire ne faisant pas intervenir les inconnues X et Y, il faut appliquer le théorème du moment dynamique au point où les actions sont inconnues.

Pour obtenir une équation du mouvement, il faut analyser les torseurs d'action mécanique pour choisir :

- les sous-ensembles de solides auxquels on appliquera le principe fondamental

- le point où on écrira le théorème du moment dynamique

- l'axe sur lequel on projettera les équations vectorielles traduisant les théorèmes généraux

Il faut rechercher les intégrales premières du mouvement pour obtenir des équations simples.

12 – Théorème des actions mutuelles :

**L'action mécanique du sous-ensemble matériel ( $e_2$ ) sur le sous-ensemble matériel ( $e_1$ ) est opposée à l'action mécanique de ( $e_1$ ) sur ( $e_2$ ).**

$$\{ \mathcal{T} e_2 \rightarrow e_1 \} = - \{ \mathcal{T} e_1 \rightarrow e_2 \}$$

13 – Le principe fondamental de la dynamique s'applique relativement à **tout repère à condition d'ajouter** au torseur des actions mécaniques extérieures, le **torseur des effets d'inertie d'entraînement** et des **effets d'inertie de Coriolis**

14 – Tout repère en translation rectiligne uniforme par rapport à un repère galiléen est aussi galiléen.

15 – Les **conditions d'équilibrage dynamique d'un solide (S)** en rotation autour d'un axe par rapport à un bati :

- Le **centre d'inertie G** de (S) est sur l'axe de rotation
- L'**axe de rotation est principal d'inertie** pour (S)

Autres remarques

Pour calculer les projections du moment résultant sur les axes, **choisir la base d'expression des projections du moment dynamique en fonction des composantes du moment résultant des actions appliquées au système.**

16 - **La puissance développée par l'action mécanique** d'un ensemble matériel ( $\Sigma$ ) sur un solide (S) , dans le mouvement de (S) par rapport à un repère R, s'exprime par :

$$P_{(\Sigma \rightarrow S/R)} = \{ \mathcal{T}_{(\Sigma \rightarrow S)} \} \cdot \{ \mathcal{V}_{(S/R)} \}$$

17 - **La puissance développée par les actions mutuelles** entre deux ensembles matériels est **indépendante du repère** choisi pour la calculer

18 - Deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) ont une **liaison parfaite** si quel que soit le mouvement de ( $S_2$ ) par rapport à ( $S_1$ ) autorisé par la liaison , la **puissance développée par les actions mutuelles entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) est nulle.**

Soit :  $P_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} = 0$

Mais la puissance  $P_{(S_1 \rightarrow S_2/R)}$  n'est généralement pas nulle sauf si le repère R est lié à ( $S_1$ )

19 - Le travail entre les dates  $t_1$  et  $t_2$  de l'action mécanique de l'ensemble matériel ( $\Sigma$ ) sur l'ensemble matériel (E) , dans le mouvement de (E) par rapport au repère R est :

$$W_{t_1}^{t_2}(\rightarrow E/R) = \int_{t_1}^{t_2} P_{(\Sigma \rightarrow E/R)} dt$$

Unité de travail : Joule (J) ( Unité de puissance : Watt (W) )

20 - Le double de l'énergie cinétique du solide (S) est égal au produit de son torseur cinétique par son torseur cinématique soit :

$$2T_{(S/R)} = \{ (S/R) \} \{ \mathcal{V}_{(S/R)} \} \text{ ce qui correspond à : } 2T_{(S/R)} = m \cdot \vec{V}_{G/R} \cdot \vec{V}_{A/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_A(S/R)$$

Cas particuliers

1<sup>er</sup> cas : A est fixe dans R alors :  $2T_{(S/R)} = \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_A(S/R)$

a) Si  $\vec{\Omega}_{S/R}$  est de la **forme  $\theta \vec{z}$**  donc :  $\vec{\sigma}_A(S/R) = -E_1 \theta \vec{x}_1 - D_1 \theta \vec{y}_1 + I_{Az} \theta \vec{z}$  d'où :  $2T_{(S/R)} = I_{Az} \theta^2$

b) Si  $\vec{\Omega}_{S/R}$  est quelconque donc :  $\vec{\sigma}_A(S/R) = \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}_{S/R})$  d'où :  $2T_{(S/R)} = \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}_{S/R})$

