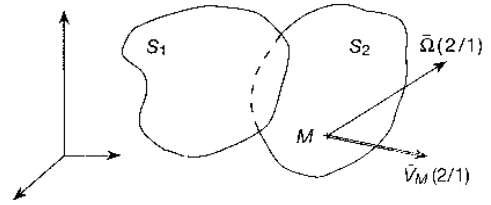


Les transmissions par engrenages

1 – Torseur cinématique

Soient 2 solides S_1 et S_2 en mouvement relatif
A chaque instant on a :

- $\vec{\Omega}_{2/1}$ est le vecteur fréquence angulaire instantanée de S_1 par rapport à S_2 ;
- $\vec{V}_{M \in 2/1}$ est le vecteur vitesse linéaire instantanée du point $M \in S_2$ dans son mouvement par rapport à S_1 .



• Torseur cinématique :

$$\{ \tau_c (S_2/S_1) \}_M = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{M \in 2/1} \end{array} \right\}$$

2 – Propriétés du torseur

• Déplacement du torseur cinématique :

$$\vec{V}_{N \in 2/1} = \vec{V}_{M \in 2/1} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{MN}$$

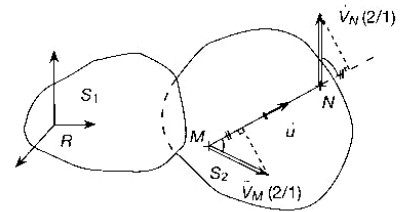
• Invariant scalaire :

$$\vec{V}_{M \in 2/1} \cdot \vec{\Omega}_{2/1} = \vec{V}_{N \in 2/1} \cdot \vec{\Omega}_{2/1} = k$$

k = Invariant scalaire

• Equiprojectivité du champ des vecteurs vitesse :

$$\vec{V}_{M \in 2/1} \cdot \vec{u} = \vec{V}_{N \in 2/1} \cdot \vec{u}$$



3 – Axe central du torseur cinématique

L'axe central du torseur cinématique est une direction privilégiée telle que :

$$\vec{\Omega}_{2/1} // \vec{V}_{I \in 2/1}$$

I = centre instantané de rotation du mouvement de 2 par rapport à 1

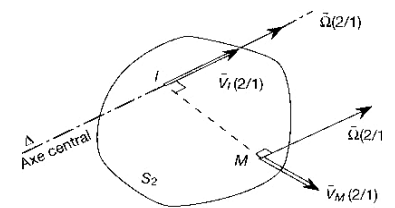
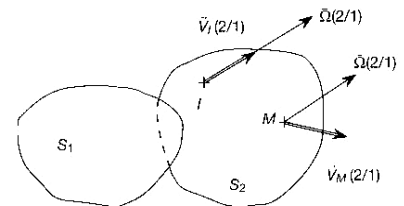
L'axe central est défini par l'équation :

$$\vec{MI} = \frac{\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{V}_{M \in 2/1}}{\|\vec{\Omega}_{2/1}\|^2}$$

L'axe central permet de définir les **axoïdes**

dans le mouvement relatif des 2 roues dentées assimilées aux solides S_1 et S_2 .

Quel que soit le point I appartenant à l'axe central Δ on a : $\vec{V}_{I \in 2/1} = k \cdot \vec{\Omega}_{2/1}$



La **transmission du mouvement de rotation** entre 2 arbres résultant de l'engrènement d'une roue dentée S_1 sur une roue dentée S_2 est homocinétique.

Donc le rapport des vitesses instantanées $k_{12} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \text{constante}$

(quelle que soit la position relative des profils)

4 – Mouvement plan sur plan

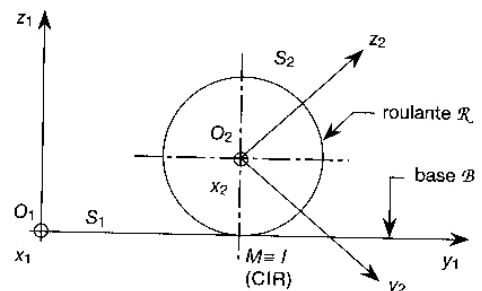
Le Centre Instantané de Rotation (CIR) du mouvement plan / plan (P_1 / P_2)

est situé dans le plan P_1 et P_2 tel que $\vec{V}_{I(P_1/P_2)} = \vec{0}$

La trajectoire de I dans P_1 s'appelle la **base** du mouvement

La trajectoire de I dans P_2 s'appelle la **roulante** du mouvement

Le mouvement du plan P_1 sur le plan P_2 revient à un roulement sans glissement de la roulante R sur la base B autour du CIR (I)



5 - Profils conjugués

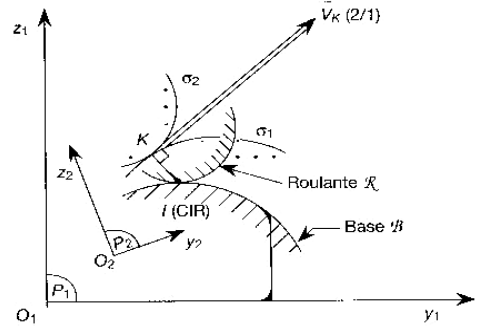
Soit σ_2 , une courbe convexe liée à P_2 . Pendant son mouvement par rapport au plan P_1 , σ_2 admet une courbe enveloppe σ_1 dans le plan fixe P_1 .

$\sigma_1 \in P_1$ est l'enveloppe ; $\sigma_2 \in P_2$ est l'enveloppée

Le mouvement de σ_2 par rapport à σ_1 est un mouvement de roulement avec glissement au point de contact K.

La vitesse de glissement en K est : $\vec{V}_K \in 2/1 = \vec{\Omega}_{2/1} \times \vec{IK} \neq 0$

La normale en K aux profils conjugués passe par I.



Les parties actives des dents d'un engrenage sont des profils conjugués (en développante de cercle pour leur majorité)

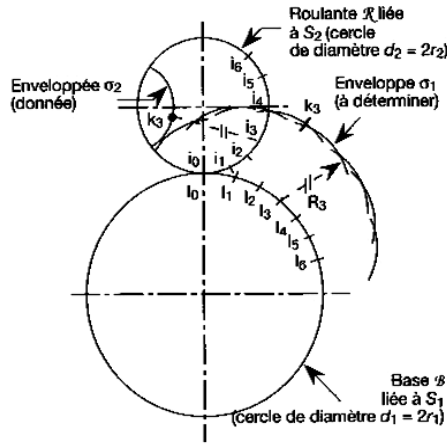
$\vec{V}_K \in 2/1 \neq 0$ ne remet pas en cause le caractère homocinétique de la transmission.

Sur les roues dentées S_1 et S_2 :

Base = cercle primitif C_1 (S_1)

Roulante = cercle primitif C_2 (S_2)

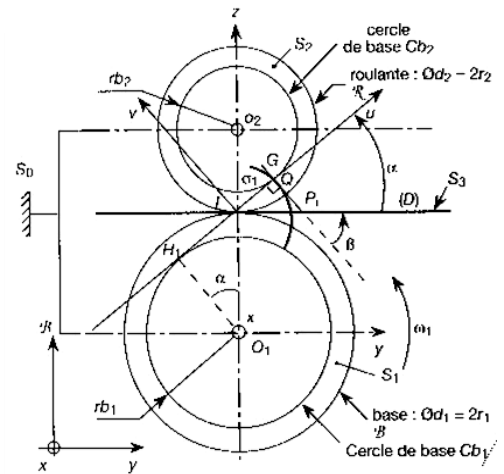
C_{b1} et C_{b2} sont les cercles de base qui admettent une ligne d'action (ou ligne d'engrènement) comme tangente commune, passant par I



Pendant l'engrènement, le point de contact K des profils conjugués se déplace suivant la ligne d'action.

L'angle de pression α est l'angle formé par la tangente en I à C_1 et à C_2 et la ligne d'action (tangente à C_{b1} et C_{b2})

Valeur courante : $\alpha = 20^\circ$



6 - Axiodes

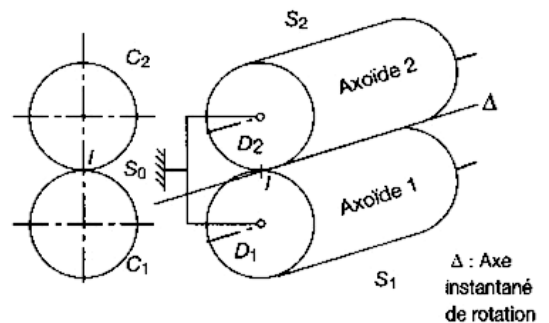
Δ = axe instantané de rotation dans le mouvement S_2 / S_1

Axiodes du mouvement = ce sont les volumes engendrés par Δ dans les repères mobiles liés à S_1 et S_2

Les axiodes sont :

- des cylindres pour les engrenages à axes parallèles
- des cônes pour les engrenages coniques
- des hyperboloïdes de révolution pour les engrenages gauches

Dans le cas des engrenages cylindriques ou coniques, la transmission se fait avec la rotation instantanée de S_2/S_1 autour de l'axe instantané de rotation ou axe central Δ sans translation d'un solide par rapport à l'autre suivant cet axe.



Dans le cas des engrenages gauches, la rotation instantanée de S_2/S_1 autour de l'axe instantané de rotation ou axe central Δ s'accompagne d'une translation d'un solide par rapport à l'autre. Le mouvement instantané de S_2/S_1 est donc une viration d'axe Δ .

Soit $\vec{V}_M \in S_2 / S_1$ la vitesse de glissement suivant l'axe Δ et $\vec{\Omega}_{s_2/s_1}$ la fréquence de rotation autour de Δ

On définit le pas p de la viration : $\|\vec{V}_M \in S_2 / S_1\| = p \|\vec{\Omega}_{s_2/s_1}\|$