2<sup>ème</sup> cas : A est confondu avec G alors :  $2T_{(S/R)} = m \cdot (\vec{V}_{G/R})^2 + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_G(S/R)$

a) Si  $\vec{\Omega}_{S/R}$  est de la **forme  $\theta \vec{z}$**  donc :  $\vec{\sigma}_A(S/R) = -E_1 \theta \vec{x}_1 - D_1 \theta \vec{y}_1 + I_{Gz} \theta \vec{z}$  d'où :  $2T_{(S/R)} = m \cdot (\vec{V}_{G/R})^2 + I_{Gz} \theta^2$

b) Si  $\vec{\Omega}_{S/R}$  est quelconque donc :  $\vec{\sigma}_A(S/R) = \vec{J}_G(S, \vec{\Omega}_{S/R})$  d'où :  $2T_{(S/R)} = m \cdot (\vec{V}_{G/R})^2 + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{J}_G(S, \vec{\Omega}_{S/R})$

21 - L'ensemble matériel (E) possède une énergie potentielle associée à l'action mécanique d'un ensemble matériel ( $\Sigma$ ) sur (E) dans le mouvement de (E) par rapport à un repère (R), s'il existe une fonction scalaire  $V_{(\Sigma \rightarrow E/R)}$  telle que :

$$P_{(\Sigma \rightarrow E/R)} = - \frac{d}{dt} V_{(\Sigma \rightarrow E/R)}$$

$V_{(\Sigma \rightarrow E/R)}$  est l'énergie potentielle de (E) associée à l'action mécanique de ( $\Sigma$ ) sur (E) dans le mouvement de (E) par rapport à R

22 - L'énergie potentielle de la pesanteur d'un ensemble matériel (E) de masse m et de centre d'inertie G est :

$$V_{(g \rightarrow E/R)} = m \cdot g \cdot z_G$$

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  repère lié à la Terre

L'action mécanique de la pesanteur un ensemble matériel (E) de masse (m) et de centre d'inertie G est représenté par un champ de forces uniforme défini par la densité massique . Accélération de la pesanteur :  $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}$

$z_G$  représente l'abscisse sur  $(O, \vec{z})$  du centre d'inertie G

Cette expression est **valable uniquement pour un axe vertical ascendant** . Si l'axe est vertical descendant , cette expression change de signe.

23 - L'énergie potentielle de deux solides entre lesquels est intercalé un ressort de traction-compression de masse nulle est :

$$V_{(r \rightarrow S_1, S_2)} = - \frac{k}{2} (l - l_0)^2 \text{ à une constante près}$$

24 - Le **théorème de l'énergie cinétique** pour un ensemble de solides :

La dérivée, par rapport à la date t , de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble (E) de solides est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E) et des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de (E)

$$\frac{d}{dt} T_{(E/Rg)} = P_{(\bar{E} \rightarrow E/Rg)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P_{(S_i \leftrightarrow S_j)}$$

avec  $T_{(E/Rg)}$  = énergie cinétique galiléenne de (E)

Ce théorème s'écrit également en faisant intervenir le travail des actions mécaniques entre deux dates  $t_1$  et  $t_2$  :

$$T_{t_2(E/Rg)} - T_{t_1(E/Rg)} = W_{t_1}^{t_2}(\bar{E} \rightarrow E/Rg) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n W_{t_1}^{t_2}(S_i \leftrightarrow S_j)$$

25 - Pour calculer  $\vec{z}_1 \cdot \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_{A(S_2/R)} \right]_R$  il est souvent plus simple de calculer  $\frac{d}{dt} \left[ \vec{z}_1 \cdot \overrightarrow{\sigma}_{A(S_2/R)} \right]_R - \left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R \cdot \overrightarrow{\sigma}_{A(S_2/R)}$