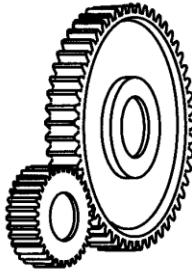
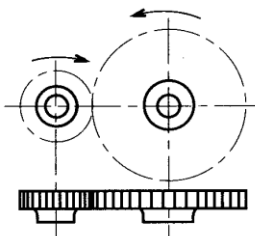
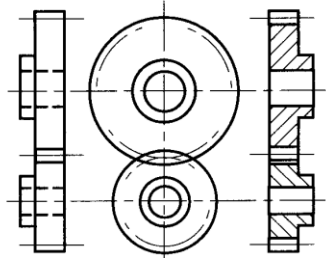
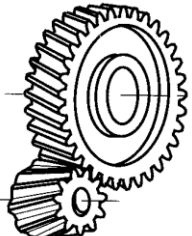
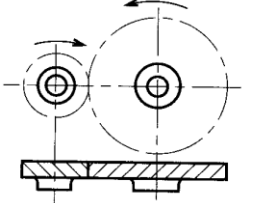
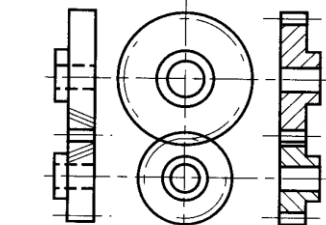
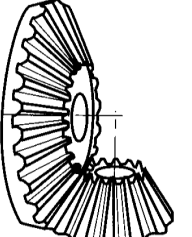
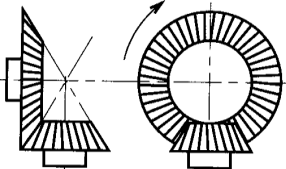
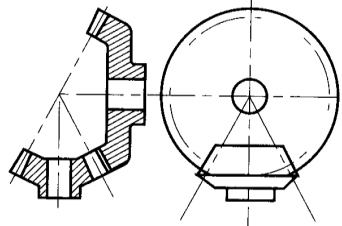
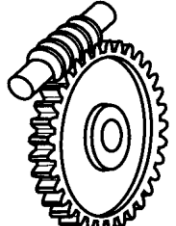
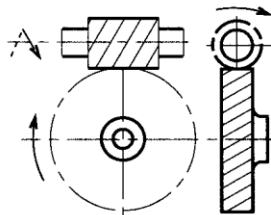
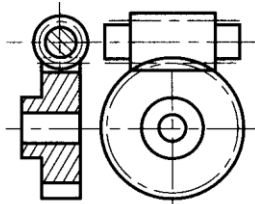
Les engrenages hypoides et le système roue et vis sans fin sont des cas particuliers d'engrenages gauches.

7 - Les différents types d'engrenages

Un engrenage est constitué de **deux roues dentées** engrenant l'une avec l'autre **OU** d'une roue et d'une **crémaillère** (la plus petite des deux roues est appelée pignon).

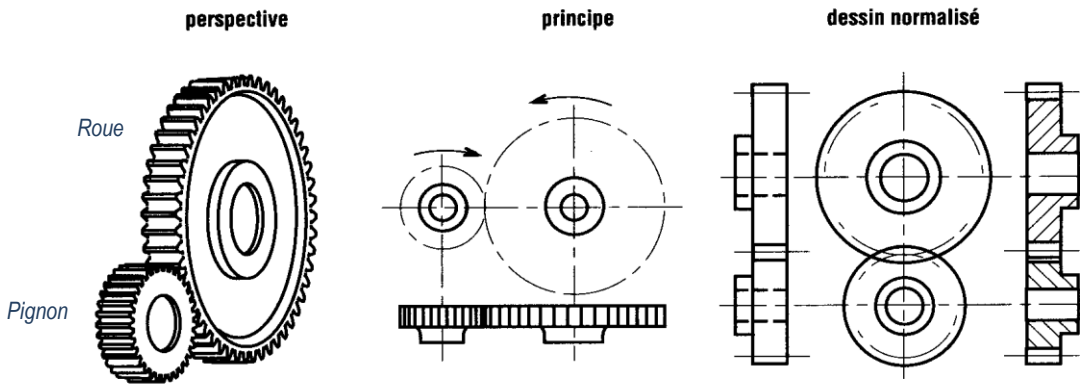
Condition d'engrenage du pignon et de la roue :

- même profil de denture ;
- même module (valeur normalisée qui dépend efforts mis en jeux)
- même angle de pression ($\alpha=20^\circ$ en général)

	perspective	principe	dessin normalisé
Engrenage cylindrique à denture droite			
Engrenage cylindrique à denture hélicoïdale			
Engrenage conique			
Roue et vis sans fin			

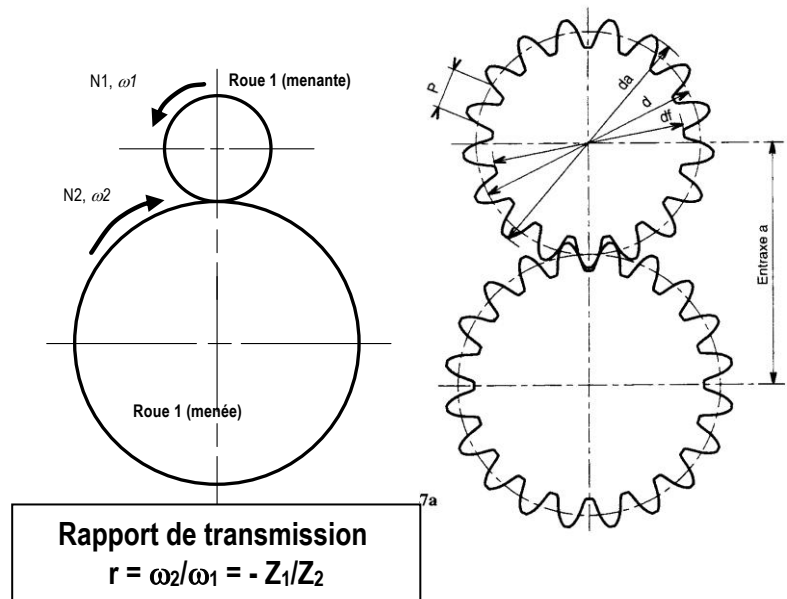
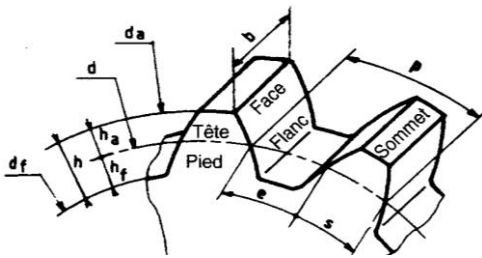
8 - Les engrenages à axes parallèles

Engrenages à axes parallèles, cylindrique extérieur, à denture droite



Caractéristiques géométriques

- da : φ de tête (da1, da2)
- df : φ de pied (df1, df2)
- m : module
- p : pas → $p = m \cdot \pi$
- Z : nombre de dents (Z1, Z2)
- a : entraxe des deux roues → $a = r_1 + r_2 = (d_1/2) + (d_2/2)$
- d : φ primitif (d1, d2) → $d_1 = m \cdot Z_1$ et $d_2 = m \cdot Z_2$



Les profils conjugués d'engrenages cylindriques à denture droite sont des développantes de cercle. Le dimensionnement des dents est fonction d'un module normalisé M dont la valeur approximative est issue d'un calcul de résistance des matériaux.

$$M \geq 2,34 \sqrt{\frac{T}{k \cdot \sigma_{pe}}}$$

avec : - T = Composante tangentielle de l'effort de contact, calculée à partir de la puissance à transmettre en W

- k = Constante (valeur courante : k = 10)

- σ_{pe} = Résistance pratique en extension du matériau constituant la denture (Mpa)

L'épaisseur e_A d'une dent sur un rayon $r_A \neq r$ (rayon primitif) $e = \frac{\pi \cdot M}{2}$

e = épaisseur de la dent sur le rayon primitif

α_A = Angle de paramétrage de la position du point A sur le rayon primitif (r)

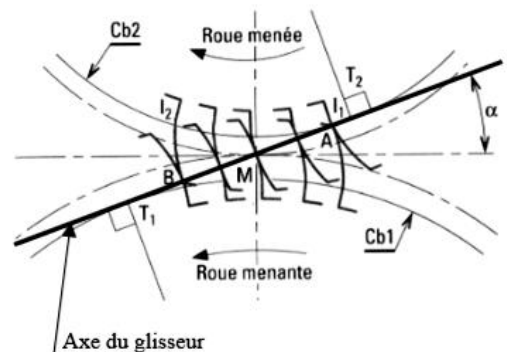
$$\cos \alpha_A = \frac{r}{r_A} \cos \alpha \quad \text{et} \quad e_A = r_A \left[\frac{e}{r} + 2(\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_A) \right] \quad \text{avec} \quad \operatorname{inv} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$$

Pour assurer la continuité de l'engrènement, le rapport de continuité $k = \frac{AB}{p} > 1$

(En pratique k = 1,3)

Il y a **interférence** entre 2 profils lorsqu'ils ne sont plus tangents

Pour éviter ce phénomène : $\frac{1}{6} \leq \frac{\omega_2}{\omega_1} \leq 6$ et Z_1 ou $Z_2 \geq 13$



▪ Engrenages hélicoïdaux : Il existe un **profil réel** et un **profil apparent**

M_r = module réel = valeur normalisée du module (denture droite : $\beta = 0$)

$$M_r \geq 2,34 \sqrt{\frac{T'}{k \cdot \sigma_{pe}}} \quad \text{avec } T' = \frac{T}{\cos \beta} \quad \beta = \text{inclinaison de l'hélice}$$

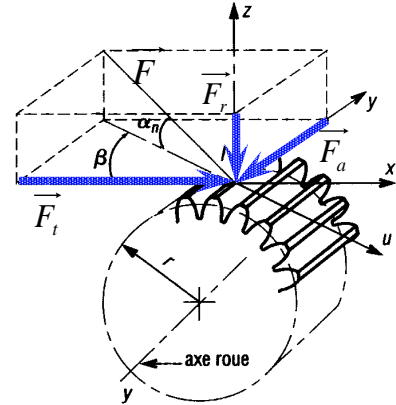
▪ L'action de contact exercée au point P par S_1 sur S_2 est :

$$\vec{P}_{1 \rightarrow 2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{F}_T + \vec{F}_A + \vec{F}_R = \vec{T} + \vec{A} + \vec{R}$$

$\vec{F}_T = \vec{T}$ = composante tangentielle (résultant de la puissance à transmettre)

$\vec{F}_A = \vec{A}$ = composante axiale

$\vec{F}_R = \vec{R}$ = composante radiale



	$F_T = T$	$F_A = A$	$F_R = R$
Denture droite	$\frac{60P}{\pi d \cdot N}$	0	$T \cdot \tan \alpha$
Denture hélicoïdale		$T \cdot \tan \beta$	$\frac{T \cdot \tan \alpha}{\cos \beta}$

▪ Cas particulier : liaison pivot d'axe (O_1, \vec{y})

Expression des torseurs d'action mécanique aux centres O_1 et O_2 des paliers

Pour une roue à denture droite

$$\left\{ \tau_{S_0 \rightarrow S_1} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} \frac{b_1}{l_1} T & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \frac{b_1}{l_1} R & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\left\{ \tau_{S'_0 \rightarrow S_1} \right\}_{O_2} = \left\{ \begin{array}{c|c} \frac{a_1}{l_1} T & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \frac{a_1}{l_1} R & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

Pour une roue à denture hélicoïdale

$$\left\{ \tau_{S_0 \rightarrow S_1} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} \frac{b_1}{l_1} T & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \frac{r_1}{l_1} A + \frac{b_1}{l_1} R & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

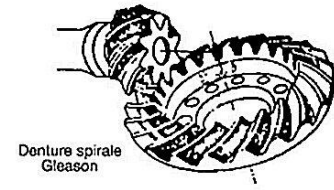
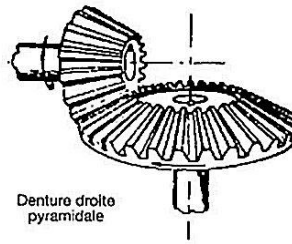
$$\left\{ \tau_{S'_0 \rightarrow S_1} \right\}_{O_2} = \left\{ \begin{array}{c|c} \frac{a_1}{l_1} T & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \frac{r_1}{l_1} A - \frac{t_1}{l_1} R & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

9 - Les engrenages à axes non parallèles

▪ Les axoïdes sont des cônes = cônes primitifs

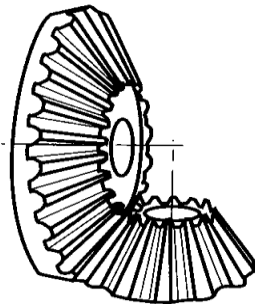
Plusieurs types de dentures existent :

- denture droite pyramidale ;
- denture oblique pyramidale ou hélicoïdale ;
- denture spirale : 3 possibilités :
 - denture Gleason ;
 - denture Oerlikon ;
- denture Klingelnberg

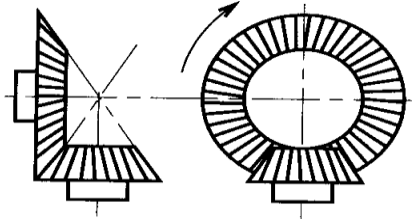


9 - 1 Engrenages coniques

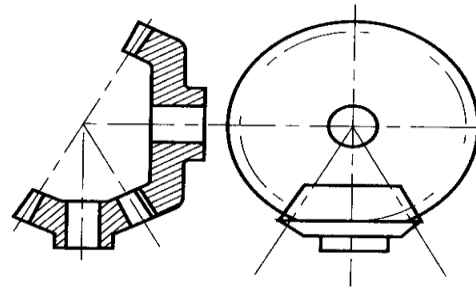
perspective



principe



dessin normalisé



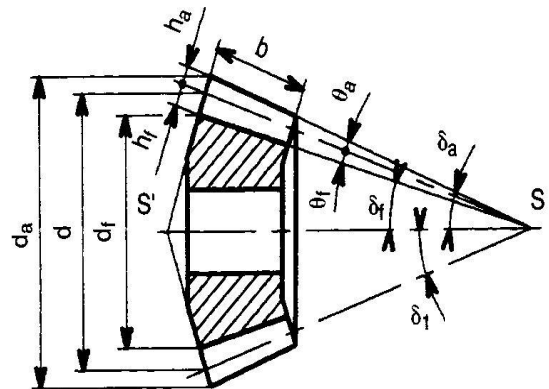
Rapport de transmission

$$K_{12} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

$$OH = \frac{d}{\operatorname{tg} \delta} \quad \text{et} \quad OC = \frac{d}{2 \sin \delta}$$

$$\operatorname{tg} \theta_a = \frac{h_a 2 \sin \delta}{d} = \frac{2M \sin \delta}{d}$$

$$\operatorname{tg} \theta_f = \frac{h_f 2 \sin \delta}{d} = \frac{2,5 M \sin \delta}{d}$$



▪ Dimensionnement des dents :

On calcule le module M normalisé au niveau de la base du cône primitif;

$$M = \frac{r_m + \frac{b}{2 \sin \delta}}{r_m} M_m \quad \text{avec} \quad r_m = \text{rayon moyen du cône primitif}$$

b = largeur de la roue dentée

δ = demi-angle au sommet du cône primitif

M_m = Module moyen (issu du calcul de RDM)

$$Mr \geq 2,34 \sqrt{\frac{T}{k \cdot \sigma_{pe}}}$$

avec T = Composante tangentielle de l'effort de contact au niveau du rayon moyen du cône primitif (calculé à partir de la puissance transmise)

k = Constante ($k \geq 5$)

σ_{pe} = Résistance pratique en extension du matériau constituant la denture (Mpa)

• L'action de contact exercée au point P par S₁ sur S₂ : (P est situé sur le diamètre moyen du cône primitif)

$$\vec{P}_{1 \rightarrow 2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{F}_T + \vec{F}_A + \vec{F}_R = \vec{T} + \vec{A} + \vec{R}$$

$$\vec{F}_T = \vec{T} = \text{composante tangentielle (résultant de la puissance à transmettre)} = \frac{60P}{\pi d_{1m} \cdot N_1} = \frac{60P}{\pi d_{2m} \cdot N_2}$$

$\vec{F}_A = \vec{A}$ = composante axiale

$\vec{F}_R = \vec{R}$ = composante radiale

α = angle de pression

T	A	R
$\frac{60P}{\pi d \cdot N}$	$T \cdot \text{tg} \alpha \cdot \sin \delta$	$T \cdot \text{tg} \alpha \cdot \cos \delta$

• Cas particulier : Liaison pivot de l'arbre réalisée par un seul palier dans le bâti S₀

$$\left\{ \tau_{S_0 \rightarrow S_1} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c|c} T & a \cdot R - r_{1m} A \\ A & O \\ R & - a \cdot T \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \text{avec } \vec{OP} = a \cdot \vec{y} + r_{1m} \cdot \vec{z}$$

9 - 2 Engrenages gauches

Cas général:

$\beta_A + \beta_B = \Sigma$ dans le cas d'axes orthogonaux; $\Sigma = 90^\circ$

Condition d'engrènement:

Deux roues gauches engrèment entre elles si:

- elles ont le même pas réel
- leurs angles d'hélice sont tous les deux à gauche ou à droite.

Rapport des vitesses:

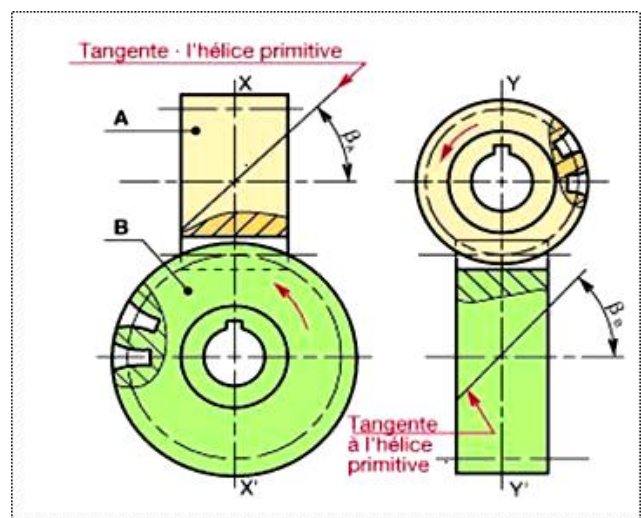
$$N_B / N_A = Z_A / Z_B$$

$$Z_A = d_A / m_{tA} ; Z_B = d_B / m_{tB}$$

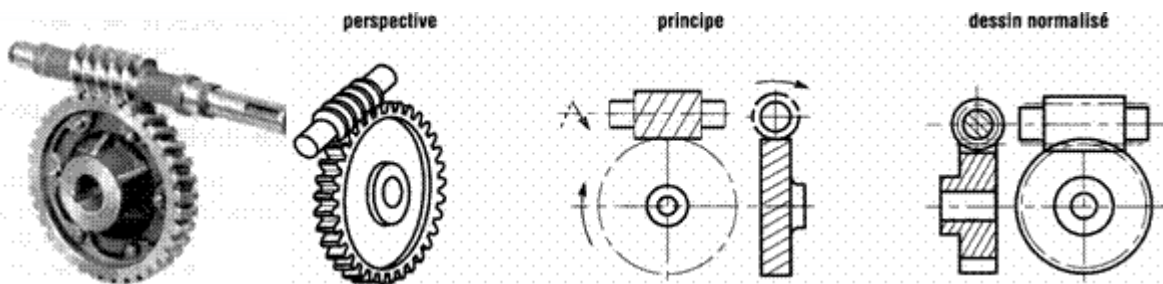
$$m_{tA} = m_{nA} / \cos \beta_A$$

$$m_{tB} = m_{nB} / \cos \beta_B$$

$$\frac{N_B}{N_A} = \frac{\frac{d_A \cdot \cos \beta_A}{m_{nA}}}{\frac{d_B \cdot \cos \beta_B}{m_{nB}}} = \frac{d_A \cdot \cos \beta_A}{d_B \cdot \cos \beta_B} \cdot \frac{m_{nB}}{m_{nA}}$$



Application à un réducteur à roue et vis sans fin:



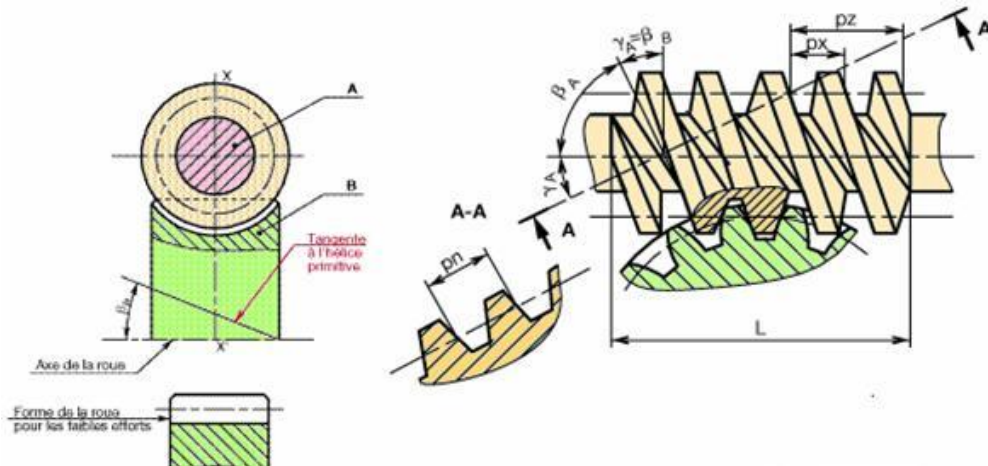
Rapport des vitesses:

$$N_B / N_A = Z_A / Z_B$$

$$\beta_A + \beta_B = 90^\circ (\cos \beta_A = \sin \beta_B)$$

$$[N_B / N_A = (d_A / d_B) \cdot \text{tg} \beta_B = (d_A / d_B) / \text{tg} \beta_A]$$

Caractéristiques d'une vis:



Angle d'hélice	β_A Dépend de la réversibilité du système (syst. pratiquement irréversible si $\gamma_A < 5^\circ$)	Pas de l'hélice	$p_z = p_x \cdot Z_A$ ou $p_z = \pi d / \text{tg } \beta_A$
Sens de l'hélice	La vis a le même sens d'hélice que la roue	Diamètre primitif	$d = p_z \cdot \text{tg } \beta_A / \pi$
Module réel	m_n Déterminé sur la roue (calculé par la RDM)	Diamètre extérieur	$d_a = d + 2m_n$
Module axial	$m_x = m_n / \cos \gamma_A$	Diamètre intérieur	$d_f = d - 2,5 m_n$
Pas réel	$p_n = m_n \cdot \pi$	Longueur de la vis	$L \approx 5 p_x$
Pas axial	$p_x = p_n / \cos \gamma_A$		

Avantages – Inconvénients:

- Ce mécanisme permet d'obtenir un grand rapport de réduction avec seulement deux roues dentées (1/200°).
- Les systèmes roue-vis sans fin sont presque toujours irréversibles d'où sécurité anti-retour.
- L'engrènement se fait avec beaucoup de glissement entre les dents, donc usure et rendement faible (60%)
- La vis supporte un effort axial important.

Efforts:

La composante normale à la denture donne ici trois forces:

- Effort tangentiel T, souvent déterminé à partir du couple :

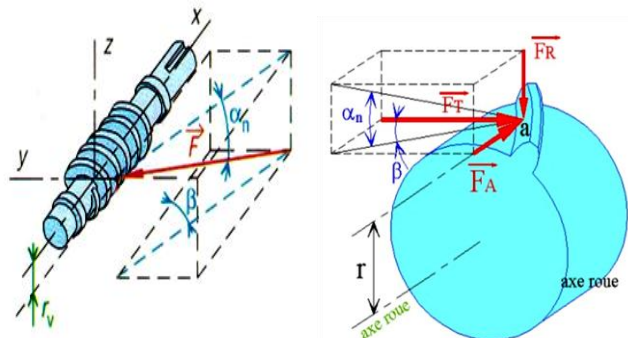
$$T = 2 \cdot C / d$$

- Effort radial R, déterminé par la relation :

$$R = (T / \cos \beta) \cdot \tan \alpha$$

- Effort axial A, déterminé par la relation:

$$A = T \cdot \tan \beta$$



10 - Trains d'engrenages

Les trains d'engrenages sont utilisés dans une grande quantité de machines et mécanismes divers.

Les **engrenages cylindriques** sont les plus **courants**. Les **engrenages coniques** réalise une transmission entre des **arbres concourants**.

Les **engrenages roue et vis sans fin** permettent l'**irréversibilité** et une **grande réduction** avec un seul couple de roues.

Les **dentures droites** sont employées dans les « **petits** » appareils. Les **dentures hélicoïdales**, plus silencieuses, sont utilisées lorsqu'il s'agit de **transmettre beaucoup de puissance**.

Dans la plupart des applications, les **trains d'engrenages** sont utilisés pour **réduire les vitesses de rotation** et par conséquent pour **augmenter le couple de sortie** (fonctionnent en **réducteur**).

10 - 1 Train d'engrenages ordinaire

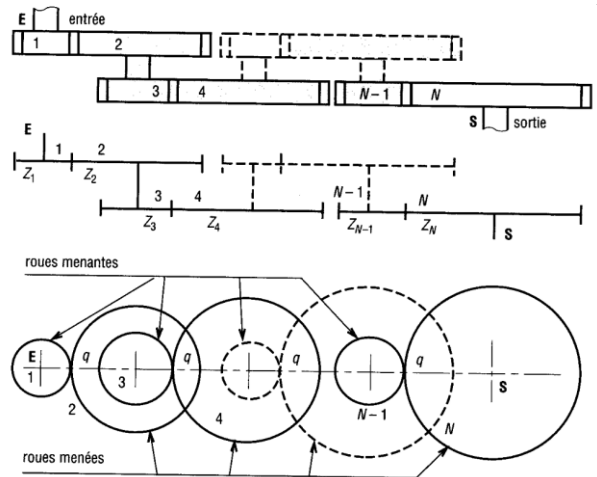
Toutes les roues tournent **autour d'un axe géométrique définitivement fixe par rapport au bâti**.

Rapport de transmission ou raison

$$r = \frac{\omega_s}{\omega_E} \quad r > 0 \text{ ou } r < 0$$

$$r = (-1)^n \frac{\text{Produit des menantes}}{\text{Produit des menées}} = (-1)^n \frac{\pi d_M}{\pi d_m} = (-1)^n \frac{\pi Z_M}{\pi Z_m}$$

n = nombre de **contacts extérieurs** entre les engrenages



10 - 2 Train d'engrenages épicycloïdal plan

Une ou plusieurs roues autour d'un axe géométrique Δ lui-même mobile autour d'un axe Δ_0

Tous les axes des roues dentées coïncident avec l'axe Δ_0 du carter principal ($\Delta // \Delta_0$)

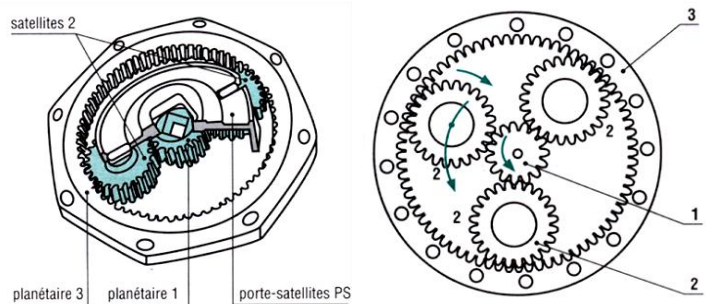
Les engrenages ayant pour axe Δ_0 : **planétaires**

Les engrenages ayant pour axe Δ : **satellites**

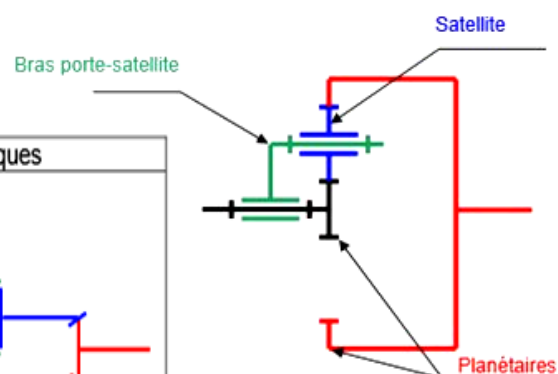
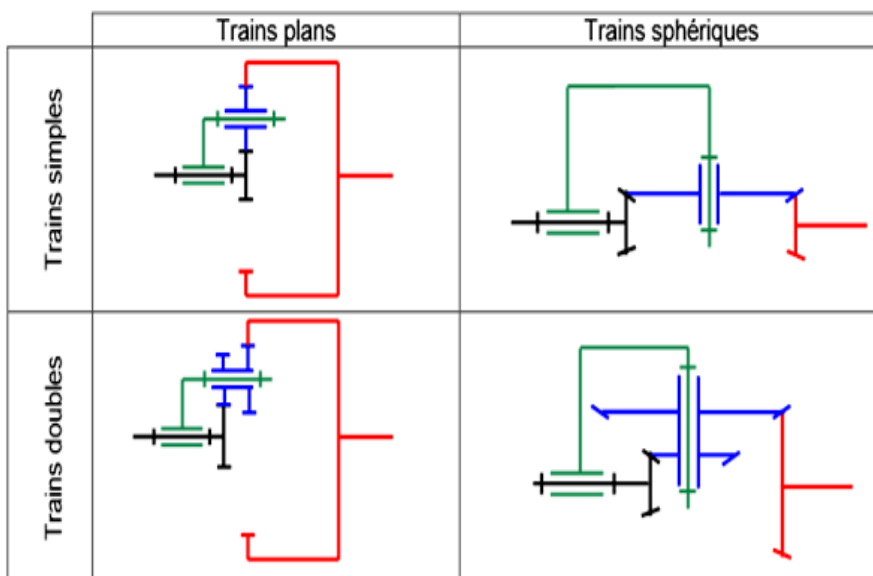
Élément solide de l'axe Δ : **bras porte-satellite** ou **bras**

Soit S l'arbre de sortie et E l'arbre d'entrée, r_g le rapport global de transmission ou raison globale

$$r_g = \frac{\omega_s}{\omega_E} \quad r_g > 0 \text{ ou } r_g < 0$$



Divers types de trains épicycloïdaux



Méthode de calcul de r_g

1 - Ecrire la chaîne cinématique symbolique associée au train correspondant (**bras bloqué**) . Cette chaîne cinématique dispose d'une sortie fictive S_b

2 - Calculer la raison basique r_b de cette chaîne à l'aide de : $r_b = (-1)^n \frac{\text{Produit des menantes}}{\text{Produit des menées}} = (-1)^n \frac{\pi d_M}{\pi d_m} = (-1)^n \frac{\pi Z_M}{\pi Z_m}$

3 - Ecrire la formule de Willis avec le fonctionnement **réel** (bras libéré) $r_b = \frac{\omega_{sb} - \omega_{bras}}{\omega_E - \omega_{bras}}$ de cette relation on tire $\frac{\omega_s}{\omega_E} = r_g$

Remarque

S_b = Sortie fictive ≠ sortie réelle

Un train épicycloïdal plan peut être utilisé comme inverseur, démultiplicateur ou surmultiplicateur .

Un train est **épicycloïdal sphérique** quand l'axe Δ n'est pas parallèle à l'axe principal Δ_0 des planétaires de la transmission.

Cas particulier : $\Delta \perp \Delta_0$ c'est un train épicycloïdal nommé **différentiel**.

Formule de Willis appliquée à un différentiel : $\omega_{boitier} = \omega_{bras} = \frac{\omega_{planétaire\ 1} + \omega_{planétaire\ 2}}{2}$

Sur un véhicule automobile muni d'un différentiel , chacune des roues est solidaire d'un planétaire.

schéma	élément fixe	rapport des vitesses
<p>(a)</p>	<p>La couronne 2 est solidaire du bâti 0 :</p> $\omega_{2/0} = 0$	<p>D'après la formule de Willis :</p> $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$ <p>Pour que le train d'engrenages soit réducteur, il faut que :</p> <p>Entrée \Rightarrow 1 Sortie \Rightarrow 4</p>
<p>(b) :</p>	<p>Le porte-satellites 4 est solidaire du bâti 0 :</p> $\omega_{4/0} = 0$	<p>D'après la formule de Willis :</p> $\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{Z_1}{Z_2}$ <p><u>Remarque :</u> le train d'engrenages est dans ce cas « ordinaire ».</p> <p>Pour que le train d'engrenages soit réducteur, il faut que :</p> <p>Entrée \Rightarrow 1 Sortie \Rightarrow 2</p>
<p>(c) :</p>	<p>Le planétaire 1 est solidaire du bâti 0 :</p> $\omega_{1/0} = 0$	<p>D'après la formule de Willis :</p> $\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{4/0}} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}$ <p>Pour que le train d'engrenages soit réducteur, il faut que :</p> <p>Entrée \Rightarrow 2 Sortie \Rightarrow 4</p>